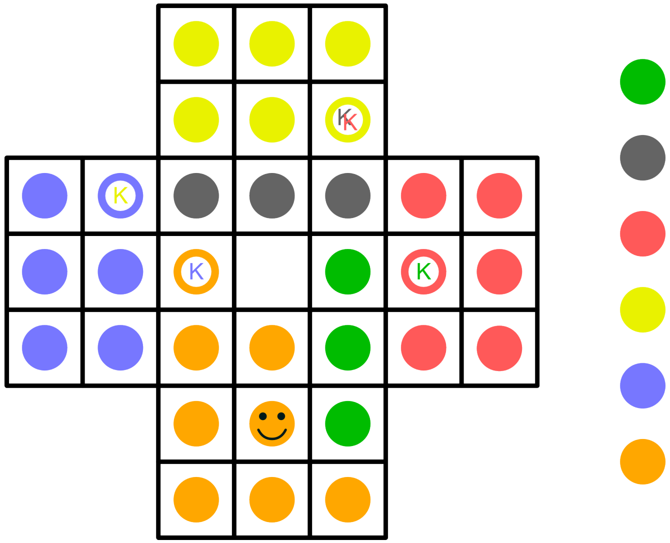
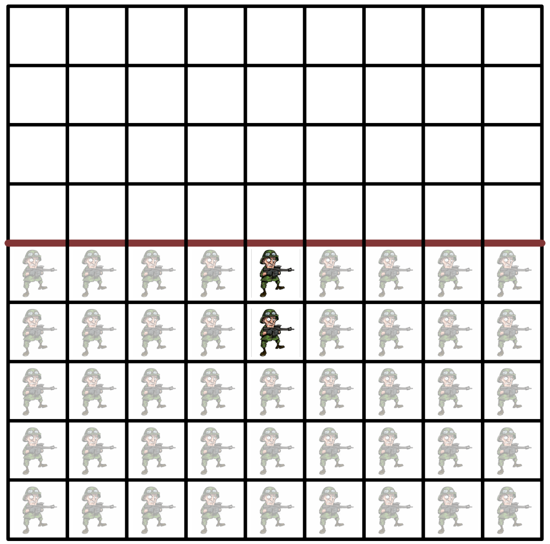
Szoliter

Szeges szoliter



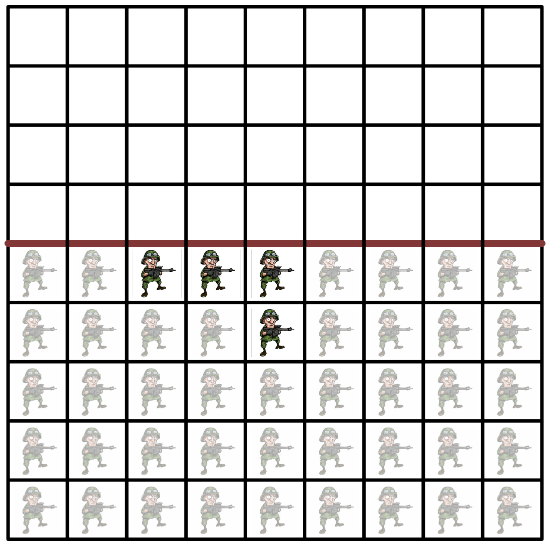
Szoliterhadsereg a sakktáblán

Kérdés: Hány katonát kell mozgósítani, hogy eljussunk az 1. sorba?
Válasz: Kettőt.



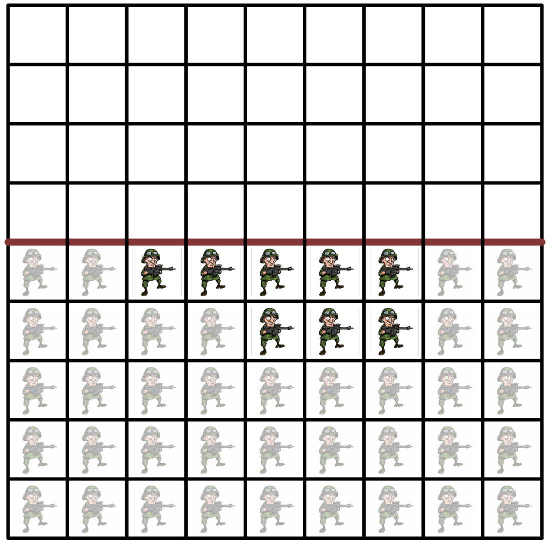
Szoliterhadsereg a sakktáblán

Kérdés: Hány katonát kell mozgósítani, hogy eljussunk a 2. sorba?
Válasz: Négyet.



