

Nim-összeadás, játékok összege

Nim (két csomóval)

Két kupac kavicsal játszunk. Egy lépésben valamelyikből (de csak az egyikből!) elvehetünk bármennyit. Az nyer, aki az utolsó kavicsot elveszi. Nyerő stratégia: törekedjünk szimmetriára!

Formálisan:

- $P = \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$
- $((p_1, p_2), (q_1, q_2)) \in L$ akkor és csak akkor, ha

$$p_1 > q_1 \text{ és } p_2 = q_2 \quad \text{vagy} \quad p_1 = q_1 \text{ és } p_2 > q_2$$
- $N = \{(0, 0)\}$

Mag: $M = \{(p, p) : p \in \mathbb{N}_0\}$.

$\gamma((p, q)) = ?$

jó $\xrightarrow{\forall}$ rossz rossz $\xrightarrow{\exists}$ jó

$\gamma(p) = \text{mex}\{\gamma(q) \mid (p, q) \in L\}$

Nim-összeadás

7	7	6	5	4	3	2	1	0
6	6	7	4	5	2	3	0	1
5	5	4	7	6	1	0	3	2
4	4	5	6	7	0	1	2	3
3	3	2	1	0	7	6	5	4
2	2	3	0	1	6	7	4	5
1	1	0	3	2	5	4	7	6
0	0	1	2	3	4	5	6	7
	0	1	2	3	4	5	6	7

$$6 \oplus 5 = 3$$

szabályosságok a táblázatban

jó $\xrightarrow{\forall}$ rossz rossz $\xrightarrow{\exists}$ jó

$\gamma(p) = \text{mex}\{\gamma(q) \mid (p, q) \in L\}$

Nim-összeadás

A nim-összeadást tehát a kétcsomós nim játék SG-függvénye segítségével definiáljuk: $a \oplus b := \gamma(a, b)$.

A SG-függvény definíciója (és unicitása) alapján a nim-összeadást egyértelműen meghatározza az alábbi összefüggés:

$$\forall a, b \in \mathbb{N}_0 : a \oplus b = \text{mex}(\{a' \oplus b \mid a' < a\} \cup \{a \oplus b' \mid b' < b\}). \quad (*)$$

A mex operátor definíciója szerint (*) a következőt jelenti:

- 1 $a' < a \implies a' \oplus b \neq a \oplus b$ és $b' < b \implies a \oplus b' \neq a \oplus b$
(kancellativitás)
- 2 $c < a \oplus b \implies \exists a' < a : a' \oplus b = c$ vagy $\exists b' < b : a \oplus b' = c$
(nim-monotonitás)

jó $\xrightarrow{\forall}$ rossz rossz $\xrightarrow{\exists}$ jó

$\gamma(p) = \text{mex}\{\gamma(q) \mid (p, q) \in L\}$

Kancellatív és nim-monoton művelet(ek)

Tétel

Egyetlen kancellatív és nim-monoton művelet létezik a nemnegatív egész számok halmazán, éspedig a nim-összeadás.

Biz.

Az előző oldalon! □

Tétel

A bináris összeadás kancellatív és nim-monoton művelet.

Biz.

A következő oldalon! □

Következmény

A nim-összeadás megegyezik a bináris összeadással.

jó $\xrightarrow{\forall}$ rossz rossz $\xrightarrow{\exists}$ jó

$\gamma(p) = \text{mex}\{\gamma(q) \mid (p, q) \in L\}$

Bináris összeadás

Jelöljük az $a \in \mathbb{N}_0$ szám kettes számrendszerbeli alakjában az i -edik (pontosabban a 2^i helyiértéken álló) számjegyet a_i -vel:

$$a = \overline{a_m \cdots a_2 a_1 a_0} = a_0 + 2 \cdot a_1 + 4 \cdot a_2 + \cdots = \sum 2^i \cdot a_i \quad (a_i \in \{0, 1\}).$$

Az a és b számok $a \circ b$ bináris összegét számjegyenként számítjuk ki:

$$(a \circ b)_i = a_i \circ b_i = a_i + b_i \text{ mod } 2.$$

Tétel

A bináris összeadás kancellatív és nim-monoton művelet.

Biz.

A kancellativitás rögtön következik abból, hogy \circ csoportművelet. dir.hatv., Δ
Konkrétabban: ha $a' \circ b = a \circ b$, akkor

$$a' = a' \circ 0 = a' \circ (b \circ b) = (a' \circ b) \circ b = (a \circ b) \circ b = a \circ (b \circ b) = a \circ 0 = a.$$

jó $\xrightarrow{\forall}$ rossz rossz $\xrightarrow{\exists}$ jó

$\gamma(p) = \text{mex}\{\gamma(q) \mid (p, q) \in L\}$

A bináris összeadás nim-monoton

Tétel

A bináris összeadás kancellatív és nim-monoton művelet.

