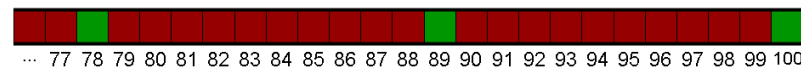
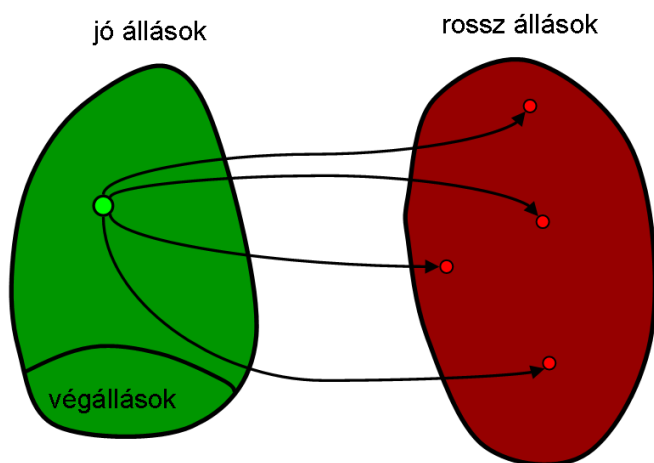


Egyszerű játék magja, Sprague–Grundy-függvénye

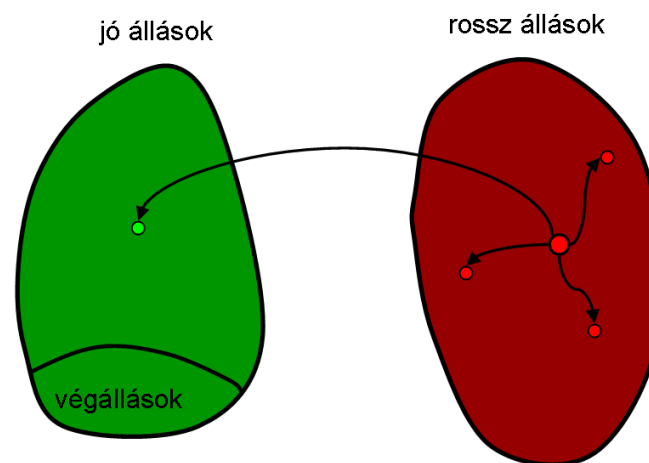
Bachet játéka



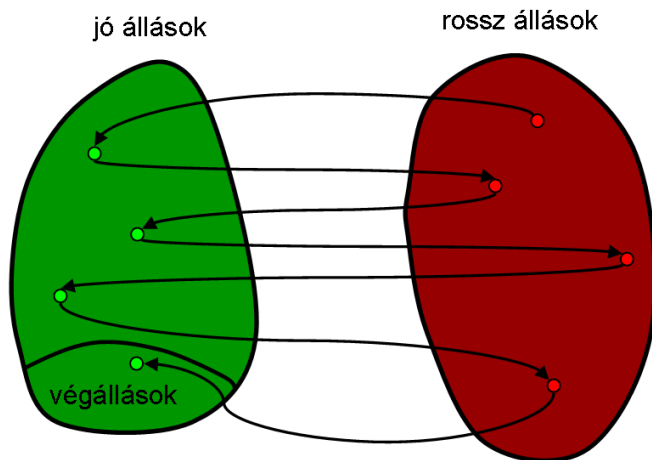
Jó állásból csak rossz állásba lehet lépni



Rossz állásból mindig lehet jó állásba lépni



A játszma menete



jó $\xrightarrow{\forall}$ rossz rossz $\xrightarrow{\exists}$ jó

Egyszerű játék magja

Legyen $\mathcal{J} = (P, L, N)$ egyszerű játék.

Az $M \subseteq P$ halmazt a \mathcal{J} játék magjának nevezzük, ha

- $N \subseteq M$;
- $\forall p \in M \forall q \in P: (p, q) \in L \implies q \in \bar{M}$;
- $\forall p \in \bar{M} \exists q \in M: (p, q) \in L$.

A nyerő stratégia: „Lépj mindig M -be!”

Ha $p_0 \notin M$, akkor A-nak, ha $p_0 \in M$, akkor B-nek van nyerő stratégiája.

\implies A mag egyértelműen meghatározott (ha létezik egyáltalán).

jó $\xrightarrow{\forall}$ rossz rossz $\xrightarrow{\exists}$ jó

A Sprague–Grundy-függvény

Legyen $H \subseteq \mathbb{N}_0$, például $H = \{0, 1, 2, 4, 6\}$.

