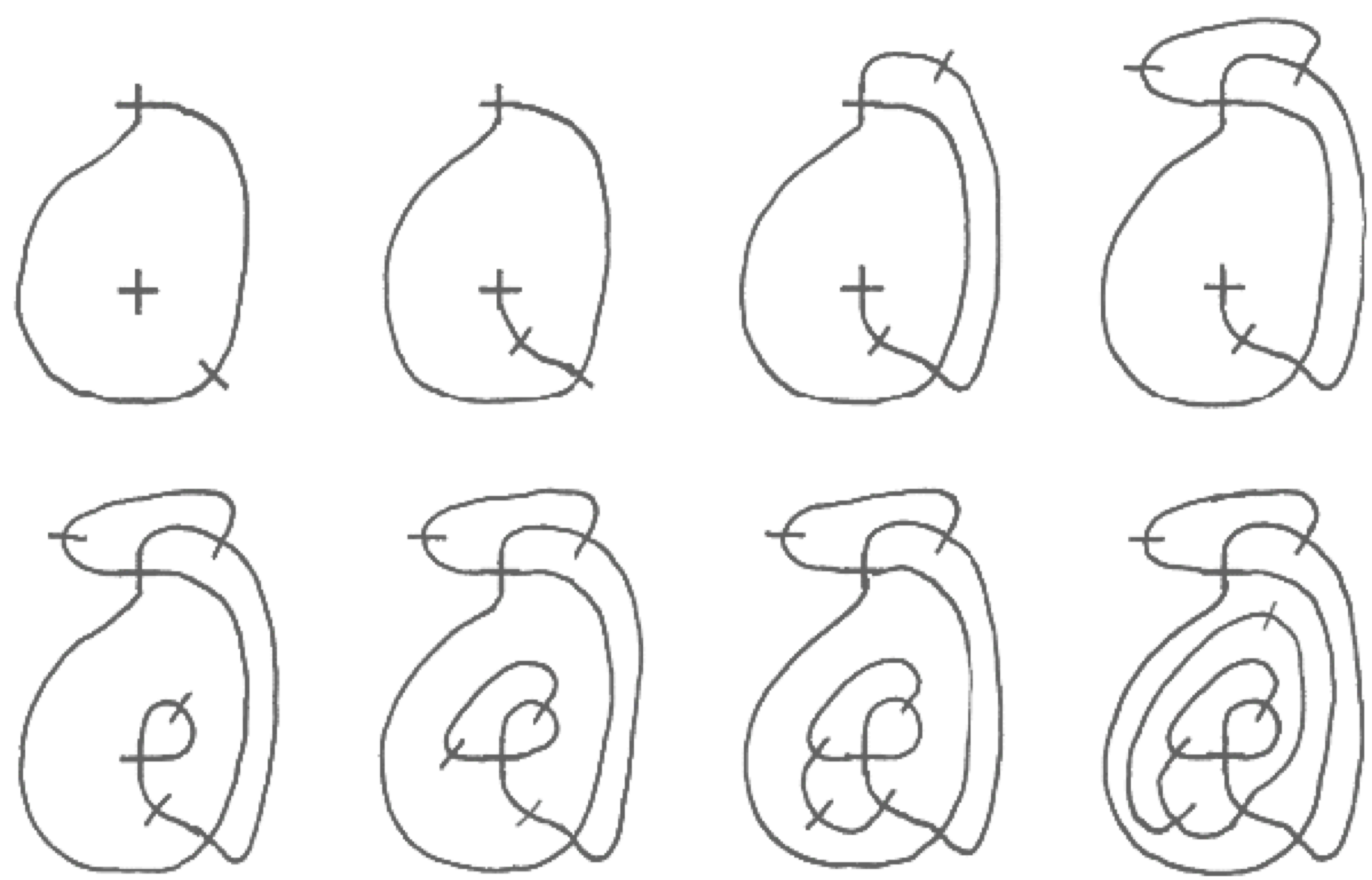
HAJTÁS ÉS Ó-HAJTÁS

Cserháti Réka

AZ Ó-HAJTÁS

- Kezdőállás: valahány kereszt (X) a síkon
- Lépések: két keresztszár összekötése; az összekötő vonalra keresztvonalka húzása (⟶ újabb X)
- A vonalak csak a hivatalos X-ekben metszhetik egymást.
- Egy példa:



TÉTEL

- Tétel: az ó-hajtás személytelen játék
  - A bizonyításhoz az Euler-féle poliédertétel egy általánosított változatát használjuk.

