

Játékok, struktúrák, stratégiák

Nyerni akarunk!

Cél: nyerő stratégia keresése

- diszkrét,
- determinisztikus,
- teljes információs,
- kétszemélyes,
- normál (az nyer, aki az utolsó lépést teszi)

játékokban.

háromszemélyes Bachel; burkolt személytelen játékok

Játékok, mint matematikai struktúrák

Kétszemélyes normál definit játék: $\mathcal{J} = (P, L_1, L_2, p_0, N_1, N_2)$

- pozíciók: P nemüres halmaz
- lépések: $L_1, L_2 \subseteq P \times P$
- kezdőállás: $p_0 \in P$
- nyerő végállások: $N_1, N_2 \subseteq P$

$N_1 = \{p \in P \mid \nexists q \in P: (p, q) \in L_2\}$ (A nyert)

$N_2 = \{p \in P \mid \nexists q \in P: (p, q) \in L_1\}$ (B nyert)

Ha $L_1 = L_2$ (és így $N_1 = N_2$), akkor a játék szimmetrikus.

pozíció és állás; szimmetria; gráfjáték

Játékok, mint matematikai struktúrák

Egyszemélyes definit játék: $\mathcal{J} = (P, L, p_0, N)$

- pozíciók: P nemüres halmaz
- lépések: $L \subseteq P \times P$
- kezdőállás: $p_0 \in P$
- nyerő végállások: $N \subseteq P$

Személytelen definit játék: $\mathcal{J} = (P, L, p_0)$

- pozíciók: P nemüres halmaz
 - lépések: $L \subseteq P \times P$
 - kezdőállás: $p_0 \in P$
- $\forall p \in P \exists ! q \in Q: (p, q) \in L$, azaz $L: P \rightarrow P$ leképezés

Bachet játéka

Bachet játéka: $\mathcal{J} = (P, L_1, L_2, p_0, N_1, N_2)$, ahol

- $P = \{0, 1, \dots, 100\}$
- $L_1 = L_2 = \{(p, q) \mid p + 1 \leq q \leq p + 10\} \subseteq P \times P$
- $p_0 = 0$
- $N_1 = N_2 = \{100\}$

Kivonásos változat: $\mathcal{J}^* = (P^*, L_1^*, L_2^*, p_0^*, N_1^*, N_2^*)$, ahol

- $P^* = \{0, 1, \dots, 100\}$
- $L_1^* = L_2^* = \{(p, q) \mid p - 10 \leq q \leq p - 1\} \subseteq P \times P$
- $p_0^* = 100$
- $N_1^* = N_2^* = \{0\}$

Izomorfia

$\mathcal{J} = (P, L_1, L_2, p_0, N_1, N_2)$ és $\mathcal{J}^* = (P^*, L_1^*, L_2^*, p_0^*, N_1^*, N_2^*)$ izomorf játékok, ha létezik olyan $\varphi: P \rightarrow P^*$ leképezés, hogy

- φ bijektív
- $\forall p, q \in P: (p, q) \in L_1 \iff (\varphi(p), \varphi(q)) \in L_1^*$
- $\forall p, q \in P: (p, q) \in L_2 \iff (\varphi(p), \varphi(q)) \in L_2^*$
- $\varphi(p_0) = p_0^*$
- $\forall p \in P: p \in N_1 \iff \varphi(p) \in N_1^*$
- $\forall p \in P: p \in N_2 \iff \varphi(p) \in N_2^*$

Bachet játékanak eredeti, illetve kivonásos változata izomorf egymással: $\varphi: P \rightarrow P^*, n \mapsto 100 - n$ izomorfizmus \mathcal{J} és \mathcal{J}^* között.

Játszma

Játszma kétszemélyes játékban: $p_0, p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$

- $\forall i: p_i \in P$
- $2 \mid i \implies (p_i, p_{i+1}) \in L_1$
- $2 \nmid i \implies (p_i, p_{i+1}) \in L_2$
- $p_n \in N_1 \cup N_2$
(ha n páros, akkor B nyert, ha n páratlan, akkor A nyert)

Játszma egyszemélyes játékban: $p_0, p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$

- $\forall i: p_i \in P$
- $(p_i, p_{i+1}) \in L$
- $p_n \in N$ esetén siker, $p_n \notin N$ esetén kudarc

Játszma személytelen játékban: $p_0, p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$

- $\forall i: p_i \in P$
- $(p_i, p_{i+1}) \in L$, azaz $p_{i+1} = L(p_i)$

Végességi feltételek

A $\mathcal{J} = (P, L_1, L_2, p_0, N_1, N_2)$ játék

- véges, ha minden játszma véges;
- végesfokú, ha minden p állásra a $\{q \in P \mid (p, q) \in L_1 \cup L_2\}$ halmaz véges.

