A Wythoff-nim magja

Négy tulajdonság

Tekintsük nemnegatív egész számok egy $2 \times \infty$ méretű táblázatát:

$$T = \begin{array}{|c|c|c|c|c} \hline a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots \\ \hline b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & \cdots \\ \hline \end{array} = \{(a_n, b_n) : n \in \mathbb{N}_0\}$$

(FEL) Minden nemnegatív egész szám pontosan egy oszlopban lép fel:

$$\forall k \in \mathbb{N}_0 \, \exists! n \in \mathbb{N}_0 : \; a_n = k \text{ vagy } b_n = k.$$

(KÜL) Az n-edik pár tagjainak különbsége éppen n:

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : \; b_n - a_n = n.$$

(MON) A sorok szigorú monoton növekedőek:

$$a_0 < a_1 < a_2 < a_3 < \cdots \quad \text{és} \quad b_0 < b_1 < b_2 < b_3 < \cdots .$$

(MIKI) Minden oszlopban a felső szám megegyezik az összes korábbi oszlopokban szereplő számok minimális kimaradójával:

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : \; a_n = \operatorname{mex}\{a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}\}.$$

(KÜL) & (MIKI) $\Longrightarrow$ (FEL) & (MON)

Lemma:

Ha egy T táblázat rendelkezik a (KÜL) és (MIKI) tulajdonságokkal, akkor T rendelkezik a (FEL) és (MON) tulajdonságokkal is.

Biz.:

Tfh. $T \models$ (KÜL) & (MIKI). Tetszőleges $n \in \mathbb{N}_0$ esetén, (MIKI) szerint

$$\begin{aligned} a_n &= \operatorname{mex}\{a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, b_0, b_1, \dots, b_{n-1}\} &&= \operatorname{mex} H_{n-1}, \\ a_{n+1} &= \operatorname{mex}\{a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n, b_0, b_1, \dots, b_{n-1}, b_n\} &&= \operatorname{mex} H_n. \end{aligned}$$

Mivel $H_n = H_{n-1} \cup \{a_n, b_n\} = H_{n-1} \cup \{\operatorname{mex} H_{n-1}, b_n\}$, világos (?), hogy $\operatorname{mex} H_n > \operatorname{mex} H_{n-1}$, vagyis $a_{n+1} > a_n$.

Az alsó sor monotonitása ezután már (KÜL) segítségével kijön:

$$b_{n+1} = a_{n+1} + n + 1 > a_n + n = b_n.$$

(KÜL) & (MIKI) $\Longrightarrow$ (FEL) & (MON) (folyt.)

Összefoglalva:

$$\begin{array}{ccccccccc}
a_0 & < & a_1 & < & a_2 & < & a_3 & < & \cdots \\
\rotatebox{90}{$\leq$} & & \wedge & & \wedge & & \wedge & & \\
b_0 & < & b_1 & < & b_2 & < & b_3 & < & \cdots
\end{array}$$

Ebből látható, hogy ha lenne tiltott ismétlődés, az csak $b_\ell = a_n$ $(\ell < n)$ formában léphetne fel. Node

$$b_\ell \in \{a_0, \dots, a_{n-1}, b_0, \dots, b_{n-1}\} = H_{n-1} \text{ és } a_n = \operatorname{mex} H_{n-1} \implies b_\ell \neq a_n.$$

Ezzel beláttuk (FEL) unicitás részét.

Az egzisztencia részhez tfh. van olyan szám, ami nem lép fel T-ben. Legyen k a legkisebb ilyen kimaradó szám. Tehát $0, 1, \dots, k-1$ mind fellépnek, azaz

$$\exists n \in \mathbb{N}_0 : \ 0, 1, \dots, k-1 \in H_{n-1} \quad \text{és} \quad k \notin H_{n-1}.$$

Ekkor $k = \operatorname{mex} H_{n-1} = a_n$, vagyis k mégsem marad ki T-ből. $\lightning$ $\square$

(FEL) & (KÜL) & (MON) $\Longrightarrow$ $\mathcal{W}$ magja

Lemma:

Ha a T táblázat rendelkezik a (FEL), (KÜL) és (MON) tulajdonságokkal, akkor T (és tükörképe) a Wythoff-nim magja.

Biz.:

Tfh. $T \models$ (FEL) & (KÜL) & (MON); be kell látnunk, hogy $\mathcal{W}$ magja:

$$M := \{(a_n, b_n), (b_n, a_n) : n \in \mathbb{N}_0\}.$$

1. $(0,0) \in M$:
   - (FEL) miatt $\exists n : 0 \in \{a_n, b_n\}$,
   - (MON) miatt $n = 0$, és
   - (KÜL) miatt $a_0 = b_0$,

   tehát $(a_0, b_0) = (0, 0) \in M$.

