Rontom-bontom játékok

Rontom-bontom játékok

Néhány kupac kaviccsal játszunk. Egy lépésben egy kupacot lehet

- bontani (elvenni belőle néhány kavicsot),
- rontani (két részre szétszedni),
- vagy bontani és rontani is

bizonyos, a játékszabályban rögzített megkötésekkel.

Kivonási játékok

A kivonási játékok olyan speciális rontom-bontom játékok, ahol rontani nem lehet, csak bontani. Pontosabban: egy kivonási játékot a $K \subseteq \mathbb{N}$ kivonási halmazával adhatunk meg.

- állások: $P = \mathbb{N}_0$
- lépések: $(p, q) \in L \iff p - q \in K \iff \exists a \in K : q = p - a$
- végállások: $N = \{0, \dots, \min K - 1\}$

Példák:

- Bachet-játék: $K = \{1, \dots, 10\}$
- mini Bachet-játék: $K = \{1, 2\}$

A SG-függvény kiszámítási szabálya:

$$\gamma(n) = \mathrm{mex}\{\gamma(n-a) \mid a \in K \text{ és } a \leq n\}.$$

Grundy-léc

Kivonási játékok

$K = \{2, 6\}$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
$\gamma(n)$	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1

$K = \{2, 5\}$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
$\gamma(n)$	0	0	1	1	0	2	1	0	0	1	1	0	2	1	0	0	1	1	0	2

$K = \{1, 3, 4\}$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
$\gamma(n)$	0	1	0	1	2	3	2	0	1	0	1	2	3	2	0	1	0	1	2	3

$K = \{2, 4, 7\}$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
$\gamma(n)$	0	0	1	1	2	2	0	3	1	0	2	1	0	2	1	0	2	1	0	2

Kivonási játékok

$K = \{1, 4, 9, 16, 25, 36, \ldots\}$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
$\gamma(n)$	0	1	0	1	2	0	1	0	1	2	0	1	0	1	2	0	1	0	1	2

$K = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, \ldots\}$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
$\gamma(n)$	0	0	1	1	2	2	3	3	4	0	0	1	1	2	2	3	3	4	4	5

Véges kivonási halmaz

Tétel

Véges kivonási halmaz esetén a kivonási játék SG-függvénye periodikus.

Biz.

Legyenek a kivonható számok: $a_1 < \cdots < a_k$. Nevezzük az $n \geq a_k$ szám előzményének az

$$\mathrm{EL}(n) = (\gamma(n-a_k), \gamma(n-a_k+1), \ldots, \gamma(n-2), \gamma(n-1))$$

vektort.

1. A γ függvény korlátos: $\forall n \in \mathbb{N}_0 : \gamma(n) \leq k$.
2. $\exists a_k \leq n < m : \mathrm{EL}(n) = \mathrm{EL}(m)$
3. $\mathrm{EL}(x) = \mathrm{EL}(y) \implies \gamma(x) = \gamma(y)$ és $\mathrm{EL}(x+1) = \mathrm{EL}(y+1)$
4. A γ függvény periodikus: $\forall x \geq n : \gamma(x) = \gamma(x+m-n)$

□

Véges kivonási halmaz

Tétel

Ha $K = \{a, b\}$, akkor a kivonási játék SG-függvénye szigorúan periodikus, és a periódus hossza legfeljebb $a + b$.

Biz.

A táblán.

□

Emlékeztető:

- $K = \{1, 2\}$ esetén a periódus 3
- $K = \{1, \ldots, 10\}$ esetén a periódus 11

Tétel (Althöfer, Bültermann):

- $K = \{1, 8, 31, 38, 39\}$ esetén a periódus 11 757
- $K = \{2, 16, 61, 75, 77\}$ esetén a periódus 3 539 830
- $K = \{3, 24, 91, 112, 115\}$ esetén a periódus 17 987 570 846

