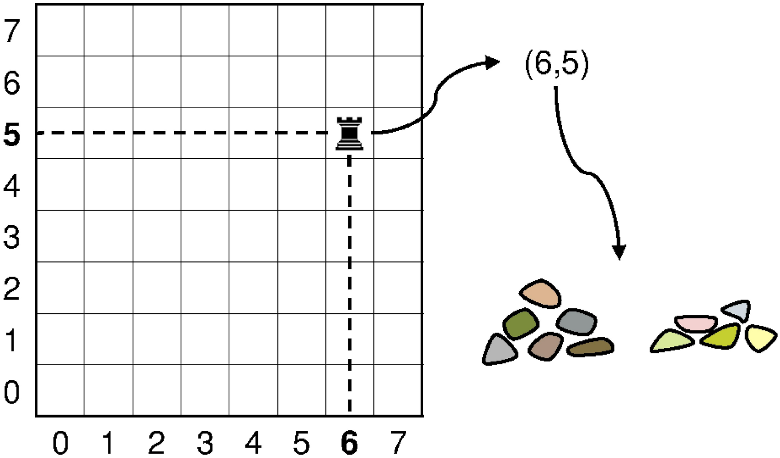
Nim-összeadás, játékok összege

Sarokba a bástyát! $\cong$ nim



Nim (két csomóval)

Két kupac kaviccsal játszunk. Egy lépésben valamelyikből (de csak az egyikből!) elvehetünk bármennyit. Az nyer, aki az utolsó kavicsot elveszi. Nyerő stratégia: törekedjünk szimmetriára!

Formálisan:

- $P = \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$
- $\big((p_1, p_2)\ ,\ (q_1, q_2) \big) \in L$ akkor és csak akkor, ha

$$p_1 > q_1 \text{ és } p_2 = q_2 \quad \text{vagy} \quad p_1 = q_1 \text{ és } p_2 > q_2$$

- $N = \{(0, 0)\}$

Mag: $M = \{(p, p) : p \in \mathbb{N}_0\}$.

$\gamma\big((p, q) \big) = \ ?$

Nim-összeadás

7	7	6	5	4	3	2	1	0
6	6	7	4	5	2	3	0	1
5	5	4	7	6	1	0	3	2
4	4	5	6	7	0	1	2	3
3	3	2	1	0	7	6	5	4
2	2	3	0	1	6	7	4	5
1	1	0	3	2	5	4	7	6
0	0	1	2	3	4	5	6	7
	0	1	2	3	4	5	6	7

$$6 \oplus 5 = 3$$

szabályosságok a táblázatban

Nim-összeadás

A nim-összeadást tehát a kétcsomós nim játék SG-függvénye segítségével definiáljuk: $a \oplus b := \gamma\,(a, b)$.

A SG-függvény definíciója (és unicitása) alapján a nim-összeadást egyértelműen meghatározza az alábbi összefüggés:

$$\forall a, b \in \mathbb{N}_0 : \; a \oplus b = \operatorname{mex}\big(\, \{a' \oplus b \mid a' < a\} \cup \{a \oplus b' \mid b' < b\}\,\big). \quad (\star)$$

A mex operátor definíciója szerint $(\star)$ a következőt jelenti:

1. $a' < a \implies a' \oplus b \neq a \oplus b$ és $b' < b \implies a \oplus b' \neq a \oplus b$ (kancellativitás)
2. $c < a \oplus b \implies \exists a' < a : a' \oplus b = c$ vagy $\exists b' < b : a \oplus b' = c$ (nim-monotonitás)

Kancellatív és nim-monoton művelet(ek)

Tétel

Egyetlen kancellatív és nim-monoton művelet létezik a nemnegatív egész számok halmazán, éspedig a nim-összeadás.

Biz.

Az előző oldalon! $\square$

Tétel

A bináris összeadás kancellatív és nim-monoton művelet.

Biz.

A következő oldalon! $\square$

Következmény

A nim-összeadás megegyezik a bináris összeadással.

Bináris összeadás

Jelöljük az $a \in \mathbb{N}_0$ szám kettes számrendszerbeli alakjában az i-edik (pontosabban a 2^i helyiértéken álló) számjegyet a_i-vel:

$$a = \overline{a_m \cdots a_2 a_1 a_0} = a_0 + 2 \cdot a_1 + 4 \cdot a_2 + \cdots = \sum 2^i \cdot a_i \qquad (a_i \in \{0, 1\}) .$$

Az a és b számok $a \circ b$ bináris összegét számjegyenként számítjuk ki:

$$(a \circ b)_i = a_i \circ b_i = a_i + b_i \bmod 2.$$

Tétel

A bináris összeadás kancellatív és nim-monoton művelet.

