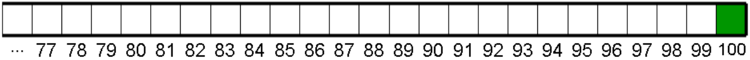
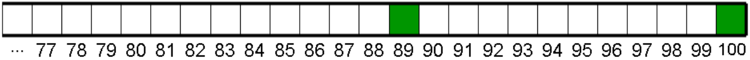
Egyszerű játék magja, Sprague–Grundy-függvénye

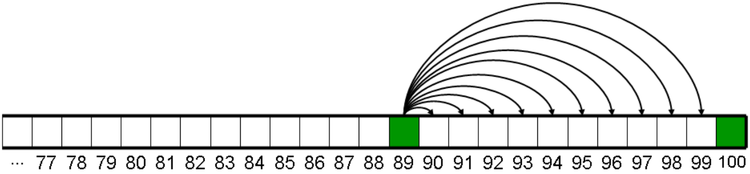
Bachet játéka



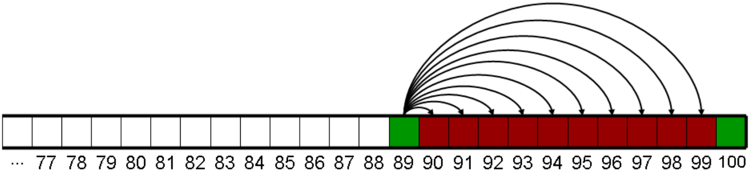
Bachet játéka



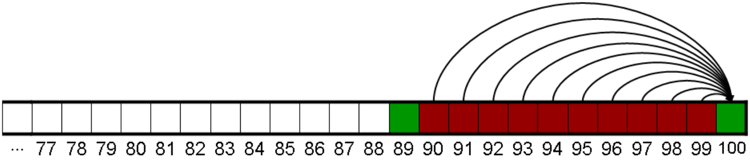
Bachet játéka



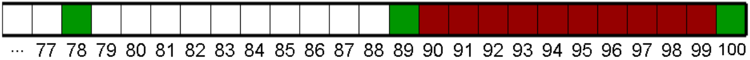
Bachet játéka



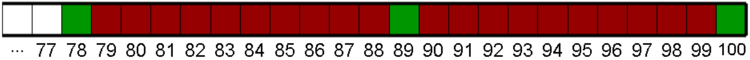
Bachet játéka



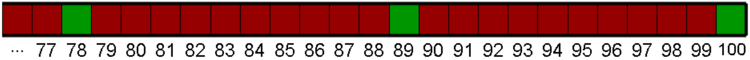
Bachet játéka



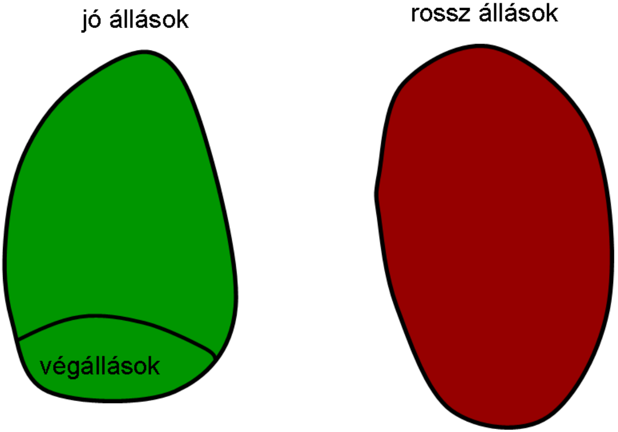
Bachet játéka



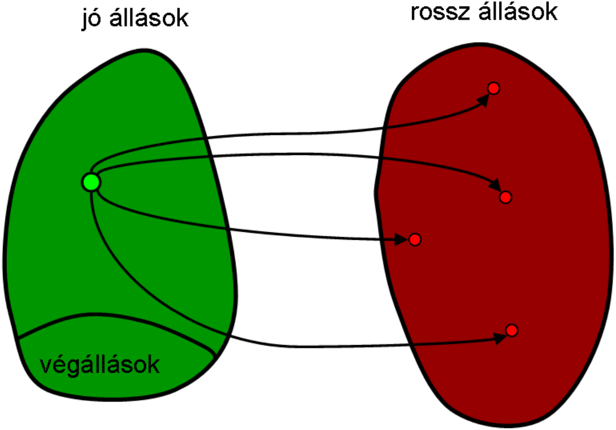
Bachet játéka



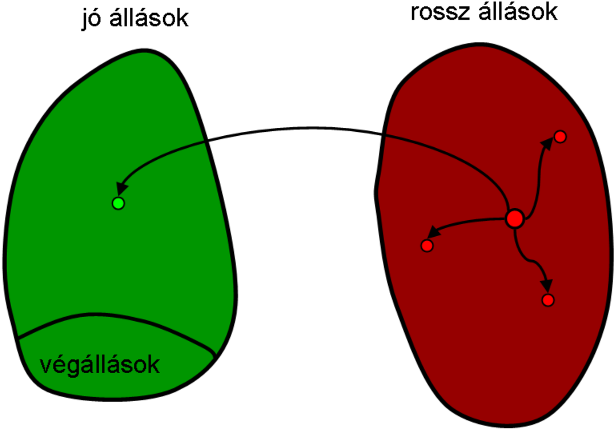
Jó és rossz állások



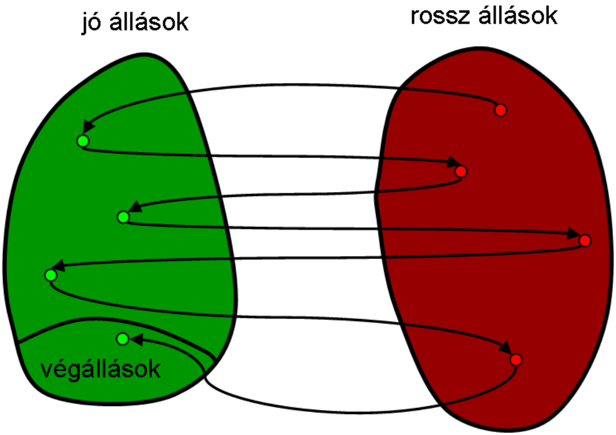
Jó állásból csak rossz állásba lehet lépni



Rossz állásból mindig lehet jó állásba lépni



A játszma menete



Egyszerű játék magja

Legyen $\mathcal{J} = (P, L, N)$ egyszerű játék.

