

## Malomszerű játékok

# Malomszerű játékok

- Adott egy  $T$  halmaz (tábla), és
- $T$  részhalmazainak egy  $\mathcal{M}$  családja (malmok):  $\mathcal{M} \subseteq P(T)$ .

# Malomszerű játékok

- Adott egy  $T$  halmaz (tábla), és
- $T$  részhalmazainak egy  $\mathcal{M}$  családja (malmok):  $\mathcal{M} \subseteq P(T)$ .
- A játékosok felváltva megjelölik saját jelükkel (pl. X és O) a  $T$  halmaz egy-egy elemét.

# Malomszerű játékok

- Adott egy  $T$  halmaz (tábla), és
- $T$  részhalmazainak egy  $\mathcal{M}$  családja (malmok):  $\mathcal{M} \subseteq P(T)$ .
- A játékosok felváltva megjelölik saját jelükkel (pl. X és O) a  $T$  halmaz egy-egy elemét.
- Aki először elfoglal egy malmot, az nyer.

# Malomszerű játékok

- Adott egy  $T$  halmaz (tábla), és
- $T$  részhalmazainak egy  $\mathcal{M}$  családja (malmok):  $\mathcal{M} \subseteq P(T)$ .
- A játékosok felváltva megjelölik saját jelükkel (pl. X és O) a  $T$  halmaz egy-egy elemét.
- Aki először elfoglal egy malmot, az nyer.

Minimalom (lásd a 4.1. alfejezetet):

- $T$  egy  $3 \times 3$ -as négyzetrács kilenc négyzetéből áll:

2	9	4
7	5	3
6	1	8

# Malomszerű játékok

- Adott egy  $T$  halmaz (tábla), és
- $T$  részhalmazainak egy  $\mathcal{M}$  családja (malmok):  $\mathcal{M} \subseteq P(T)$ .
- A játékosok felváltva megjelölik saját jelükkel (pl. X és O) a  $T$  halmaz egy-egy elemét.
- Aki először elfoglal egy malmot, az nyer.

Minimalom (lásd a 4.1. alfejezetet):

- $T$  egy  $3 \times 3$ -as négyzetrács kilenc négyzetéből áll:

2	9	4
7	5	3
6	1	8

- $\mathcal{M} = \{ \{2, 9, 4\}, \{7, 5, 3\}, \{6, 1, 8\}, \{2, 7, 6\}, \{9, 5, 1\}, \{4, 3, 8\}, \{2, 5, 8\}, \{4, 5, 6\} \}$

- $T$  egy nagy (de véges) négyzetrács négyzeteiből áll
- $n$  egymás melletti négyzet („vízszintesen”, „függőlegesen” vagy „átlósan”) alkot egy malmot

- $T$  egy nagy (de véges) négyzetrács négyzeteiből áll
- $n$  egymás melletti négyzet („vízszintesen”, „függőlegesen” vagy „átlósan”) alkot egy malmot

Kinek van nyerő stratégiája?



- $T$  egy nagy (de véges) négyzetrács négyzeteiből áll
- $n$  egymás melletti négyzet („vízszintesen”, „függőlegesen” vagy „átlósan”) alkot egy malmot

Kinek van nyerő stratégiája?

- $n \leq 4$  esetén a kezdő játékosnak van nyerő stratégiája (könnyű; lásd a 4.2. alfejezetet)



- $T$  egy nagy (de véges) négyzetrács négyzeteiből áll
- $n$  egymás melletti négyzet („vízszintesen”, „függőlegesen” vagy „átlósan”) alkot egy malmot

Kinek van nyerő stratégiája?

- $n \leq 4$  esetén a kezdő játékosnak van nyerő stratégiája (könnyű; lásd a 4.2. alfejezetet)
  
  
  
  
  
  
  
  
  
  
- $n = 8$  esetén mindkét játékosnak van biztonságos stratégiája (Zetters, 1980)
- $n \geq 9$  esetén mindkét játékosnak van biztonságos stratégiája (Shannon, Pollak, 1954)

- $T$  egy nagy (de véges) négyzetrács négyzeteiből áll
- $n$  egymás melletti négyzet („vízszintesen”, „függőlegesen” vagy „átlósan”) alkot egy malmot

Kinek van nyerő stratégiája?