$K = \{2, 3, 9\}$

KöMaL 1997/12

F. 3204. *Két játékos a következő játékot játssza:* 923^k *darab kavicsból felváltva elvesznek* 9 *vagy* 2 *vagy* 3 *kavicsot. Az veszít, aki már nem tud így elvenni. Van-e valamelyik játékosnak nyerő stratégiája?*

Javasolta: ***Vörös Zoltán***, Budapest

Megoldás. Tekintsük a következő két halmazt:

$$S = \{2, 3, 4, 7, 8, 9, 10\}, \qquad R = \{0, 1, 5, 6\}.$$

Legyen a t-edik lépés után megmaradó kavicsok száma n_t, az n_t 11-gyel való osztási maradéka pedig m_t.

Nézzük azt az esetet, amikor $m_t \in S$. Ha $m_t \in \{2, 3, 7, 8\}$, akkor $n_t \geqslant 2$. Ekkor 2 kavicsot elvéve a halmazból, azt kapjuk, hogy $m_{t+1} \in R$.

$m_t \in \{4, 9\}$ esetén $n_t \geqslant 4$, így ha 3 kavicsot veszünk el a halmazból, akkor $m_{t+1} \in$ $\in R$. Egyetlen eset marad hátra: $m_t = 10$. Ekkor 9 kavicsot elvéve a halmazból, kapjuk, hogy $m_{t+1} \in R$. Tehát ha $m_t \in S$, akkor mindig tudunk úgy lépni, hogy $m_{t+1} \in R$ legyen. Könnyen látható, hogy ha $m_t \in R$, akkor bármit lépünk, mindenképpen $m_{t+1} \in S$. Összefoglalva: $m_0 \in S$ esetén a kezdő tud úgy játszani, hogy minden lépése előtt a kavicsok számának 11-es maradéka az S halmazba essen. Így ő mindig tud lépni, tehát ekkor

228

Grundy-nim

A Grundy-nim olyan rontom-bontom játék, ahol csak rontani szabad: az egyik kupacot ketté lehet osztani, de csak két *különböző méretű* kupacra. Formálisan:

- kezdőállás: $n \in \mathbb{N}$ (egyetlen kupac kavics n db kaviccsal)
- állások: pozitív egészekből álló véges sorozatok
- lépések: $(n_1, \dots, n_{i-1}, n_i, n_{i+1}, \dots, n_k) \to (n_1, \dots, n_{i-1}, a, b, n_{i+1}, \dots, n_k)$, ahol $a + b = n_i$ és $a \neq b$
- végállások: $(n_1, \dots, n_k) \in N \iff \forall i : n_i = 1$ vagy $n_i = 2$

Ha a játszma az $(n_1, \dots, n_k)$ állásnál tart, akkor gondolhatjuk azt, hogy éppen most kezdjük k db Grundy-nim összegét játszani, rendre $n_1, \dots, n_k$ kezdőállásokkal. Ezért $\gamma(n_1, \dots, n_k) = \gamma(n_1) \oplus \dots \oplus \gamma(n_k)$.

Grundy-nim

$$\gamma(n_1, \dots, n_k) = \gamma(n_1) \oplus \dots \oplus \gamma(n_k)$$

$$\begin{aligned} \gamma(n) &= \text{mex}\{\gamma(a, b) \mid a + b = n, a \neq b\} \\ &= \text{mex}\{\gamma(a) \oplus \gamma(b) \mid a + b = n, a < b\} \end{aligned}$$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$\gamma(n)$	0	0	1	0	2	1	0	2	1	0	2	1	3	2	1	3	2	4

$$\begin{aligned} \gamma(10) &= \text{mex}\{\gamma(1) \oplus \gamma(9), \gamma(2) \oplus \gamma(8), \gamma(3) \oplus \gamma(7), \gamma(4) \oplus \gamma(6)\} \\ &= \text{mex}\{0 \oplus 1, 0 \oplus 2, 1 \oplus 0, 0 \oplus 1\} \\ &= \text{mex}\{1, 2, 1, 1\} = 0 \end{aligned}$$

Grundy-nim

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$\gamma(n)$	0	0	1	0	2	1	0	2	1	0	2	1	3	2	1	3	2	4

Kérdés: Mi a jó lépés a 18 állásból?