Az $M \subseteq P$ halmazt a $\mathcal{J}$ játék magjának nevezzük, ha

- $N \subseteq M$;
- $\forall p \in M \;\; \forall q \in P\colon \; (p, q) \in L \implies q \in \overline{M}$;
- $\forall p \in \overline{M} \;\; \exists q \in M\colon \; (p, q) \in L$.

A nyerő stratégia: „Lépj mindig M-be!”

Ha $p_0 \notin M$, akkor A-nak, ha $p_0 \in M$, akkor B-nek van nyerő stratégiája.

$\implies$ A mag egyértelműen meghatározott (ha létezik egyáltalán).

A Sprague–Grundy-függvény

Legyen $H \subseteq \mathbb{N}_0$, például $H = \{0, 1, 2, 4, 6\}$.

- $\max H = 6$ (**max**imal)
- $\min H = 0$ (**min**imal)
- $\operatorname{mex} H = \min \overline{H} = 3$ (**m**inimal **ex**cluded)

A $\gamma \colon P \to \mathbb{N}_0$ függvényt a $\mathcal{J}$ játék Sprague–Grundy-függvényének nevezzük, ha

$$\forall p \in P \colon \gamma(p) = \operatorname{mex} \{\gamma(q) \mid (p, q) \in L\} .$$