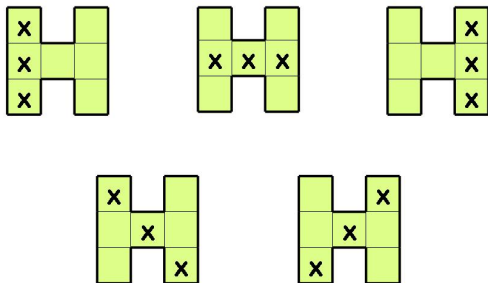
- $n \leq 4$  esetén a kezdő játékosnak van nyerő stratégiája (könnyű; lásd a 4.2. alfejezetet)
- $n = 5$  esetén a kezdő játékosnak van nyerő stratégiája (Allis, van den Herik, Huntjens, 1993)
  
- $n = 8$  esetén mindkét játékosnak van biztonságos stratégiája (Zetters, 1980)
- $n \geq 9$  esetén mindkét játékosnak van biztonságos stratégiája (Shannon, Pollak, 1954)

- $T$  egy nagy (de véges) négyzetrács négyzeteiből áll
- $n$  egymás melletti négyzet („vízszintesen”, „függőlegesen” vagy „átlósan”) alkot egy malmot

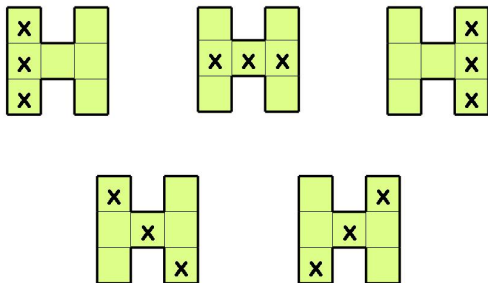
Kinek van nyerő stratégiája?

- $n \leq 4$  esetén a kezdő játékosnak van nyerő stratégiája (könnyű; lásd a 4.2. alfejezetet)
- $n = 5$  esetén a kezdő játékosnak van nyerő stratégiája (Allis, van den Herik, Huntjens, 1993)
- $n = 6$  esetén ???
- $n = 7$  esetén ???
- $n = 8$  esetén mindkét játékosnak van biztonságos stratégiája (Zetters, 1980)
- $n \geq 9$  esetén mindkét játékosnak van biztonságos stratégiája (Shannon, Pollak, 1954)