- $\max H = 6$ (**maximal**)
- $\min H = 0$ (**minimal**)
- $\text{mex } H = \min \bar{H} = 3$ (**minimal excluded**)

A $\gamma: P \rightarrow \mathbb{N}_0$ függvényt a \mathcal{J} játék Sprague–Grundy-függvényének nevezzük, ha

$$\forall p \in P: \gamma(p) = \text{mex} \{ \gamma(q) \mid (p, q) \in L \}.$$

jó $\xrightarrow{\forall}$ rossz rossz $\xrightarrow{\exists}$ jó

Sprague és Grundy tétele

Tétel (Sprague 1935, Grundy 1939)

Tetszőleges \mathcal{J} egyszerű játékhoz

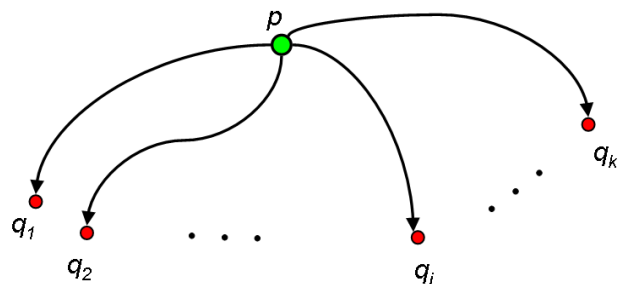
- 1 létezik SG-függvény;
- 2 a SG-függvény egyértelmű;
- 3 a mag éppen a SG-függvény zérushelyeinek halmaza:

$$M = \{ p \in P \mid \gamma(p) = 0 \}.$$

jó $\xrightarrow{\forall}$ rossz rossz $\xrightarrow{\exists}$ jó

$\gamma(p) = \text{mex} \{ \gamma(q) \mid (p, q) \in L \}$

3. Jó állásból csak rossz állásba lehet lépni

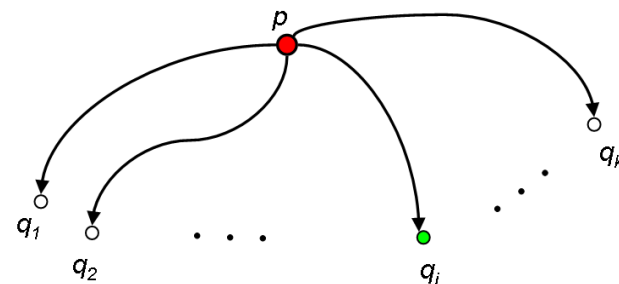


$$\gamma(p) = \text{mex}\{\gamma(q_1), \gamma(q_2), \dots, \gamma(q_k)\} = 0 \implies \forall i: \gamma(q_i) \neq 0$$

jó $\xrightarrow{\forall}$ rossz rossz $\xrightarrow{\exists}$ jó

$$\gamma(p) = \text{mex}\{\gamma(q) \mid (p, q) \in L\}$$

3. Rossz állásból mindig lehet jó állásba lépni

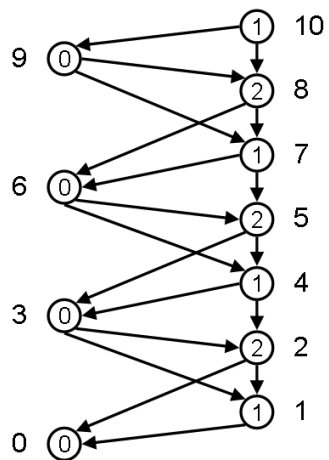


$$\gamma(p) = \text{mex}\{\gamma(q_1), \gamma(q_2), \dots, \gamma(q_k)\} \neq 0 \implies \exists i: \gamma(q_i) = 0$$

jó $\xrightarrow{\forall}$ rossz rossz $\xrightarrow{\exists}$ jó

$$\gamma(p) = \text{mex}\{\gamma(q) \mid (p, q) \in L\}$$

Mini Bachet-játék



$$\gamma(n) = n \bmod 3$$

jó $\xrightarrow{\forall}$ rossz rossz $\xrightarrow{\exists}$ jó

$$\gamma(p) = \text{mex}\{\gamma(q) \mid (p, q) \in L\}$$

1. A SG-függvény létezésének bizonyítása

Legyen $\mathcal{J} = (P, L, N)$ egyszerű játék.

Rekurzívan definiáljuk $\gamma(p)$ értékét:

- Ha $o(p) = 0$ (azaz p végállás), akkor legyen $\gamma(p) = 0$.
- Ha az n -nél kisebb rendű állásokon már definiált a γ függvény, és $o(p) = n$, akkor legyen $\gamma(p) = \text{mex}\{\gamma(q) \mid (p, q) \in L\}$.
(Az itt fellépő q állásokra $o(q) < n$, így $\gamma(q)$ már definiálva van.)