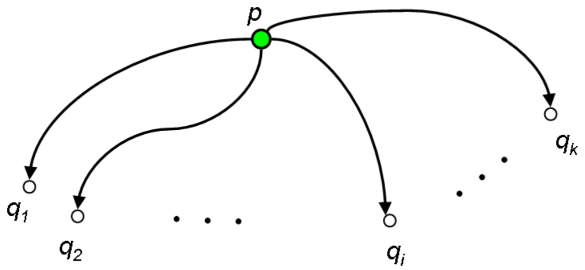
Tétel (Sprague 1935, Grundy 1939)

Tetszőleges $\mathcal{J}$ egyszerű játékhoz

1. létezik SG-függvény;
2. a SG-függvény egyértelmű;
3. a mag éppen a SG-függvény zérushelyeinek halmaza:

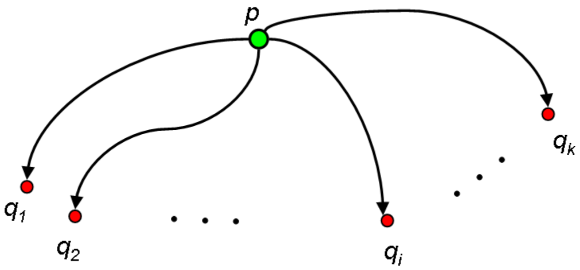
$$M = \{p \in P \mid \gamma(p) = 0\}.$$

3. Jó állásból csak rossz állásba lehet lépni



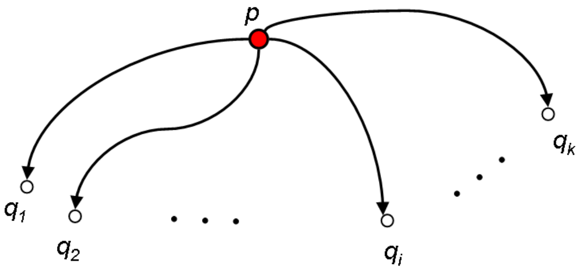
$$\gamma(p) = \text{mex}\{\gamma(q_1), \gamma(q_2), \ldots, \gamma(q_k)\} = 0$$

3. Jó állásból csak rossz állásba lehet lépni



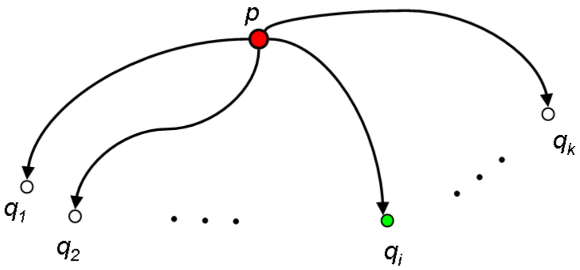
$$\gamma(p) = \text{mex}\{\gamma(q_1), \gamma(q_2), \ldots, \gamma(q_k)\} = 0 \implies \forall i\colon \gamma(q_i) \neq 0$$

3. Rossz állásból mindig lehet jó állásba lépni



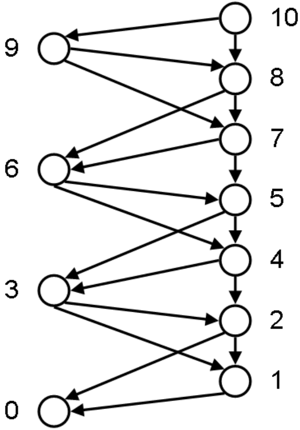
$$\gamma(p) = \operatorname{mex}\{\gamma(q_1), \gamma(q_2), \ldots, \gamma(q_k)\} \neq 0$$

3. Rossz állásból mindig lehet jó állásba lépni

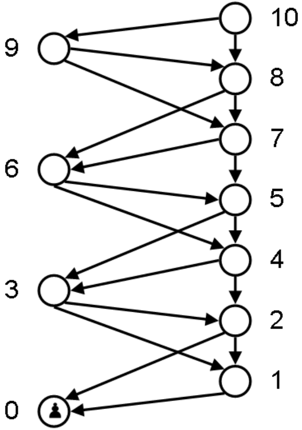


$$\gamma(p) = \operatorname{mex}\{\gamma(q_1), \gamma(q_2), \ldots, \gamma(q_k)\} \neq 0 \implies \exists i\colon \gamma(q_i) = 0$$