# Minimalom a H-heptominón

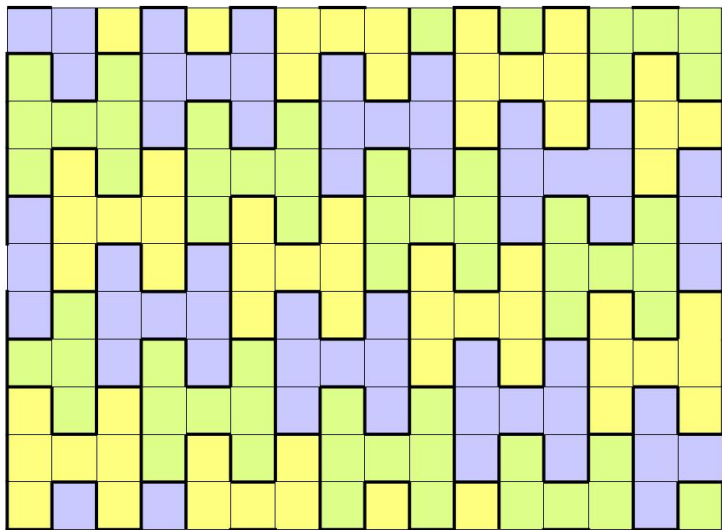


# Minimalom a H-heptominón



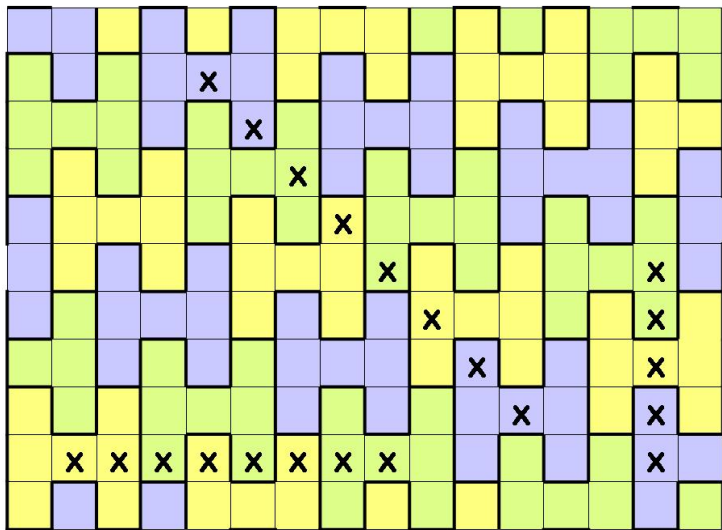
Mindkét játékosnak van biztonságos stratégiája.

# 9-amóba

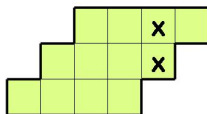
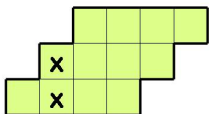
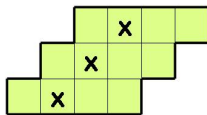
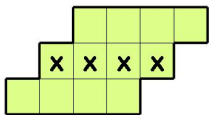




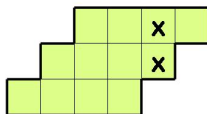
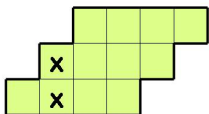
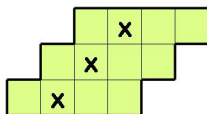
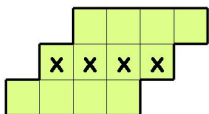
# 9-amóba



# Zettlers-malom

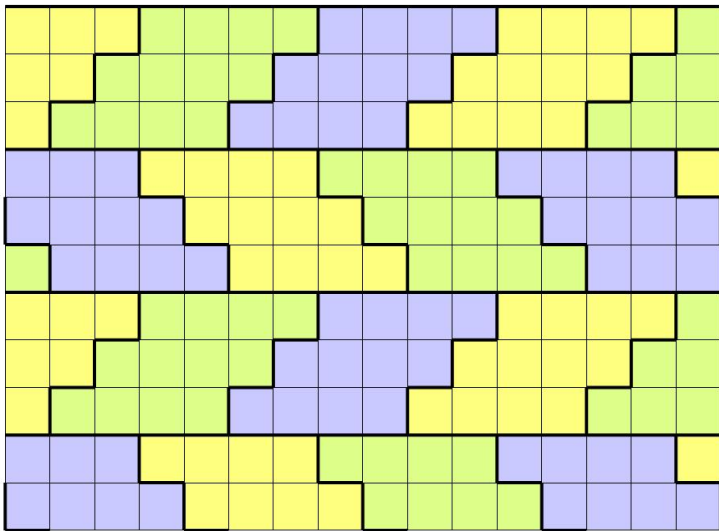


# Zettlers-malom



Mindkét játékosnak van biztonságos stratégiája.

# 8-amóba





## **Tétel (stratégialopás)**

Malomszerű játékban a második játékosnak nem lehet nyerő stratégiája.

## **Tétel (stratégialopás)**

Malomszerű játékban a második játékosnak nem lehet nyerő stratégiája.

**Biz.**

## **Tétel (stratégialopás)**

Malomszerű játékban a második játékosnak nem lehet nyerő stratégiája.

## **Biz.**

Legyen A a kezdő játékos, és B a második játékos. Tegyük fel, hogy B-nek van nyerő stratégiája.