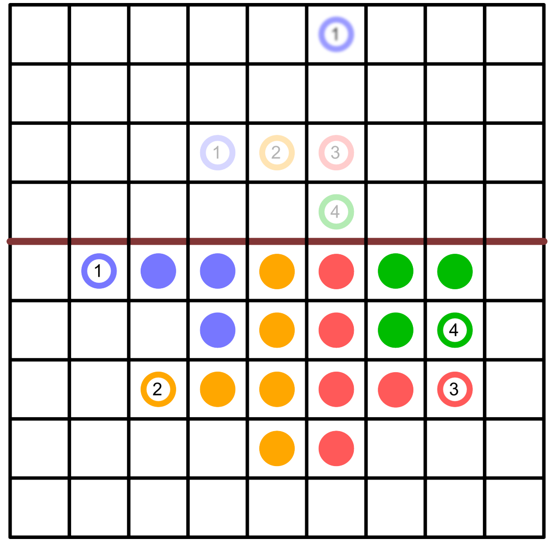
Szoliterhadsereg a sakktáblán

Kérdés: Hány katonát kell mozgósítani, hogy eljussunk a 3. sorba?
Válasz: Nyolcat.



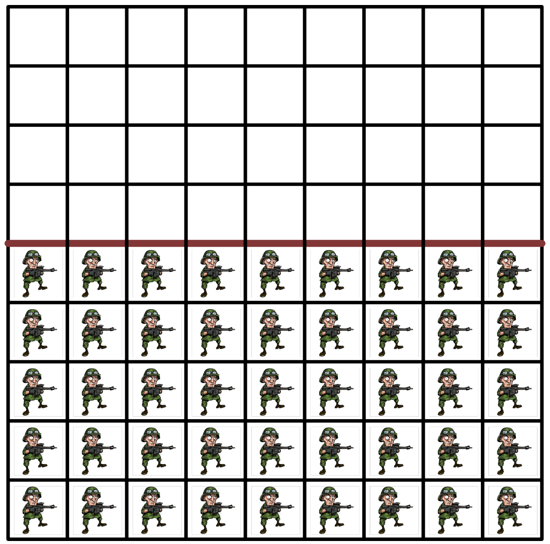
Szoliterhadsereg a sakktáblán

Kérdés: Hány katonát kell mozgósítani, hogy eljussunk a 4. sorba?
Válasz: Húszat.



Szoliterhadsereg a sakktáblán

Kérdés: Hány katonát kell mozgósítani, hogy eljussunk az 5. sorba?
Válasz: Végtelen sok sem elég!



Szoliterkatona az ötödik sorban?

Tétel (Conway)

A szoliterkatonák nem tudnak eljutni az ötödik sorba.

Biz.

Tegyük fel, hogy eljutott egy szoliterkatona az ötödik sor valamelyik négyzetébe. Írjunk ebbe a négyzetbe egy 1-est, a vele szomszédos négyzetekbe σ-t, az ezekkel szomszédos négyzetekbe σ^2-et, és így tovább. Tehát egy tetszőleges négyzetbe akkor kerül σ^n, ha az ötödik sorbeli elfoglalt négyzettől mért *Manhattan-távolsága* éppen n.

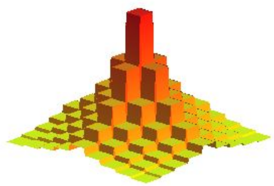
Itt $\sigma = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0,62$ az aranymetszés aránya. Elég azt tudni, hogy

$$\sigma^2 + \sigma = 1 \quad \text{és} \quad 0 < \sigma < 1.$$

Egy állás *súlyán* az elfoglalt négyzetekbe írt számok összegét értjük.