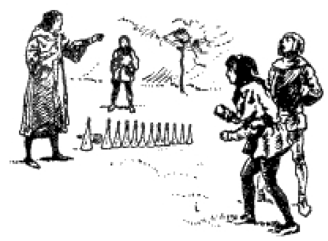
Válasz: $(3, 15)$ és $(6, 12)$.

Kérdés: Mik a jó állások?

Sejtés: γ periodikus (valahonnan kezdve).

Matematikai kugli (Kayles)

Henry E. Dudeney (1857–1930)



Egyszerre egy vagy két (szomszédos) bábut tudunk leütni.
Aki az utolsót leüti, az nyer.

Matematikai kugli (Kayles)

$$\gamma(n_1, \ldots, n_k) = \gamma(n_1) \oplus \cdots \oplus \gamma(n_k)$$

$$\begin{aligned}\gamma(n) &= \text{mex}\,\{\gamma(n-1)\,,\gamma(n-2)\,,\gamma(a,b) \mid a+b=n-1, n-2\} \\ &= \text{mex}\,\{\gamma(n-1)\,,\gamma(n-2)\,,\gamma(a)\oplus\gamma(b) \mid a+b=n-1, n-2\}\end{aligned}$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
$\gamma(n)$	0	1	2	3	1	4	3	2	1	4	2	6	4	1	2	7	1	4

$$\begin{aligned}\gamma(9) = \text{mex}\{&\gamma(8)\,,\gamma(1)\oplus\gamma(7)\,,\gamma(2)\oplus\gamma(6)\,,\gamma(3)\oplus\gamma(5)\,,\gamma(4)\oplus\gamma(4)\,, \\ &\gamma(7)\,,\gamma(1)\oplus\gamma(6)\,,\gamma(2)\oplus\gamma(5)\,,\gamma(3)\oplus\gamma(4)\} \\ = \text{mex}\,&\{1, 1\oplus 2, 2\oplus 3, 3\oplus 4, 1\oplus 1, 2, 1\oplus 3, 2\oplus 4, 3\oplus 1\} \\ = \text{mex}\,&\{1,3,1,7,0,2,2,6,2\} = \text{mex}\,\{0,1,2,3,6,7\} = 4\end{aligned}$$

Matematikai kugli (Kayles)

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
$\gamma(n)$	0	1	2	3	1	4	3	2	1	4	2	6	4	1	2	7	1	4

Kérdés: Mi a jó lépés a 17 állásból?

Válasz: $(2, 14)$ és $(8, 8)$.

Tétel: γ periodikus (71-től kezdve): $\forall n \geq 71 : \gamma(n) = \gamma(n+12)$.

Állítás: $\gamma(n) = 0 \iff n = 0$, tehát a végállás kivételével minden állás rossz. (Tükrözéssel trükközve a kezdő mindig nyerni tud.)

További rontom-bontom játékok

Dawson-sakk, oktális játékok: lásd a 3.5. és 3.6. alfejezeteket.

A 0,16 oktális számmal kódolt játék szabálya:

- 1-elemű kupac: el lehet venni;
- 2-elemű kupac: nem szabad hozzányúlni;
- legalább 3-elemű kupac: kettőt kell elvenni, és a maradékot ketté szabad osztani.

$n \geq 3$ esetén $\gamma(n) = \text{mex}\,\{\gamma(n-2)\,,\gamma(a)\oplus\gamma(b) \mid a+b=n-2\}$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
$\gamma(n)$	0	1	0	0	1	2	2	1	4	0	1	4	2	1	4	0	1	4

Kérdés: Mi a jó lépés a 10 állásból?

Válasz: $(1, 7)$ és $(4, 4)$.

Tétel (Gangolli, Plambeck): $\exists N\ \forall n \geq N : \gamma(n) = \gamma(n+149459)$.