2. $M \xrightarrow{\forall} \overline{M}$: Tfh. $(u, v) \in M$. Hova lehet innen lépni?
   - $(u - k, v) \notin M$ (FEL) unicitás része miatt,
   - $(u, v - k) \notin M$ (FEL) unicitás része miatt,
   - $(u - k, v - k) \notin M$ (KÜL) miatt.

$(\mathrm{FEL})\,\&\,(\mathrm{KÜL})\,\&\,(\mathrm{MON}) \Longrightarrow \mathcal{W}$ magja (folyt.)

❸ $\overline{M} \xrightarrow{\exists} M$: Tfh. $(u,v) \notin M$. Ha $u = v$, akkor $(u,v) \to (0,0) \in M$. ÁMNTFH. $u < v$. (FEL) miatt u és v is szerepel valahol T-ben.

...	u	...	v	...
...		...		...

...	v	...	u	...
...		...		...

...		...		...
...	u	...	v	...

...		...		...
...	v	...	u	...

...	u	...		...
...		...	v	...

...	v	...		...
...		...	u	...

...		...	v	...
...	u	...		...

...		...	u	...
...	v	...		...

(FEL) & (KÜL) & (MON) $\Longrightarrow$ $\mathcal{W}$ magja (folyt.)

3. $\overline{M} \xrightarrow{\exists} M$: Tfh. $(u,v) \notin M$. Ha $u = v$, akkor $(u,v) \to (0,0) \in M$. ÁMNTFH. $u < v$. (FEL) miatt u és v is szerepel valahol T-ben.

…	u	…	v	…
…		…?		…

…	v	…	u	…
…		…		…

…		…		…
…	u	…	v	…

…		…		…
…	v	…	u	…

…	u	…		…
…		…	v	…

…	v	…		…
…		…	u	…

…		…	v	…
…	u	…		…

…		…	u	…
…	v	…		…

(FEL) & (KÜL) & (MON) $\Longrightarrow$ $\mathcal{W}$ magja (folyt.)

❸ $\overline{M} \xrightarrow{\exists} M$: Tfh. $(u,v) \notin M$. Ha $u = v$, akkor $(u,v) \to (0,0) \in M$.
ÁMNTFH. $u < v$. (FEL) miatt u és v is szerepel valahol T-ben.

…	u	…	v	…
…		…?		…

…	v	…	u	…
…		…		…

…		…		…
…	u	…	v	…

…		…		…
…	v	…	u	…

…	u	…		…
…		…	v	…

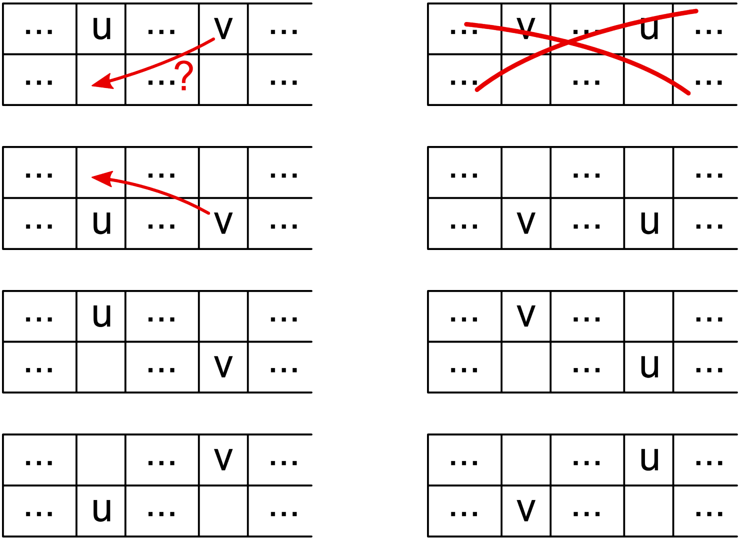
…	v	…		…
…		…	u	…

…		…	v	…
…	u	…		…

…		…	u	…
…	v	…		…

(FEL) & (KÜL) & (MON) $\Longrightarrow$ $\mathcal{W}$ magja (folyt.)

3. $\overline{M} \xrightarrow{\exists} M$: Tfh. $(u, v) \notin M$. Ha $u = v$, akkor $(u, v) \to (0, 0) \in M$. ÁMNTFH. $u < v$. (FEL) miatt u és v is szerepel valahol T-ben.



(FEL) & (KÜL) & (MON) $\Longrightarrow$ $\mathcal{W}$ magja (folyt.)