Mini Bachet-játék

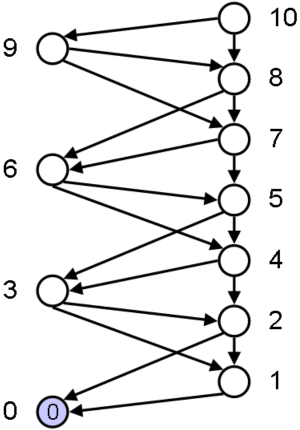


Mini Bachet-játék



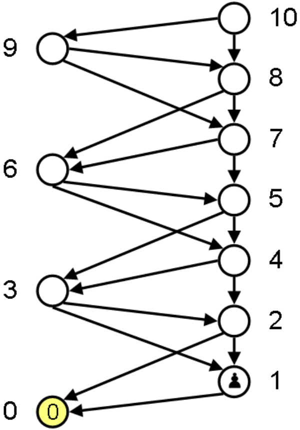
$$\text{mex } \emptyset = 0$$

Mini Bachet-játék



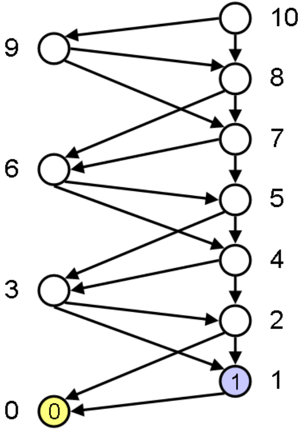
$\text{mex}\ \emptyset = 0$

Mini Bachet-játék



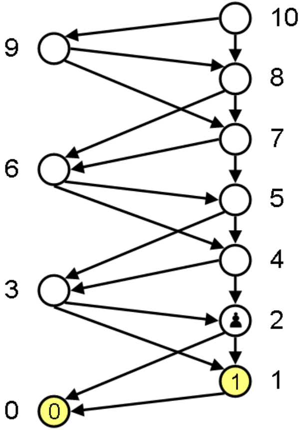
mex {0} = 1

Mini Bachet-játék



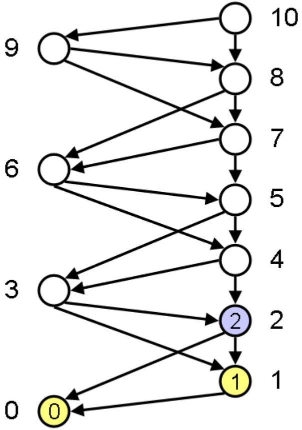
mex {0} = 1

Mini Bachet-játék



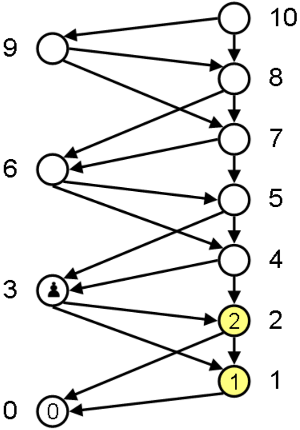
mex {0,1} = 2

Mini Bachet-játék



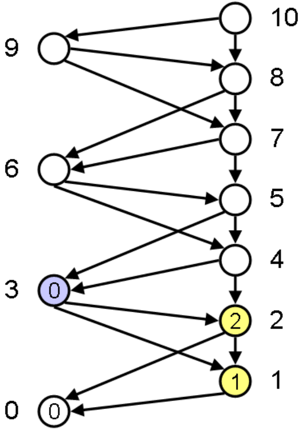
mex {0,1} = 2

Mini Bachet-játék



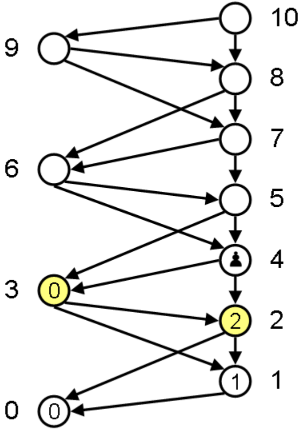
mex {1,2} = 0

Mini Bachet-játék



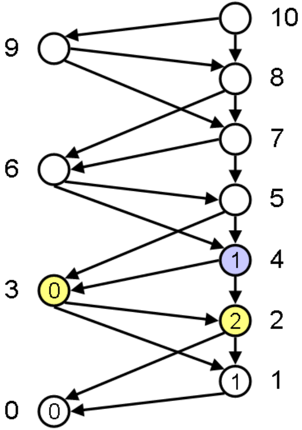
mex {1,2} = 0

Mini Bachet-játék



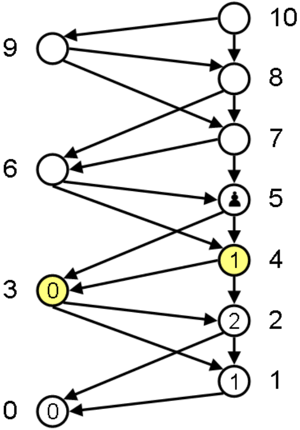
mex {0,2} = 1

Mini Bachet-játék



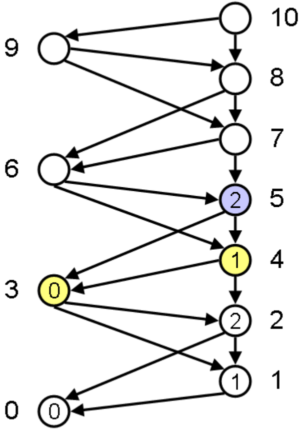
mex {0,2} = 1

Mini Bachet-játék



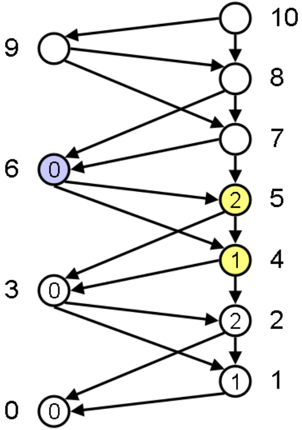
mex {0,1} = 2

Mini Bachet-játék



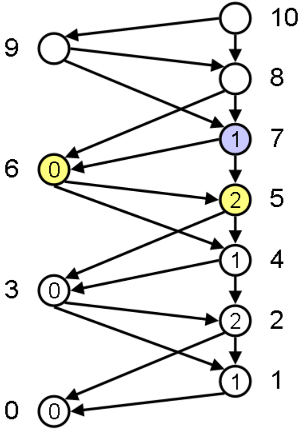
mex {0,1} = 2