Biz. (folyt.) példa

Tfh. $c < a \circ b$, és tfh. balról az első eltérés c és $a \circ b$ kettes számrendszerbeli alakjában a 2^k helyiértéknél lép fel:

$$c_k \neq (a \circ b)_k \quad \text{és} \quad \forall i > k : c_i = a_i \circ b_i.$$

Tehát $c_k = 0$ és $(a \circ b)_k = 1$, így $a_k \neq b_k$. Aámtfh. $a_k = 1$ és $b_k = 0$.

Legyen $a' = c \circ b$. Ekkor $a' \circ b = (c \circ b) \circ b = c \circ (b \circ b) = c \circ 0 = c$. ✓

Ellenőriznünk kell még, hogy $a' < a$:

$$(a')_k = c_k \circ b_k = 0 \circ 0 = 0$$

$$\forall i > k : (a')_i = c_i \circ b_i = (a_i \circ b_i) \circ b_i = a_i \circ (b_i \circ b_i) = a_i \circ 0 = a_i. \quad \checkmark$$

□

jó $\xrightarrow{\forall}$ rossz rossz $\xrightarrow{\exists}$ jó

$\gamma(p) = \text{mex}\{\gamma(q) \mid (p, q) \in L\}$

Játékok összege

Játsszuk egyszerre a $\mathcal{J}_1 = (P_1, L_1, N_1)$ és $\mathcal{J}_2 = (P_2, L_2, N_2)$ játékokat úgy, hogy a soron következő játékos mindig az egyikben tesz egy lépést.

Ezt a játékot nevezzük \mathcal{J}_1 és \mathcal{J}_2 összegének.

Formálisan: $\mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2 = (P_1 \times P_2, L_1 + L_2, N_1 \times N_2)$, ahol $((p_1, p_2), (q_1, q_2)) \in L_1 + L_2$ akkor és csak akkor, ha

$$(p_1, q_1) \in L_1 \text{ és } p_2 = q_2 \quad \text{vagy} \quad p_1 = q_1 \text{ és } (p_2, q_2) \in L_2.$$

Példa: Ha \mathcal{B} jelöli az egycsomós nim játékot (korlát nélküli Bachet-játék), akkor a kétsomos nim $\mathcal{B} + \mathcal{B}$, a háromsomós nim pedig $\mathcal{B} + \mathcal{B} + \mathcal{B}$.

Jó lenne, ha az összeg SG-függvényét ki tudnánk számolni az összeadandók SG-függvényeiből.

(Az világos, hogy $\gamma_{\mathcal{B}}$ az identikus függvény.)

jó $\xrightarrow{\forall}$ rossz rossz $\xrightarrow{\exists}$ jó

$\gamma(p) = \text{mex}\{\gamma(q) \mid (p, q) \in L\}$

Összegjáték SG-függvénye

Tétel

Legyen a \mathcal{J} és $\tilde{\mathcal{J}}$ egyszerű játékok SG-függvénye γ és $\tilde{\gamma}$. Ekkor a $\mathcal{J} + \tilde{\mathcal{J}}$ összegjáték SG-függvénye:

$$\gamma_{\mathcal{J}+\tilde{\mathcal{J}}}(p, \tilde{p}) = \gamma(p) \oplus \tilde{\gamma}(\tilde{p}).$$

Biz.

Azt kell belátnunk, hogy a $\gamma(p) \oplus \tilde{\gamma}(\tilde{p})$ függvény eleget tesz a SG-függvény definíciójának (a $\mathcal{J} + \tilde{\mathcal{J}}$ játékra nézve).

Ez a következőt jelenti: bármely $p \in P, \tilde{p} \in \tilde{P}$ esetén

$$\gamma(p) \oplus \tilde{\gamma}(\tilde{p}) = \text{mex} \left\{ \gamma(q_1) \oplus \tilde{\gamma}(\tilde{p}), \dots, \gamma(q_k) \oplus \tilde{\gamma}(\tilde{p}), \right. \\ \left. \gamma(p) \oplus \tilde{\gamma}(\tilde{q}_1), \dots, \gamma(p) \oplus \tilde{\gamma}(\tilde{q}_\ell) \right\},$$

ahol q_1, \dots, q_k a p -ből egy lépésben elérhető állások (a \mathcal{J} játékban), $\tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_\ell$ pedig a \tilde{p} -ből egy lépésben elérhető állások (a $\tilde{\mathcal{J}}$ játékban).