❸ $\overline{M} \xrightarrow{\exists} M$: Tfh. $(u, v) \notin M$. Ha $u = v$, akkor $(u, v) \to (0, 0) \in M$.
ÁMNTFH. $u < v$. (FEL) miatt u és v is szerepel valahol T-ben.

…	u	…	v	…
…		…?		…

…	v	…	u	…
…		…		…

…		…		…
…	u	…	v	…

…		…		…
…	v	…	u	…

…	u	…		…
…		…	v	…

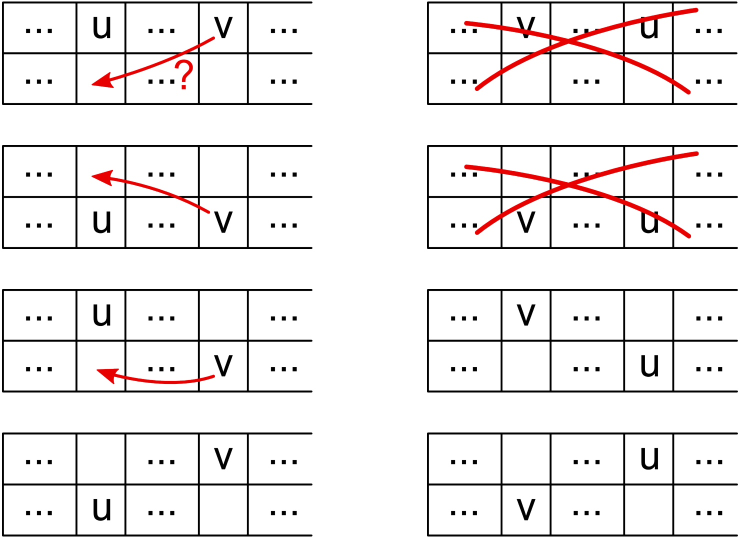
…	v	…		…
…		…	u	…

…		…	v	…
…	u	…		…

…		…	u	…
…	v	…		…

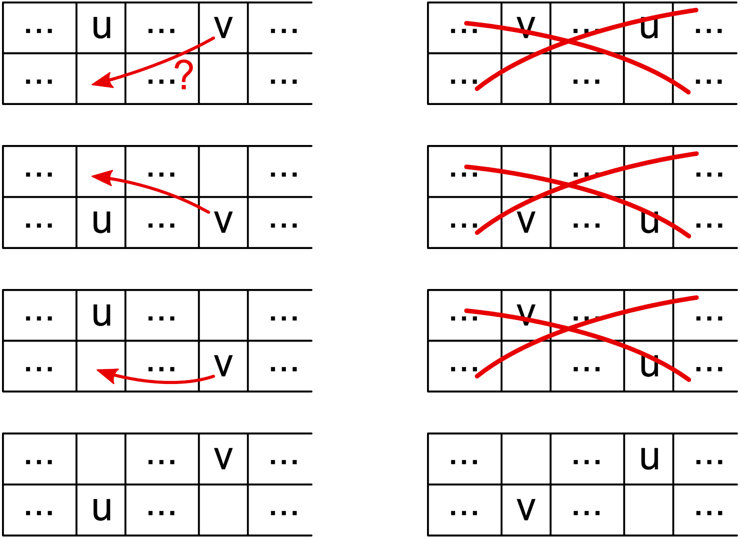
(FEL) & (KÜL) & (MON) $\Longrightarrow$ $\mathcal{W}$ magja (folyt.)

❸ $\overline{M} \xrightarrow{\exists} M$: Tfh. $(u, v) \notin M$. Ha $u = v$, akkor $(u, v) \to (0, 0) \in M$.
ÁMNTFH. $u < v$. (FEL) miatt u és v is szerepel valahol T-ben.



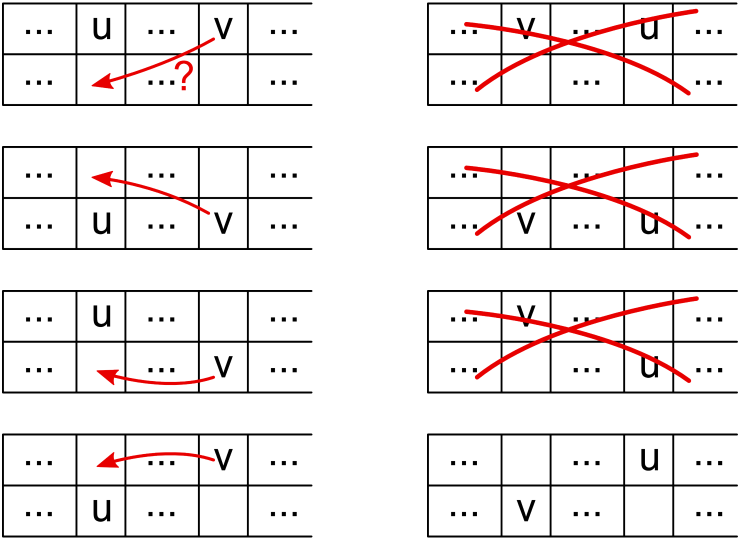
(FEL) & (KÜL) & (MON) $\Longrightarrow$ $\mathcal{W}$ magja (folyt.)