Mivel minden állás rendje véges, γ értékét az összes állásra definiáltuk. Világos, hogy ez a γ függvény eleget tesz a SG-függvény definíciójának. (Ha p végállás, akkor $\gamma(p) = 0 = \text{mex}\emptyset = \text{mex}\{\gamma(q) \mid (p, q) \in L\}$.)

jó $\xrightarrow{\forall}$ rossz rossz $\xrightarrow{\exists}$ jó

$$\gamma(p) = \text{mex}\{\gamma(q) \mid (p, q) \in L\}$$

2. A SG-függvény egyértelműségének bizonyítása

Legyen $\mathcal{J} = (P, L, N)$ egyszerű játék.

Tfh. γ_1 és γ_2 is SG-függvénye \mathcal{J} -nek.

Rend szerinti indukcióval bizonyítjuk, hogy $\gamma_1(p) = \gamma_2(p)$ minden p állásra:

- Ha $o(p) = 0$ (azaz p végállás), akkor $\gamma_1(p) = \text{mex } \emptyset = \gamma_2(p)$.
- Tfh. $\forall q \in P : o(q) < n \implies \gamma_1(q) = \gamma_2(q)$. (IH)
Legyen $o(p) = n$, ekkor

$$\gamma_1(p) \stackrel{\text{SG}}{=} \text{mex} \{ \gamma_1(q) \mid (p, q) \in L \} \stackrel{\text{IH}}{=} \text{mex} \{ \gamma_2(q) \mid (p, q) \in L \} \stackrel{\text{SG}}{=} \gamma_2(p).$$

(A fenti q állásokra $o(q) < n$, így $\gamma_1(q) = \gamma_2(q)$ az IH szerint.)

□

jó $\xrightarrow{\forall}$ rossz rossz $\xrightarrow{\exists}$ jó

$\gamma(p) = \text{mex} \{ \gamma(q) \mid (p, q) \in L \}$

Bachet-játék

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	0	1	2
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	...

$$\gamma(n) = n \bmod 11$$

jó $\xrightarrow{\forall}$ rossz rossz $\xrightarrow{\exists}$ jó

$\gamma(p) = \text{mex} \{ \gamma(q) \mid (p, q) \in L \}$

Sarokba a bástyát!

7	7	6	5	4	3	2	1	0
6	6	7	4	5	2	3	0	1
5	5	4	7	6	1	0	3	2
4	4	5	6	7	0	1	2	3
3	3	2	1	0	7	6	5	4
2	2	3	0	1	6	7	4	5
1	1	0	3	2	5	4	7	6
0	0	1	2	3	4	5	6	7
	0	1	2	3	4	5	6	7

jó $\xrightarrow{\forall}$ rossz rossz $\xrightarrow{\exists}$ jó

$\gamma(p) = \text{mex} \{ \gamma(q) \mid (p, q) \in L \}$

Sarokba a sánta bástyát!

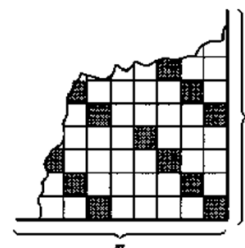


KöMaL 1993/12

Matematika gyakorlatok megoldása

Gy. 2881. A 8×8 -as sakktabla bal felső sarkában egy bábu áll, amely vízszintesen jobbra léphet legfeljebb 4 mezőt, vagy függőlegesen lefelé legfeljebb 3 mezőt. András és Balázs felváltva lépnek a bábuval. Kinek van nyerő stratégiája, ha

- az nyer,
 - az veszít,
- aki a tábla jobb alsó mezőjére lép? (H)



Megoldás. A feladatot 8×8 -as tábla helyett $n \times m$ -esre oldjuk meg. Kezdjük az a) részzel. Az 1. ábra a tábla jobb alsó részét mutatja. Az itt látható 4×5 -ös részt kiszínezzük az ábra szerint, és az egész táblát befedjük ebből a sarokból indulva ilyen téglalapokkal; majd a kilógó részeket „levágjuk”. Ezáltal a tábla minden mezője fehér vagy fekete színű lesz.

Belátjuk, hogy ha valaki a bábuval fekete mezőre lép, akkor utána már mindig tud győzni. Fekete mezőről csak fehérre lehet lépni, hiszen mind vízszintesen, mind függőlegesen pontosan ceve-el vannak távolabb a fekete me-

jó $\xrightarrow{\forall}$ rossz rossz $\xrightarrow{\exists}$ jó

$\gamma(p) = \text{mex} \{ \gamma(q) \mid (p, q) \in L \}$