Mini Bachet-játék



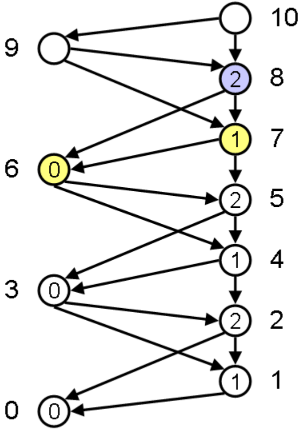
$$\operatorname{mex}\{1,2\} = 0$$

Mini Bachet-játék



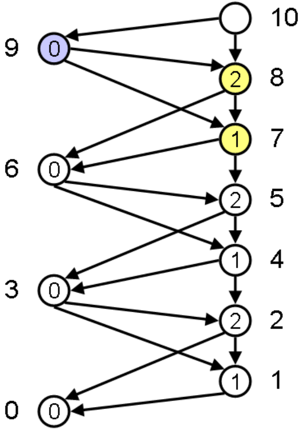
mex {0,2} = 1

Mini Bachet-játék



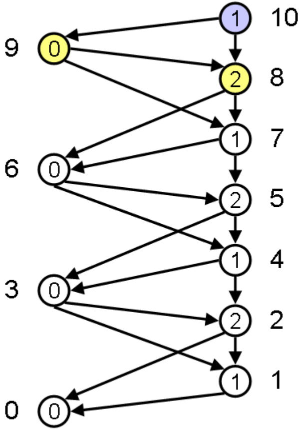
mex {0,1} = 2

Mini Bachet-játék



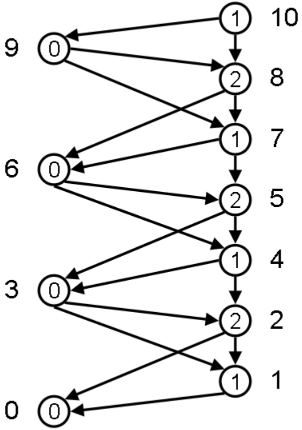
mex {1,2} = 0

Mini Bachet-játék



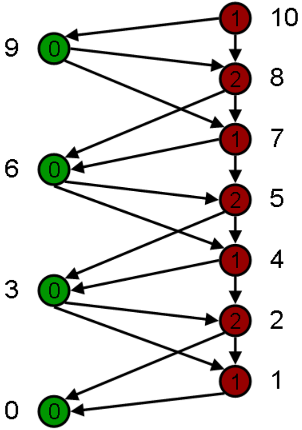
mex {0,2} = 1

Mini Bachet-játék



$\gamma(n) = n \bmod 3$

Mini Bachet-játék



n jó állás $\Leftrightarrow 3 \mid n$

1. A SG-függvény létezésének bizonyítása

Legyen $\mathcal{J} = (P, L, N)$ egyszerű játék.

Rekurzívan definiáljuk $\gamma(p)$ értékét:

- Ha $o(p) = 0$ (azaz p végállás), akkor legyen $\gamma(p) = 0$.
- Ha az n-nél kisebb rendű állásokon már definiált a γ függvény, és $o(p) = n$, akkor legyen $\gamma(p) = \operatorname{mex}\{\gamma(q) \mid (p, q) \in L\}$.
  (Az itt fellépő q állásokra $o(q) < n$, így $\gamma(q)$ már definiálva van.)

Mivel minden állás rendje véges, γ értékét az összes állásra definiáltuk.