❸ $\overline{M} \xrightarrow{\exists} M$: Tfh. $(u, v) \notin M$. Ha $u = v$, akkor $(u, v) \to (0, 0) \in M$. ÁMNTFH. $u < v$. (FEL) miatt u és v is szerepel valahol T-ben.



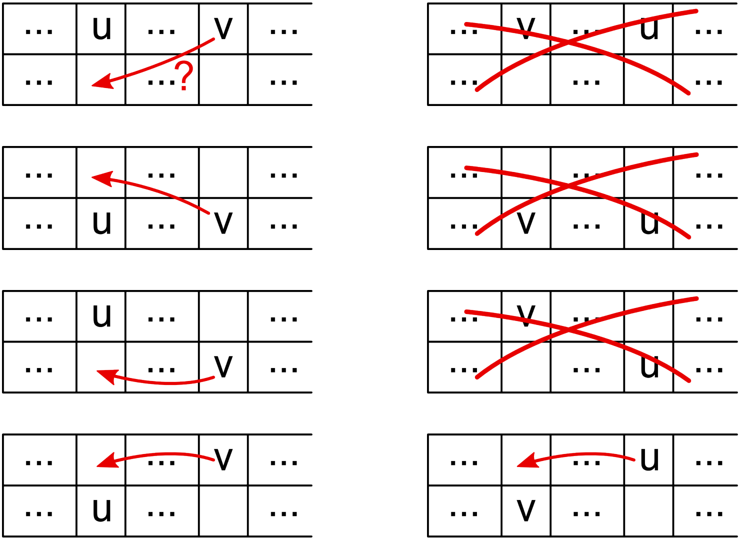
(FEL) & (KÜL) & (MON) $\Longrightarrow$ $\mathcal{W}$ magja (folyt.)

❸ $\overline{M} \xrightarrow{\exists} M$: Tfh. $(u, v) \notin M$. Ha $u = v$, akkor $(u, v) \to (0, 0) \in M$. ÁMNTFH. $u < v$. (FEL) miatt u és v is szerepel valahol T-ben.



(FEL) & (KÜL) & (MON) $\Longrightarrow$ $\mathcal{W}$ magja (folyt.)

❸ $\overline{M} \xrightarrow{\exists} M$: Tfh. $(u, v) \notin M$. Ha $u = v$, akkor $(u, v) \to (0, 0) \in M$. ÁMNTFH. $u < v$. (FEL) miatt u és v is szerepel valahol T-ben.



(FEL) & (KÜL) & (MON) $\Longrightarrow$ $\mathcal{W}$ magja (folyt.)

❸ $\overline{M} \xrightarrow{\exists} M$: Ezt az esetet kell még megvizsgálnunk:

…	u	…	v	…
…		…?		…

Legyen $u = a_i$, $v = a_j$ és $i < j$.

- Ha $b_i < v$, akkor jó az ábrán látható lépés: $(u, v) \to (a_i, b_i)$
- Ha $b_i > v$, akkor mindkét komponenst ugyanannyival csökkentjük: $(u, v) \to (a_k, b_k)$, ahol $k := v - u = b_k - a_k$.

  Ez valóban csökkentés?

$$
\begin{aligned}
u > a_k \quad &\Longleftrightarrow \quad a_i > a_k \\
&\Longleftrightarrow \quad i > k \\
&\Longleftrightarrow \quad b_i - a_i > v - u \\
&\Longleftrightarrow \quad b_i > v \ \checkmark
\end{aligned}
$$

□

A Wythoff-nim magjának jellemzései

Tétel:

Tetszőleges T táblázatra az alábbiak ekvivalensek:

(a) $T \models$ (KÜL) & (MIKI)

(b) $T \models$ (FEL) & (KÜL) & (MON)

(c) T (és tükörképe) a Wythoff-nim magja

Biz.:

Láttuk, hogy (a) $\Longrightarrow$ (b) $\Longrightarrow$ (c). Jelölje $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, illetve $\mathcal{C}$ mindazon T táblázatok halmazát, amelyekre (a), (b), illetve (c) teljesül. Tudjuk, hogy

$$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}.$$

Világos (?), hogy $|\mathcal{A}| = 1$ és $|\mathcal{C}| = 1$. Tehát $\mathcal{A} = \mathcal{B} = \mathcal{C}$ egyelemű halmaz, amelynek egyetlen eleme a Wythoff-nim magja (pontosabban a mag fele).