A p állás rendje:

- Ha a p -ből induló leghosszabb játszma n lépésből áll, akkor p rendje n . Jelölés: $o(p) = n$.
- Ha a p -ből induló játzsmák hosszának nincs felső korlátja (vagy p -ből indul végtelen játszma), akkor p rendje végtelen. Jelölés: $o(p) = \infty$.

König-lemma

Véges és végesfokú játékban minden állás véges rendű.

König Dénes lemmája

König-lemma

Véges és végesfokú játékokban minden állás véges rendű.

Biz.

Legyen \mathcal{J} véges, végesfokú játék, és t.f.h. a p állás rendje végtelen. Legyenek a p -ből egy lépésben elérhető állások q_1, \dots, q_k .

Ha ezek mind véges rendűek lennének, akkor

$$o(p) = 1 + \max\{o(q_1), \dots, o(q_k)\} < \infty. \quad \zeta$$

Tehát $\exists i : o(q_i) = \infty$. Ezzel beláttuk, hogy végtelen rendű állásból mindig lehet végtelen rendű állásba lépni.

Így a $p \rightarrow q_i \rightarrow \dots$ játszmat végtelen sokáig lehet folytatni. ζ □

Kombinatorikai játékok

- Kétszemélyes kombinatorikai játék: diszkrét, determinisztikus, teljes információs, véges
- Egyszerű játék: ... + normál, szimmetrikus, végesfokú
- Egyszemélyes kombinatorikai játék: diszkrét, determinisztikus, teljes információs, végesfokú
- Személytelen kombinatorikai játék: diszkrét, determinisztikus

Stratégia

Stratégia kétszemélyes kombinatorikai játékokban

- A számára: olyan $s_1 : P \setminus N_2 \rightarrow P$ leképezés, amelyre $\forall p \in P \setminus N_2 : (p, s_1(p)) \in L_1$
- B számára: olyan $s_2 : P \setminus N_1 \rightarrow P$ leképezés, amelyre $\forall p \in P \setminus N_1 : (p, s_2(p)) \in L_2$

Bachet: $10^{91} \cdot 9!$

Ha A és B előre megválasztják a stratégiájukat, akkor a játszma így zajlik:

$$p_0, s_1(p_0), s_2(s_1(p_0)), s_1(s_2(s_1(p_0))), \dots, p_n$$

stratégiai játékok, kő-papír-olló

Másrészt tetszőleges $p_0, p_1, p_2, \dots, p_n$ játszma előáll a fenti alakban olyan s_1, s_2 stratégiákkal, amelyekre

$$\begin{aligned} s_1(p_0) &= p_1, & s_1(p_2) &= p_3, & s_1(p_4) &= p_5, & \dots \\ s_2(p_1) &= p_2, & s_2(p_3) &= p_4, & s_2(p_5) &= p_6, & \dots \end{aligned}$$

Nyerő stratégia

- s_1 nyerő stratégia A-nak, ha B bármely s_2 stratégiája esetén nyerést biztosít A számára
- s_2 nyerő stratégia B-nek, ha A bármely s_1 stratégiája esetén nyerést biztosít B számára
- s_1 biztonságos stratégia A-nak, ha B bármely s_2 stratégiája esetén legalább döntetlent biztosít A számára
- s_2 biztonságos stratégia B-nek, ha A bármely s_1 stratégiája esetén legalább döntetlent biztosít B számára

Tétel (Neumann János 1928)

Kétszemélyes definit kombinatorikai játékokban

- valamelyik játékosnak van nyerő stratégiája, vagy pedig
- mindkét játékosnak van biztonságos stratégiája.

kifizetési mátrix

Tétel (Ralph Gasser 1994)

A malomban mindkét játékosnak van biztonságos stratégiája.