Világos, hogy ez a γ függvény eleget tesz a SG-függvény definíciójának.

(Ha p végállás, akkor $\gamma(p) = 0 = \operatorname{mex} \emptyset = \operatorname{mex}\{\gamma(q) \mid (p, q) \in L\}$.)

2. A SG-függvény egyértelműségének bizonyítása

Legyen $\mathcal{J} = (P, L, N)$ egyszerű játék.

Tfh. γ_1 és γ_2 is SG-függvénye $\mathcal{J}$ -nek.

Rend szerinti indukcióval bizonyítjuk, hogy $\gamma_1(p) = \gamma_2(p)$ minden p állásra:

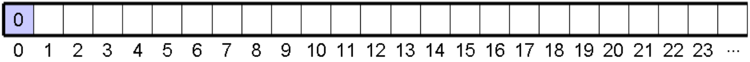
- Ha $o(p) = 0$ (azaz p végállás), akkor $\gamma_1(p) = \operatorname{mex} \emptyset = \gamma_2(p)$.
- Tfh. $\forall q \in P : \; o(q) < n \implies \gamma_1(q) = \gamma_2(q)$. (IH)
  Legyen $o(p) = n$, ekkor

  $$\gamma_1(p) \stackrel{\text{SG}}{=} \operatorname{mex}\{\gamma_1(q) \mid (p,q) \in L\} \stackrel{\text{IH}}{=} \operatorname{mex}\{\gamma_2(q) \mid (p,q) \in L\} \stackrel{\text{SG}}{=} \gamma_2(p).$$

  (A fenti q állásokra $o(q) < n$, így $\gamma_1(q) = \gamma_2(q)$ az IH szerint.)