EULER POLIÉDERTÉTELE

- Olyan poliéderekre, melyekre teljesül, hogy:
  - 1.: Bármely él pontosan 2 lap közös oldala,
  - 2.: Bármely lapról bármely másikra eljuthatunk egymáshoz élekben csatlakozó lapok sorozatán keresztül,
  - 3.:Bármely csúcsból bármely másikba eljuthatunk egymáshoz csúcsokban csatlakozó élek sorozatán keresztül,
  - 4.: Az élekből alkotott bármely egyszerű zárt töröttvonal a poliéder felületét két részre osztja;

$$c+l=e+2$$

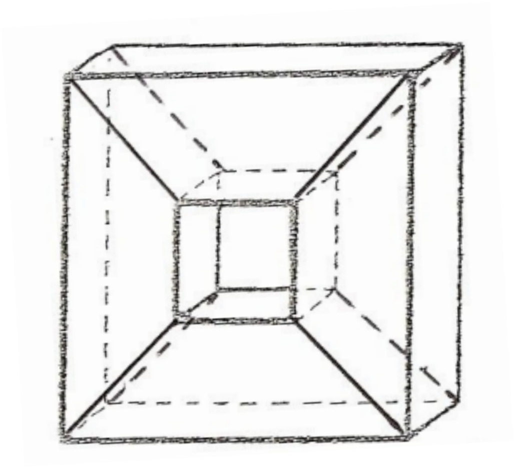
ahol c a csúcsok száma,
l a lapok száma,
e az élek száma.

EULER POLIÉDERTÉTELE

- Olyan poliéderekre, melyekre teljesül, hogy:
  - 1.: Bármely él pontosan 2 lap közös oldala,
  - 2.: Bármely lapról bármely másikra eljuthatunk egymáshoz élekben csatlakozó lapok sorozatán keresztül,
  - 3.:Bármely csúcsból bármely másikba eljuthatunk egymáshoz csúcsokban csatlakozó élek sorozatán keresztül,
  - 4.: Az élekből alkotott bármely egyszerű zárt töröttvonal a poliéder felületét két részre osztja

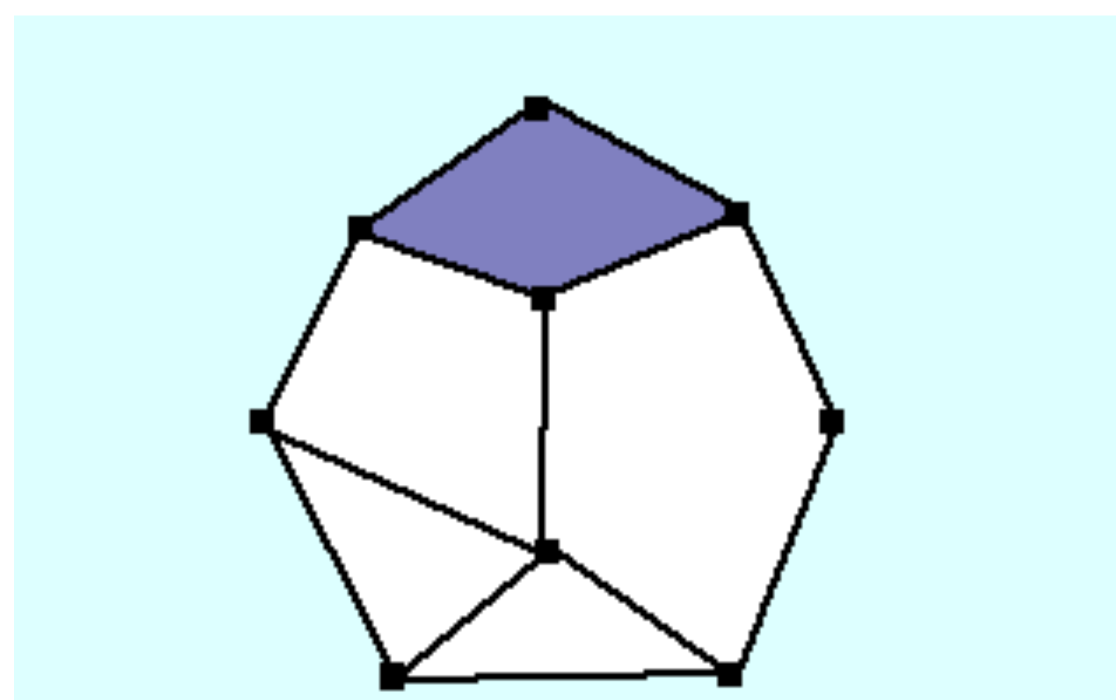
$$c+l=e+2$$

- Ez igaz minden gömbszerű poliéderre, tehát a konvex poliéderekre is.
- Erre pl. nem:



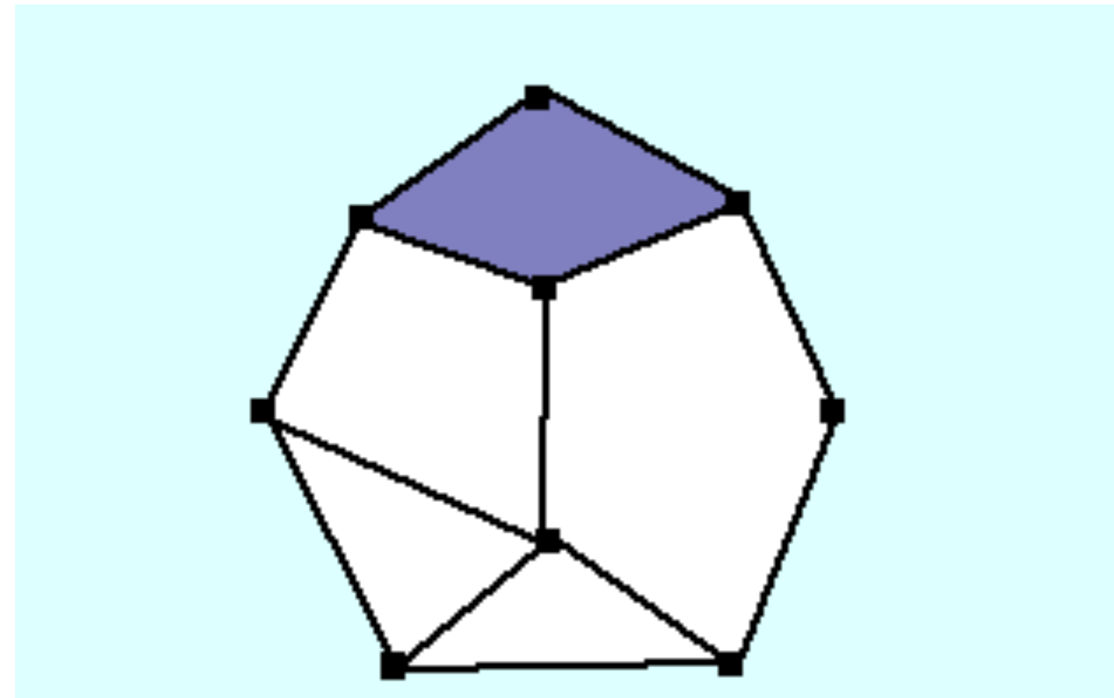
EGY SZEMLÉLETES BIZONYÍTÁS

- Tekintsük a poliédert egy bolygónak.
- A felszínén az élek gátak, a lapok medencék.
- Kezdetben egy medencében van víz, ebből szeretnénk elárasztani az egész bolygót.
- Minden lépésben felrobbantunk egy gátat, aminek csak az egyik oldalán van víz.



EGY SZEMLÉLETES BIZONYÍTÁS

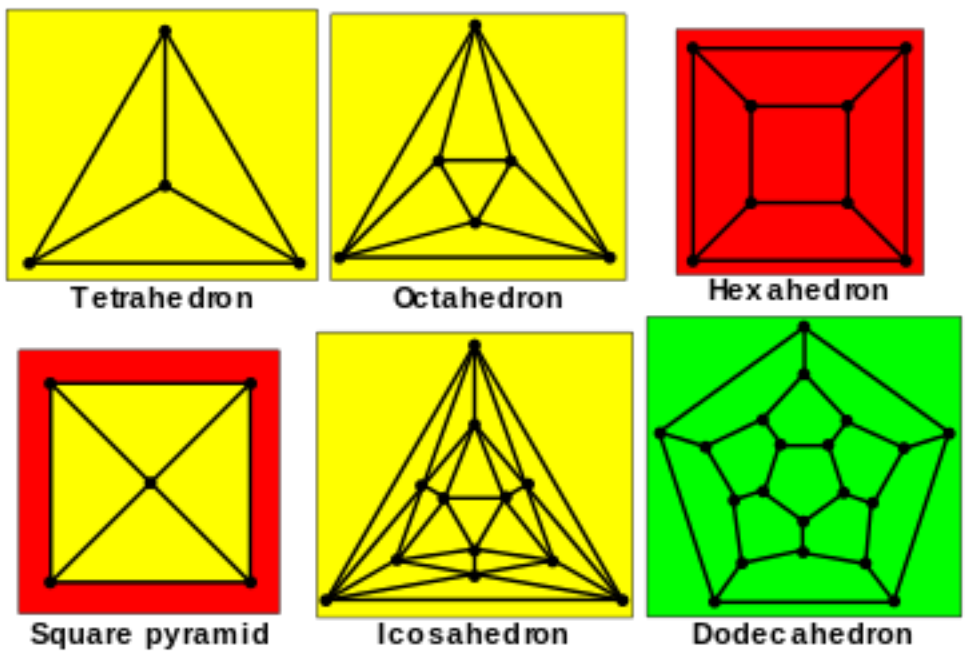
- Olyan poliéderekre, melyekre teljesül, hogy:
  - 1.: Bármely él pontosan 2 lap közös oldala,
  - 2.: Bármely lapról bármely másikra eljuthatunk egymáshoz élekben csatlakozó lapok sorozatán keresztül,
  - 3.:Bármely csúcsból bármely másikba eljuthatunk egymáshoz csúcsokban csatlakozó élek sorozatán keresztül,
  - 4.: Az élekből alkotott bármely egyszerű zárt töröttvonal a poliéder felületét két részre osztja