jó $\xrightarrow{\forall}$ rossz rossz $\xrightarrow{\exists}$ jó

$$\gamma(p) = \text{mex} \{ \gamma(q) \mid (p, q) \in L \}$$

Összegjáték SG-függvénye

Biz. (folyt.) Azt kell belátnunk, hogy

$$\gamma(p) \oplus \tilde{\gamma}(\tilde{p}) = \text{mex} \{ \dots, \gamma(q_i) \oplus \tilde{\gamma}(\tilde{p}), \dots, \gamma(p) \oplus \tilde{\gamma}(\tilde{q}_j), \dots \} = \text{mex } H.$$

Ez két dolgot jelent:

① $?\gamma(p) \oplus \tilde{\gamma}(\tilde{p}) \notin H?$

$$\gamma(p) = \text{mex} \{ \gamma(q_1), \dots, \gamma(q_k) \} \xrightarrow{\text{mex}} \forall i : \gamma(p) \neq \gamma(q_i) \\ \xrightarrow{\text{kanç.}} \gamma(p) \oplus \tilde{\gamma}(\tilde{p}) \neq \gamma(q_i) \oplus \tilde{\gamma}(\tilde{p})$$

(Hasonlóan $\forall j : \gamma(p) \oplus \tilde{\gamma}(\tilde{p}) \neq \gamma(p) \oplus \tilde{\gamma}(\tilde{q}_j)$) ✓

② $?c < \gamma(p) \oplus \tilde{\gamma}(\tilde{p}) \implies c \in H?$

$$c < \gamma(p) \oplus \tilde{\gamma}(\tilde{p}) \xrightarrow{\text{nim.mon.}} \exists a' < \gamma(p) : c = a' \oplus \tilde{\gamma}(\tilde{p}) \quad (\text{vagy } \exists b' \dots) \\ \xrightarrow{\text{mex}} \exists i : a' = \gamma(q_i) \\ \implies c = a' \oplus \tilde{\gamma}(\tilde{p}) = \gamma(q_i) \oplus \tilde{\gamma}(\tilde{p}) \in H \quad \checkmark$$

□

jó $\xrightarrow{\forall}$ rossz rossz $\xrightarrow{\exists}$ jó

$$\gamma(p) = \text{mex} \{ \gamma(q) \mid (p, q) \in L \}$$

Többsomós nim

A klasszikus, három csomóval játszott nim: $\mathcal{N} = \mathcal{B} + \mathcal{B} + \mathcal{B} = 3 \cdot \mathcal{B}$, ezért SG-függvénye:

$$\gamma_{\mathcal{N}}(a, b, c) = \gamma_{\mathcal{B}}(a) \oplus \gamma_{\mathcal{B}}(b) \oplus \gamma_{\mathcal{B}}(c) = a \oplus b \oplus c.$$

Általánosan, a k -csomós nimre

$$\gamma_{k \cdot \mathcal{B}}(a_1, \dots, a_k) = a_1 \oplus \dots \oplus a_k.$$

A jó állások tehát azok, amelyeknél a csomók méreteinek nim-összege 0.

Hogyan lehet megtalálni a jó lépést (egy nemnulla nim-összegű állásból)?

jó $\xrightarrow{\forall}$ rossz rossz $\xrightarrow{\exists}$ jó

$$\gamma(p) = \text{mex} \{ \gamma(q) \mid (p, q) \in L \}$$

Többsomós nim

Jó állása-e (13, 42, 30, 43) a négycsomós nimnek? Ha nem, mi a jó lépés?

$$a = 001101_2 = 13 \\ b = 101010_2 = 42 \\ c = 011110_2 = 30 \\ d = 101011_2 = 43 \\ s = 010010_2 = 18 \neq 0 \implies (a, b, c, d) \text{ rossz állás}$$

$$a' = b \oplus c \oplus d = s \oplus a = 31 > a \quad (13, 42, 30, 43) \rightsquigarrow (31, 42, 30, 43) \\ b' = a \oplus c \oplus d = s \oplus b = 56 > b \quad (13, 42, 30, 43) \rightsquigarrow (13, 56, 30, 43) \\ c' = a \oplus b \oplus d = s \oplus c = 12 < c \quad (13, 42, 30, 43) \rightarrow (13, 42, 12, 43) \checkmark \\ d' = a \oplus b \oplus c = s \oplus d = 57 > d \quad (13, 42, 30, 43) \rightsquigarrow (13, 42, 30, 57)$$

jó $\xrightarrow{\forall}$ rossz rossz $\xrightarrow{\exists}$ jó

$$\gamma(p) = \text{mex} \{ \gamma(q) \mid (p, q) \in L \}$$