Biz.

A kancellativitás rögtön következik abból, hogy $\circ$ csoportművelet. dir.hatv.,Δ
Konkrétabban: ha $a' \circ b = a \circ b$, akkor

$$a' = a' \circ 0 = a' \circ (b \circ b) = (a' \circ b) \circ b = (a \circ b) \circ b = a \circ (b \circ b) = a \circ 0 = a.$$

A bináris összeadás nim-monoton

Tétel

A bináris összeadás kancellatív és nim-monoton művelet.

Biz. (folyt.) példa

Tfh. $c < a \circ b$, és tfh. balról az első eltérés c és $a \circ b$ kettes számrendszerbeli alakjában a 2^k helyiértéknél lép fel:

$$c_k \neq (a \circ b)_k \quad \text{és} \quad \forall i > k : c_i = a_i \circ b_i.$$

Tehát $c_k = 0$ és $(a \circ b)_k = 1$, így $a_k \neq b_k$. Aámntfh. $a_k = 1$ és $b_k = 0$.
Legyen $a' = c \circ b$. Ekkor $a' \circ b = (c \circ b) \circ b = c \circ (b \circ b) = c \circ 0 = c$.✓
Ellenőriznünk kell még, hogy $a' < a$:

$$(a')_k = c_k \circ b_k = 0 \circ 0 = 0$$

$$\forall i > k : \ (a')_i = c_i \circ b_i = (a_i \circ b_i) \circ b_i = a_i \circ (b_i \circ b_i) = a_i \circ 0 = a_i. \ \checkmark$$

□

Játékok összege

Játsszuk egyszerre a $\mathcal{J}_1 = (P_1, L_1, N_1)$ és $\mathcal{J}_2 = (P_2, L_2, N_2)$ játékokat úgy, hogy a soron következő játékos mindig *az egyikben* tesz egy lépést.

Ezt a játékot nevezzük $\mathcal{J}_1$ és $\mathcal{J}_2$ összegének.

Formálisan: $\mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2 = (P_1 \times P_2, L_1 + L_2, N_1 \times N_2)$,
ahol $\big((p_1, p_2)\ ,\ (q_1, q_2) \big) \in L_1 + L_2$ akkor és csak akkor, ha

$$(p_1, q_1) \in L_1 \text{ és } p_2 = q_2 \quad \text{vagy} \quad p_1 = q_1 \text{ és } (p_2, q_2) \in L_2.$$

Példa: Ha $\mathcal{B}$ jelöli az egycsomós nim játékot (korlát nélküli Bachet-játék), akkor a kétcsomós nim $\mathcal{B} + \mathcal{B}$, a háromcsomós nim pedig $\mathcal{B} + \mathcal{B} + \mathcal{B}$.

Jó lenne, ha az összeg SG-függvényét ki tudnánk számolni az összeadandók SG-függvényeiből.
(Az világos, hogy $\gamma_{\mathcal{B}}$ az identikus függvény.)

Összegjáték SG-függvénye

Tétel

Legyen a $\mathcal{J}$ és $\tilde{\mathcal{J}}$ egyszerű játékok SG-függvénye γ és $\tilde{\gamma}$. Ekkor a $\mathcal{J}+\tilde{\mathcal{J}}$ összegjáték SG-függvénye:

$$\gamma_{\mathcal{J}+\tilde{\mathcal{J}}}(p,\tilde{p}) = \gamma(p) \oplus \tilde{\gamma}(\tilde{p}).$$

Biz.

Azt kell belátnunk, hogy a $\gamma(p) \oplus \tilde{\gamma}(\tilde{p})$ függvény eleget tesz a SG-függvény definíciójának (a $\mathcal{J}+\tilde{\mathcal{J}}$ játékra nézve).