- (2) miatt véges sok lépésben sikerül
- (1) miatt a felrobbantott gátak száma $l-1$
- A maradék gátak fát alkotnak, ezért számuk $c-1$
- Tehát az élek (gátak) száma összesen $e = (l-1)+(c-1)=c+l-2$. ∎

A POLIÉDERTÉTEL ÁLTALÁNOSÍTÁSA GRÁFOKRA

- A fenti tulajdonságokkal rendelkező poliéderek szerkezete síkgráfként felrajzolható.



- Egy összefüggő síkgráfra is igaz a $c+t=e+2$ egyenlőség, ha lapok helyett a sík tartományairól beszélünk.
- Általánosítva, k komponensű síkgráfra pedig:

$$c+t=e+k+1.$$

AZ EREDETI TÉTEL

- Az ó-hajtás személytelen játék
- Ha p kereszttel indulunk, akkor a lépések száma $l = 5p - 2$.

BIZONYÍTÁS

- Szükséges észrevételek:
  - A végállásban $k = 1$
  - Lépésenként 2 új él keletkezik, tehát $e = 2l$
  - Minden lépés egy új pontot jelent: $c = p + l$
  - És hogy a szabad végek száma sosem változik! Emiatt $t = 4p$.

BIZONYÍTÁS

- Szükséges észrevételek:
  - A végállásban $k = 1$
  - $e = 2l$
  - $c = p + l$
  - $t = 4p$

Ezeket behelyettesítjük:

$$c + t = e + k + 1$$

$$p + l + 4p = 2l + 2$$

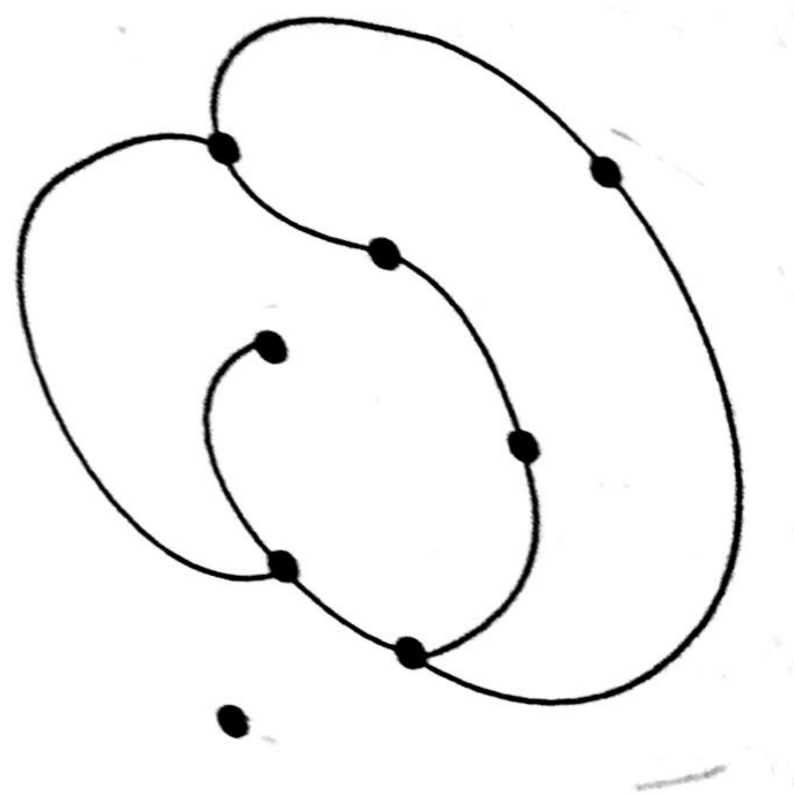
$$l = 5p - 2 \quad \blacksquare$$

A HAJTÁS

- Kezdőállás: valahány pont a síkon
- Lépések: két pont összekötése, és új pont arra a vonalra
- Egy pontnak 3 “élete” van, azaz a fokszáma max. 3 lehet
- A vonalak nem metszhetik egymást.
- Példa:

Játsszunk!!!

FELADAT



Hány pontból kezdődött a játék?

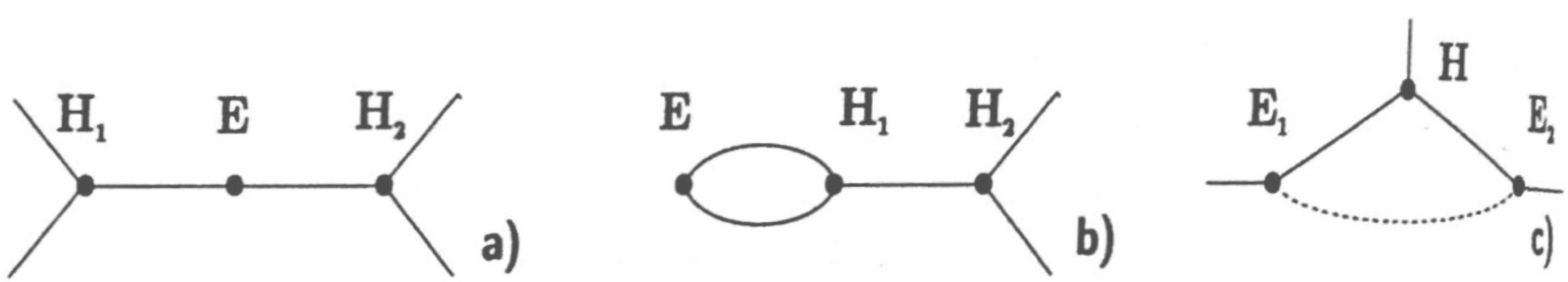
Hányadik lépésnél tartanak?

HÁNY LÉPÉSBEN LESZ VÉGE?

- Egyszer biztosan.
- Pontosabban:
  - Minden lépésben 2 életet elveszünk és 1 életet adunk, vagyis az életek száma mindig eggyel csökken.
  - A végén legalább egy élet marad.
  - p kezdő ponttal kezdetben $3p$ élet van
  - Tehát legfeljebb 3p-1 lépés lehetséges.

HÁNY LÉPÉSBEN LESZ VÉGE?

- Azonnal nem lehet.
- A pontok száma a végállásban: $p+l$
- Az életek száma: $\varepsilon = 3p - l$
- Minden pontnak max. 1 élete van, és egy élőnek van 2 halott "hozzátartozója":



34. ábra

HÁNY LÉPÉSBEN LESZ VÉGE?

- Ha marad *e* db élő pont, nekik marad *2e* db halott hozzátartozójuk is.
- A halott pontok, akiknek nincs élő hozzátartozójuk, elfelejtett pontok.
- Az elfelejtett pontok száma:

$$\phi = p + l - \varepsilon - 2\varepsilon = p + l - 3(3p - l) = 4l - 8p$$

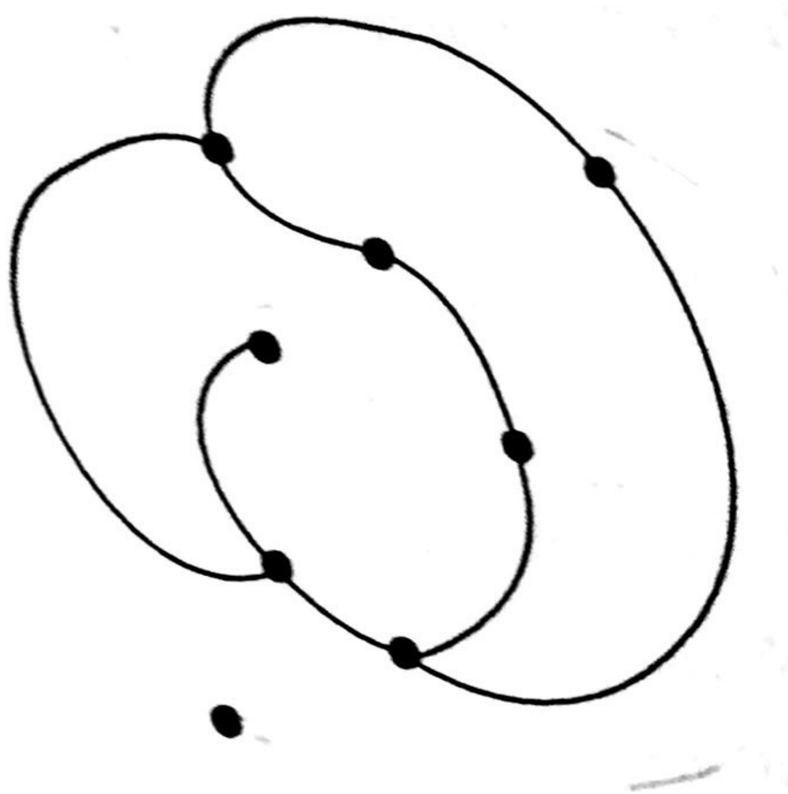
$$l = 2p + \frac{1}{4}\phi \geq 2p$$

KÖVETKEZMÉNYEK

- Így $2p \le l \le 3p - 1$
- Ha már van valamennyi elfelejtett pont, akkor a lépésszám
$$l \ge 2p + \frac{1}{4}\phi$$
- Ha biztosan marad valahány élő pont, akkor
$$l \le 3p - \varepsilon$$
- De mikor maradnak…?

Ha egy tartománynak, vagy szomszédos tartományok uniójának belsejében (nem a határán) van élő pont, akkor ott biztosan marad a játék végállásában is.

FELADAT



Hány pontból kezdődött a játék?

Hányadik lépésnél tartanak?

Ki tud nyerni, és hogyan?

ÉRDEKESSÉG

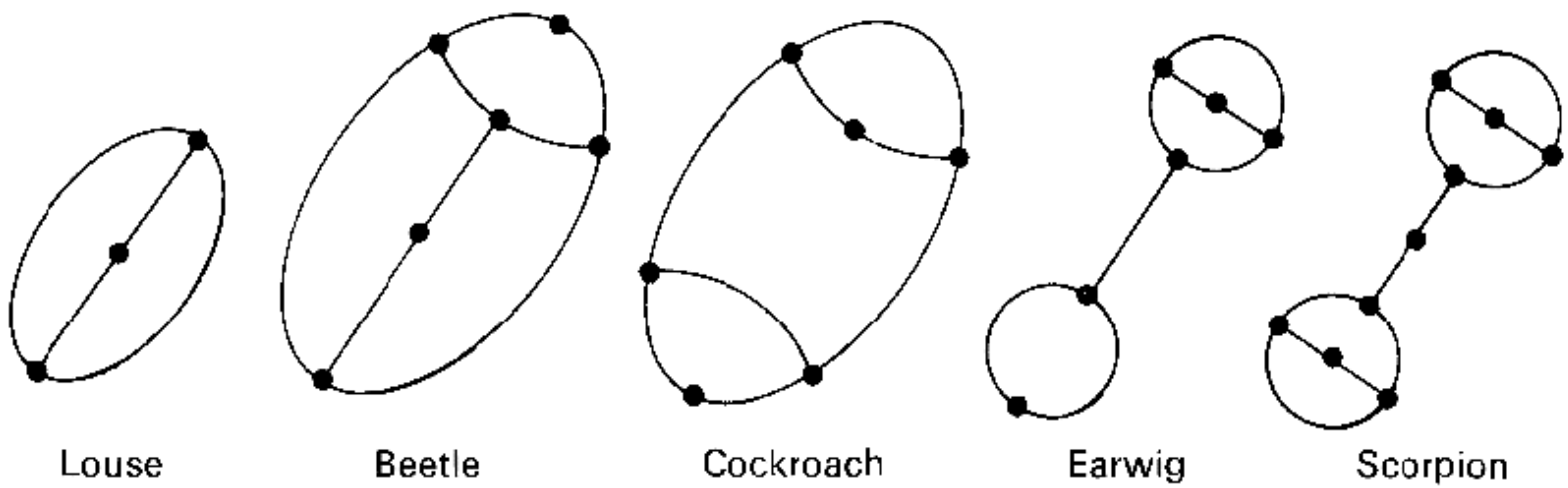


Figure 7. The Five Fundamental Insects.