$\square$

Beatty tétele

Tétel (Beatty):

Legyenek α, β olyan pozitív irracionális számok, melyekre $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$ teljesül. Ekkor az

$$[\alpha], [2\alpha], [3\alpha], \ldots \quad \text{és} \quad [\beta], [2\beta], [3\beta], \ldots$$

sorozatokban minden pozitív egész szám fellép, mégpedig pontosan egyszer.

Biz.: Lásd a könyvben, vagy ...

Két futó (A és B) fut körbe-körbe egymással szemben egy futópályán; sebességeik $\frac{1}{\alpha}$ és $\frac{1}{\beta}$ (kör/óra).

A rajthelynél (ahonnan mindketten indultak) áll egy bíró. Amikor egy versenyző elfut mellette, odakiáltja neki, hogy eddig hányszor találkozott szembe a másik versenyzővel, a bíró pedig feljegyzi ezeket a számokat.

Milyen számok fognak szerepelni a bíró füzetében?

Beatty tétele (folyt.)

- $\dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\beta} = 1 \implies$ pontosan óránként találkoznak a versenyzők.
- $\dfrac{1}{\alpha}, \dfrac{1}{\beta} \notin \mathbb{Q} \implies$ sohasem fognak pont a bírónál összefutni.
- Az *n*-edik kört A (ill. B) $n\alpha$ (ill. $n\beta$) idő elteltével fejezi be, és ekkor az $[n\alpha]$ (ill. $[n\beta]$) számot kiáltja oda a bírónak.
- Tehát a bíró füzetében az $[\alpha], [2\alpha], [3\alpha], \ldots, [\beta], [2\beta], [3\beta], \ldots$ számok fognak szerepelni (valamilyen sorrendben).

Másrészt viszont:

- Két találkozás között mindig egy versenyző halad el a bíró előtt.
- Így minden találkozás (sorszáma) pontosan egyszer lesz bejelentve.
- Tehát a bíró füzetében ez áll: $1, 2, 3, \ldots$.

A fentiekből következik, hogy . . . $\square$

Wythoff tétele

Tétel (Wythoff):

A Wythoff-nim magja (pontosabban annak a fele):

$$M = \left\{\left([n\tau], \left[n\tau^2\right]\right) : n \in \mathbb{N}_0\right\}, \quad \text{ahol } \tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Biz.:

Legyen $a_n = [n\tau]$, $b_n = \left[n\tau^2\right]$ $(n = 0, 1, \ldots)$. Elegendő belátni, hogy a

$$T = \{(a_n, b_n) : n \in \mathbb{N}_0\}$$

táblázat rendelkezik a (FEL), (KÜL), (MON) tulajdonságokkal.

A τ számról azt kell tudni, hogy ő az $x^2 = x + 1$ egyenlet pozitív megoldása.

Wythoff tétele (folyt.)

(FEL) Beatty tétele alkalmazható, mert τ irracionális, és

$$\frac{1}{\tau} + \frac{1}{\tau^2} = \frac{\tau + 1}{\tau^2} = \frac{\tau^2}{\tau^2} = 1.$$

Tehát az $a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots$ számok között minden pozitív egész szám pontosan egyszer lép fel.
Mivel $a_0 = 0, b_0 = 0$, a T táblázat valóban rendelkezik a (FEL) tulajdonsággal.

(KÜL) Tetszőleges n nemnegatív egész számra

$$\begin{aligned} b_n - a_n &= \left[n\tau^2\right] - [n\tau] = [n(\tau+1)] - [n\tau] = [n\tau + n] - [n\tau] \\ &= [n\tau] + n - [n\tau] = n. \end{aligned}$$

(MON) Tetszőleges n, m nemnegatív egész számokra

$$\begin{aligned} n > m &\implies n\tau > m\tau \text{ és } n\tau^2 > m\tau^2 \\ &\implies [n\tau] \geq [m\tau] \text{ és } \left[n\tau^2\right] \geq \left[m\tau^2\right] \\ &\implies b_n \geq b_m \text{ és } a_n \geq a_m \\ &\implies b_n > b_m \text{ és } a_n > a_m. \end{aligned}$$

□