$\square$

Bachet-játék



$$\text{mex}\,\emptyset = 0$$

Bachet-játék

0	1																							
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	⋯

$$\text{mex}\,\{0\} = 1$$

Bachet-játék

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	…
0	1	2																						

$$\text{mex}\,\{0,1\} = 2$$

Bachet-játék

0	1	2	3																					
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	...

$$\text{mex}\,\{0,1,2\} = 3$$

Bachet-játék

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10														
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	...

$$\text{mex}\,\{0,1,\ldots,9\} = 10$$

Bachet-játék

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	0													
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	...

$$\text{mex}\,\{1,2,\ldots,10\} = 0$$

Bachet-játék

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	0	1												
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	⋯

$$\text{mex}\ \{2,3,\ldots,10,0\} = \text{mex}\ \{0,2,3,\ldots,10\} = 1$$

Bachet-játék

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	0	1	2
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	...

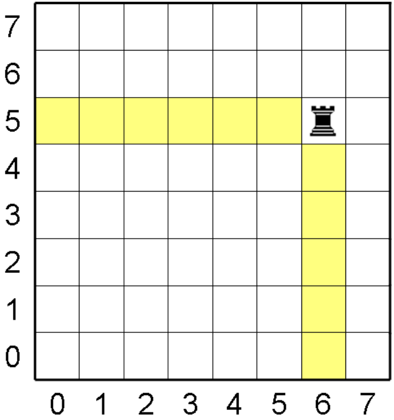
$$\gamma(n) = n \bmod 11$$

Bachet-játék

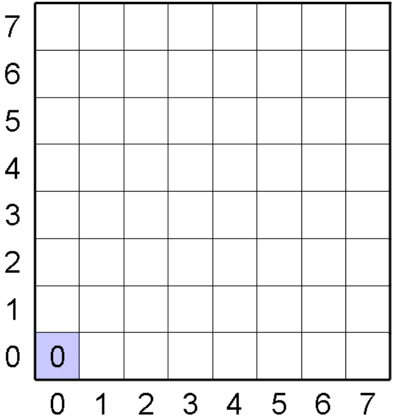
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	0	1	2
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	⋯

n jó állás $\Leftrightarrow 11 \mid n$

Sarokba a bástyát!

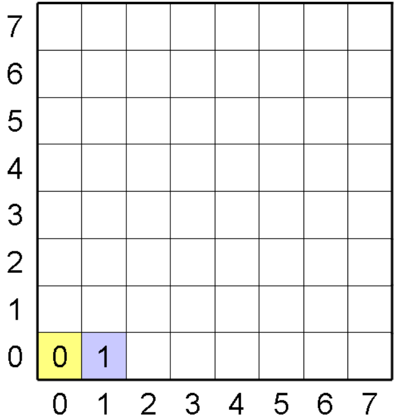


Sarokba a bástyát!



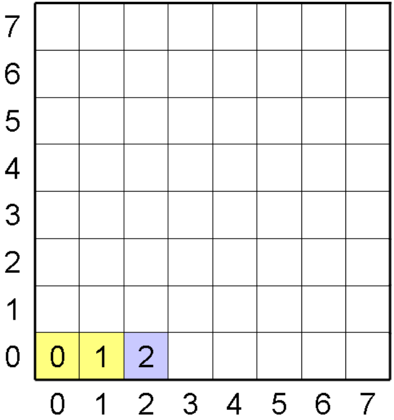
$$\operatorname{mex} \emptyset = 0$$

Sarokba a bástyát!



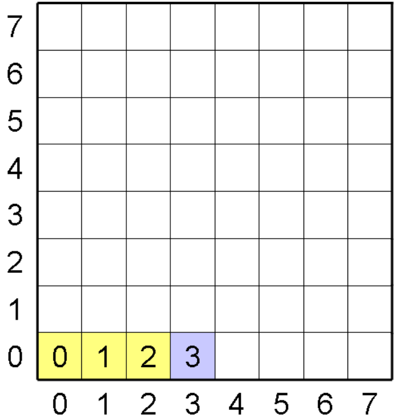
$\text{mex}\,\{0\} = 1$

Sarokba a bástyát!



$\text{mex}\,\{0,1\} = 2$

Sarokba a bástyát!



mex {0,1,2} = 3

Sarokba a bástyát!