A játék csak úgy érhet véget 2p lépésben, ha a végállás ilyen szerkezetek kombinációja.

ÉRDEKESSÉG

Pl:

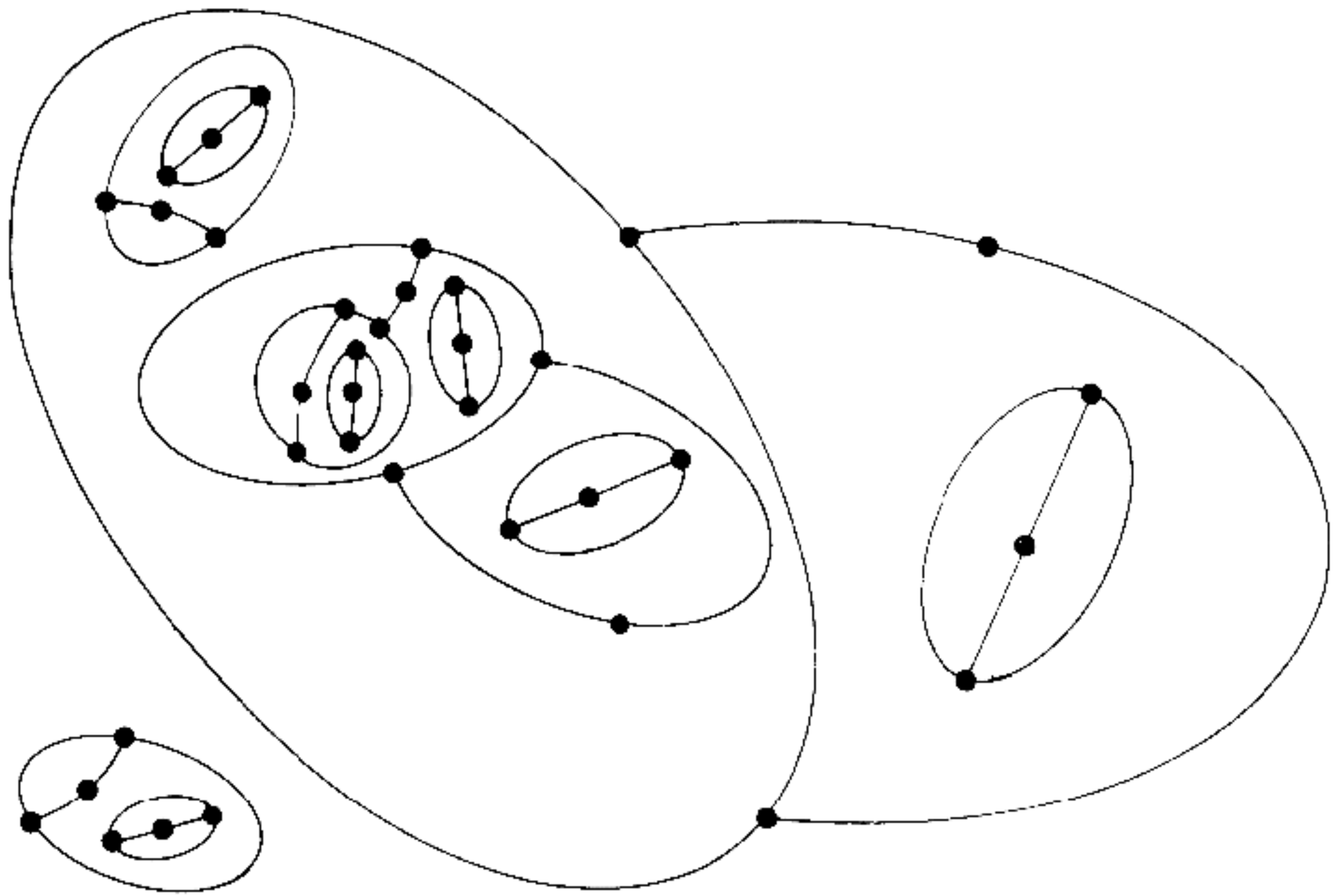


Figure 8. The Lousy End of a Short Sprouts Game.

NA ÉS A NYERŐ STRATÉGIA?