Pagodafüggvény

σ^4	σ^3	σ^2	σ	1	σ	σ^2	σ^3	σ^4
σ^5	σ^4	σ^3	σ^2	σ	σ^2	σ^3	σ^4	σ^5
σ^6	σ^5	σ^4	σ^3	σ^2	σ^3	σ^4	σ^5	σ^6
σ^7	σ^6	σ^5	σ^4	σ^3	σ^4	σ^5	σ^6	σ^7
σ^8	σ^7	σ^6	σ^5	σ^4	σ^5	σ^6	σ^7	σ^8
σ^9	σ^8	σ^7	σ^6	σ^5	σ^6	σ^7	σ^8	σ^9
σ^{10}	σ^9	σ^8	σ^7	σ^6	σ^7	σ^8	σ^9	σ^{10}
σ^{11}	σ^{10}	σ^9	σ^8	σ^7	σ^8	σ^9	σ^{10}	σ^{11}
σ^{12}	σ^{11}	σ^{10}	σ^9	σ^8	σ^9	σ^{10}	σ^{11}	σ^{12}



Az állás súlya sosem nőhet

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline \sigma^{i+1} & \sigma^i & \\ \hline\end{array} \longrightarrow \begin{array}{|c|c|c|}\hline & & \sigma^{i-1} \\ \hline\end{array} \qquad \sigma^{i+1}+\sigma^i=\sigma^{i-1}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline & \sigma^i & \sigma^{i-1} \\ \hline\end{array} \longrightarrow \begin{array}{|c|c|c|}\hline \sigma^{i+1} & & \\ \hline\end{array} \qquad \sigma^i+\sigma^{i-1}>\sigma^{i+1}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline \sigma^{i+1} & \sigma^i & \\ \hline\end{array} \longrightarrow \begin{array}{|c|c|c|}\hline & & \sigma^{i+1} \\ \hline\end{array} \qquad \sigma^{i+1}+\sigma^i>\sigma^{i+1}$$

$$\begin{array}{|c|}\hline \\ \hline \sigma^i \\ \hline \sigma^{i+1} \\ \hline\end{array} \longrightarrow \begin{array}{|c|}\hline \sigma^{i-1} \\ \hline \\ \hline \\ \hline\end{array} \qquad \sigma^{i+1}+\sigma^i=\sigma^{i-1}$$

$$\begin{array}{|c|}\hline \sigma^{i-1} \\ \hline \sigma^i \\ \hline \\ \hline\end{array} \longrightarrow \begin{array}{|c|}\hline \\ \hline \\ \hline \sigma^{i+1} \\ \hline\end{array} \qquad \sigma^i+\sigma^{i-1}>\sigma^{i+1}$$

A kezdőállás súlya

Emlékeztető: $1+\sigma+\sigma^2+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\sigma^n=\frac{1}{1-\sigma}=\frac{1}{\sigma^2}$

$\cdots$	σ^9	σ^8	σ^7	σ^6	σ^5	σ^6	σ^7	σ^8	σ^9	$\cdots$
$\cdots$	σ^{10}	σ^9	σ^8	σ^7	σ^6	σ^7	σ^8	σ^9	σ^{10}	$\cdots$
$\cdots$	σ^{11}	σ^{10}	σ^9	σ^8	σ^7	σ^8	σ^9	σ^{10}	σ^{11}	$\cdots$
$\cdots$	σ^{12}	σ^{11}	σ^{10}	σ^9	σ^8	σ^9	σ^{10}	σ^{11}	σ^{12}	$\cdots$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
$\cdots$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\cdots$
$\cdots$	$\frac{\sigma^9}{\sigma^2}$	$\frac{\sigma^8}{\sigma^2}$	$\frac{\sigma^7}{\sigma^2}$	$\frac{\sigma^6}{\sigma^2}$	$\frac{\sigma^5}{\sigma^2}$	$\frac{\sigma^6}{\sigma^2}$	$\frac{\sigma^7}{\sigma^2}$	$\frac{\sigma^8}{\sigma^2}$	$\frac{\sigma^9}{\sigma^2}$	$\cdots$

$$\sigma^3+2\sigma^4+2\sigma^5+\cdots = \text{(folyt. köv.)}$$

Az ellentmondás

A kezdőállás súlya:

$$\begin{aligned}\sigma^3+2\sigma^4+2\sigma^5+\cdots &= \sigma^3+\sigma^4+\sigma^5+\cdots \quad + \quad \sigma^4+\sigma^5+\sigma^6+\cdots \\ &= \sigma^3\left(1+\sigma+\sigma^2+\cdots\right) \quad + \quad \sigma^4\left(1+\sigma+\sigma^2+\cdots\right) \\ &= \frac{\sigma^3}{\sigma^2}+\frac{\sigma^4}{\sigma^2} = \sigma+\sigma^2 \quad = \quad 1.\end{aligned}$$

Az 5. sorba való betöréskor az állás súlya: $1 \ + \ \infty$ sok pozitív szám > 1.

A súly a lépések során sosem nőtt.

$\square$