Ez a következőt jelenti: bármely $p \in P, \tilde{p} \in \tilde{P}$ esetén

$$\gamma(p) \oplus \tilde{\gamma}(\tilde{p}) = \mathrm{mex}\Big\{\gamma(q_1) \oplus \tilde{\gamma}(\tilde{p}), \ldots, \gamma(q_k) \oplus \tilde{\gamma}(\tilde{p}), \gamma(p) \oplus \tilde{\gamma}(\tilde{q}_1), \ldots, \gamma(p) \oplus \tilde{\gamma}(\tilde{q}_\ell)\Big\},$$

ahol $q_1, \ldots, q_k$ a p-ből egy lépésben elérhető állások (a $\mathcal{J}$ játékban), $\tilde{q}_1, \ldots, \tilde{q}_\ell$ pedig a $\tilde{p}$-ból egy lépésben elérhető állások (a $\tilde{\mathcal{J}}$ játékban).

Összegjáték SG-függvénye

Biz. (folyt.) Azt kell belátnunk, hogy

$$\gamma(p) \oplus \tilde\gamma(\tilde p) = \operatorname{mex}\{\ldots, \gamma(q_i) \oplus \tilde\gamma(\tilde p), \ldots, \gamma(p) \oplus \tilde\gamma(\tilde q_j), \ldots\} = \operatorname{mex} H.$$

Ez két dolgot jelent:

1. ? $\gamma(p) \oplus \tilde\gamma(\tilde p) \notin H$?

$$\gamma(p) = \operatorname{mex}\{\gamma(q_1), \ldots, \gamma(q_k)\} \overset{\text{mex}}{\Longrightarrow} \forall i : \gamma(p) \neq \gamma(q_i)$$
$$\overset{\text{kanc.}}{\Longrightarrow} \gamma(p) \oplus \tilde\gamma(\tilde p) \neq \gamma(q_i) \oplus \tilde\gamma(\tilde p)$$

(Hasonlóan $\forall j : \gamma(p) \oplus \tilde\gamma(\tilde p) \neq \gamma(p) \oplus \tilde\gamma(\tilde q_j)$.) ✓

2. ? $c < \gamma(p) \oplus \tilde\gamma(\tilde p) \implies c \in H$?

$$c < \gamma(p) \oplus \tilde\gamma(\tilde p) \overset{\text{nim.mon.}}{\Longrightarrow} \exists a' < \gamma(p) : c = a' \oplus \tilde\gamma(\tilde p) \quad (\text{vagy } \exists b' \ldots)$$
$$\overset{\text{mex}}{\Longrightarrow} \exists i : a' = \gamma(q_i)$$
$$\Longrightarrow c = a' \oplus \tilde\gamma(\tilde p) = \gamma(q_i) \oplus \tilde\gamma(\tilde p) \in H$$ ✓

□

Többcsomós nim

A klasszikus, három csomóval játszott nim: $\mathcal{N} = \mathcal{B} + \mathcal{B} + \mathcal{B} = 3 \cdot \mathcal{B}$, ezért SG-függvénye:

$$\gamma_{\mathcal{N}}\left(a, b, c\right) = \gamma_{\mathcal{B}}\left(a\right) \oplus \gamma_{\mathcal{B}}\left(b\right) \oplus \gamma_{\mathcal{B}}\left(c\right) = a \oplus b \oplus c.$$

Általánosan, a k-csomós nimre

$$\gamma_{k \cdot \mathcal{B}}\left(a_1, \ldots, a_k\right) = a_1 \oplus \cdots \oplus a_k.$$

A jó állások tehát azok, amelyeknél a csomók méreteinek nim-összege 0.

Hogyan lehet megtalálni a jó lépést (egy nemnulla nim-összegű állásból)?

Többcsomós nim

Jó állása-e $(13, 42, 30, 43)$ a négycsomós nimnek? Ha nem, mi a jó lépés?

$$\begin{aligned}
a &= 001101_2 = 13 \\
b &= 101010_2 = 42 \\
c &= 011110_2 = 30 \\
d &= 101011_2 = 43 \\
s &= 010010_2 = 18 \neq 0 \implies (a, b, c, d) \text{ rossz állás}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a' &= b \oplus c \oplus d = s \oplus a = 31 > a & \quad (13, 42, 30, 43) &\nrightarrow (31, 42, 30, 43) \\
b' &= a \oplus c \oplus d = s \oplus b = 56 > b & \quad (13, 42, 30, 43) &\nrightarrow (13, 56, 30, 43) \\
c' &= a \oplus b \oplus d = s \oplus c = 12 < c & \quad (13, 42, 30, 43) &\rightarrow (13, 42, 12, 43) \ \checkmark \\
d' &= a \oplus b \oplus c = s \oplus d = 57 > d & \quad (13, 42, 30, 43) &\nrightarrow (13, 42, 30, 57)
\end{aligned}$$