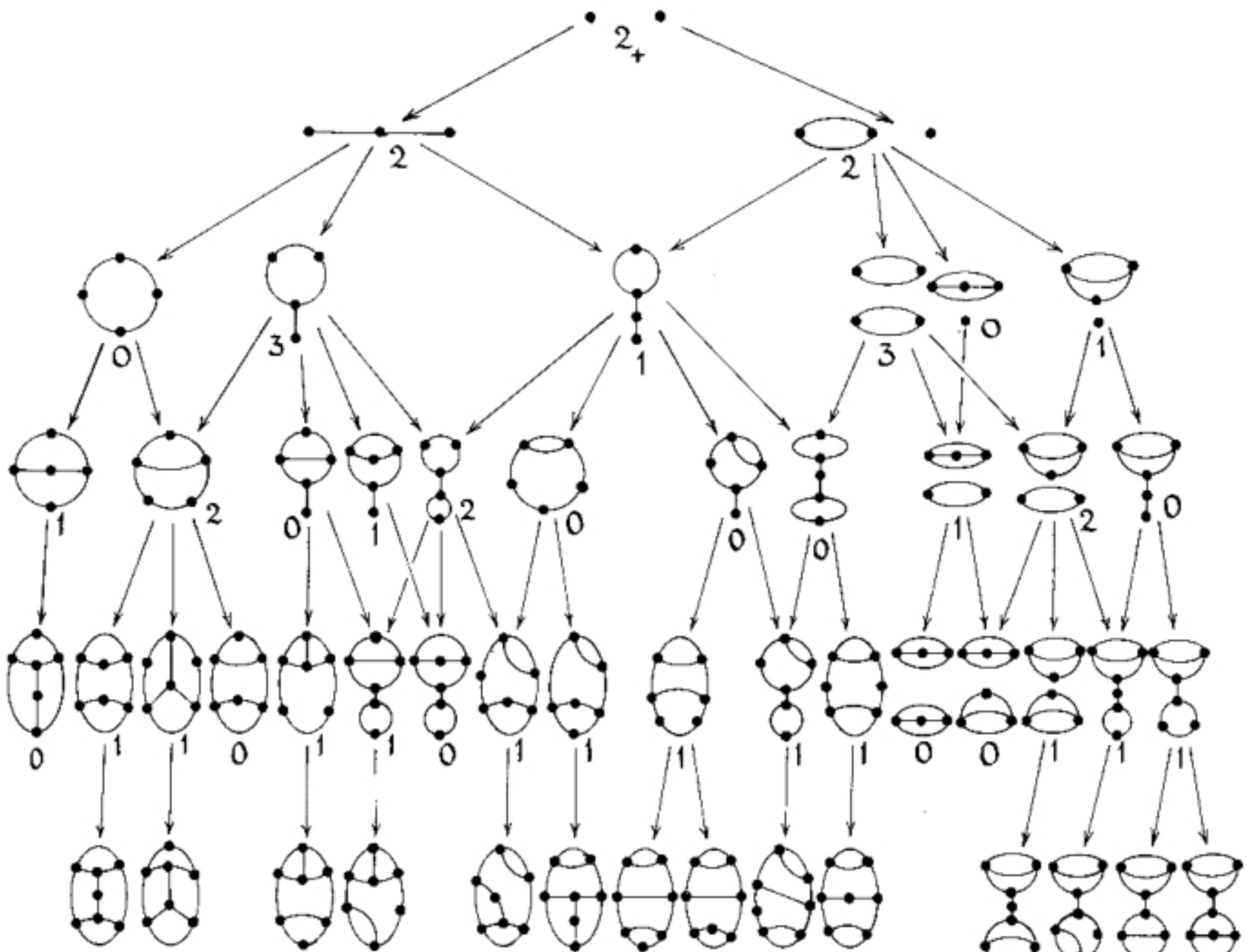


Figure 6. Two-spot Sprouts, with Reduced Forms.

NYERŐ STRATÉGIA?

no. of spots:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
normal play:	$0P$	$2P$	$4P$	$7N$	$9N$	$11N$	$14P$	P	P	N	N	N
misère play:	$0N$	$2N$	$5P$	$7P$	$9P$	N	N	P	P	P		

Table 10. Outcomes of the Smallest Sprouts Games.

Spots	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	...
Misère Outcome	Win	**Win**	Loss	Loss	**Loss**	Win	Win	Loss	Loss	Loss	Win	Win	Win	Loss	Loss	Loss	...

KÖSZÖNÖM

A FIGYELMET!

FELHASZNÁLT IRODALOM

- Csákány Béla: Diszkrét matematikai játékok (Polygon, 1998)
- Berlekamp, Conway, Guy: Winning ways for your mathematical plays (A K Peters, 2001)
- Wikipédia
- web.cs.elte.hu
- users.atw.hu