7	7							
6	6							
5	5							
4	4							
3	3							
2	2							
1	1	0						
0	0	1	2	3	4	5	6	7
	0	1	2	3	4	5	6	7

mex $\{1\} = 0$

Sarokba a bástyát!

	0	1	2	3	4	5	6	7
7	7							
6	6							
5	5							
4	4							
3	3							
2	2							
1	1	0	3					
0	0	1	2	3	4	5	6	7

$\text{mex}\,\{0,1,2\} = 3$

Sarokba a bástyát!

7	7							
6	6							
5	5							
4	4							
3	3							
2	2							
1	1	0	3	2				
0	0	1	2	3	4	5	6	7
	0	1	2	3	4	5	6	7

$\text{mex}\,\{0,1,3\} = 2$

Sarokba a bástyát!

7	7	6	5	4	3			
6	6	7	4	5	2			
5	5	4	7	6	1	0		
4	4	5	6	7	0	1	2	3
3	3	2	1	0	7	6	5	4
2	2	3	0	1	6	7	4	5
1	1	0	3	2	5	4	7	6
0	0	1	2	3	4	5	6	7
	0	1	2	3	4	5	6	7

$$\text{mex}\,\{1,4,5,6,7\} = 0$$

Sarokba a bástyát!

7	7	6	5	4	3			
6	6	7	4	5	2			
5	5	4	7	6	1	0	3	
4	4	5	6	7	0	1	2	3
3	3	2	1	0	7	6	5	4
2	2	3	0	1	6	7	4	5
1	1	0	3	2	5	4	7	6
0	0	1	2	3	4	5	6	7
	0	1	2	3	4	5	6	7

$\text{mex}\,\{0,1,2,4,5,6,7\} = 3$

Sarokba a bástyát!

7	7	6	5	4	3	2	1	0
6	6	7	4	5	2	3	0	1
5	5	4	7	6	1	0	3	2
4	4	5	6	7	0	1	2	3
3	3	2	1	0	7	6	5	4
2	2	3	0	1	6	7	4	5
1	1	0	3	2	5	4	7	6
0	0	1	2	3	4	5	6	7
	0	1	2	3	4	5	6	7

Sarokba a bástyát!

7	7	6	5	4	3	2	1	0
6	6	7	4	5	2	3	0	1
5	5	4	7	6	1	0	3	2
4	4	5	6	7	0	1	2	3
3	3	2	1	0	7	6	5	4
2	2	3	0	1	6	7	4	5
1	1	0	3	2	5	4	7	6
0	0	1	2	3	4	5	6	7
	0	1	2	3	4	5	6	7

Sarokba a sánta bástyát!

KöMaL 1993/12

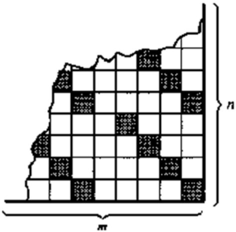
Matematika gyakorlatok megoldása

Gy. 2881. *A 8×8-as sakktábla bal fölső sarkában egy bábu áll, amely vízszintesen jobbra léphet legfeljebb 4 mezőt, vagy függőlegesen lefelé legfeljebb 3 mezőt. András és Balázs felváltva lépnek a bábuval. Kinek van nyerő stratégiája, ha*

a) *az nyer,*

b) *az veszít,*

aki a tábla jobb alsó mezőjére lép? (H)



Megoldás. A feladatot 8×8-as tábla helyett $n\times m$-esre oldjuk meg. Kezdjük az *a)* résszel. Az *1. ábra* a tábla jobb alsó részét mutatja. Az itt látható 4×5-ös részt kiszínezzük az ábra szerint, és az egész táblát befedjük ebből a sarokból indulva ilyen téglalapokkal; majd a kilógó részeket „levágjuk". Ezáltal a tábla minden mezője fehér vagy fekete színű lett.

Belátjuk, hogy ha valaki a bábuval fekete mezőre lép, akkor utána már mindig tud győzni. Fekete mezőről csak fehérre lehet lépni, hiszen mind vízszintesen, mind függőlegesen pontosan eggyel vannak távolabb a fekete me-