## **Tétel (stratégialopás)**

Malomszerű játékban a második játékosnak nem lehet nyerő stratégiája.

## **Biz.**

Legyen A a kezdő játékos, és B a második játékos. Tegyük fel, hogy B-nek van nyerő stratégiája. Ekkor A el tudja lopni B stratégiáját a következőképpen:

## Tétel (stratégialopás)

Malomszerű játékban a második játékosnak nem lehet nyerő stratégiája.

### **Biz.**

Legyen A a kezdő játékos, és B a második játékos. Tegyük fel, hogy B-nek van nyerő stratégiája. Ekkor A el tudja lopni B stratégiáját a következőképpen:

- a saját első lépését láthatatlannak tekinti;

## Tétel (stratégialopás)

Malomszerű játékban a második játékosnak nem lehet nyerő stratégiája.

### Biz.

Legyen A a kezdő játékos, és B a második játékos. Tegyük fel, hogy B-nek van nyerő stratégiája. Ekkor A el tudja lopni B stratégiáját a következőképpen:

- a saját első lépését láthatatlannak tekinti;
- B stratégiájában megcseréli X és O szerepét;

## Tétel (stratégialopás)

Malomszerű játékban a második játékosnak nem lehet nyerő stratégiája.

### Biz.

Legyen A a kezdő játékos, és B a második játékos. Tegyük fel, hogy B-nek van nyerő stratégiája. Ekkor A el tudja lopni B stratégiáját a következőképpen:

- a saját első lépését láthatatlannak tekinti;
- B stratégiájában megcseréli X és O szerepét;
- ha a lopott stratégiát követve a láthatatlan lépése által elfoglalt mezőbe kellene lépnie, akkor ezt a lépését láthatóvá teszi, és egy tetszőleges üres mezőbe lép „láthatatlanul”.

## Tétel (stratégialopás)

Malomszerű játékban a második játékosnak nem lehet nyerő stratégiája.

### Biz.

Legyen A a kezdő játékos, és B a második játékos. Tegyük fel, hogy B-nek van nyerő stratégiája. Ekkor A el tudja lopni B stratégiáját a következőképpen:

- a saját első lépését láthatatlannak tekinti;
- B stratégiájában megcseréli X és O szerepét;
- ha a lopott stratégiát követve a láthatatlan lépése által elfoglalt mezőbe kellene lépnie, akkor ezt a lépését láthatóvá teszi, és egy tetszőleges üres mezőbe lép „láthatatlanul”.

Mivel malomszerű játékban sosem árthat az, ha több helyen szerepel a saját jelünk (mint amit a lopott stratégia előírna), a fenti stratégia nyerést biztosít A számára.

## Tétel (stratégialopás)

Malomszerű játékban a második játékosnak nem lehet nyerő stratégiája.

### Biz.

Legyen A a kezdő játékos, és B a második játékos. Tegyük fel, hogy B-nek van nyerő stratégiája. Ekkor A el tudja lopni B stratégiáját a következőképpen:

- a saját első lépését láthatatlannak tekinti;
- B stratégiájában megcseréli X és O szerepét;
- ha a lopott stratégiát követve a láthatatlan lépése által elfoglalt mezőbe kellene lépnie, akkor ezt a lépését láthatóvá teszi, és egy tetszőleges üres mezőbe lép „láthatatlanul”.

Mivel malomszerű játékban sosem árthat az, ha több helyen szerepel a saját jelünk (mint amit a lopott stratégia előírna), a fenti stratégia nyerést biztosít A számára. Mindkét játékosnak viszont nem lehet nyerő stratégiája. □

## **Tétel (Neumann János, 1928)**

Kétszemélyes definit kombinatorikai játékban

- valamelyik játékosnak van nyerő stratégiája, vagy pedig
- mindkét játékosnak van biztonságos stratégiája.

## Tétel (Neumann János, 1928)

Kétszemélyes definit kombinatorikai játékban

- valamelyik játékosnak van nyerő stratégiája, vagy pedig
- mindkét játékosnak van biztonságos stratégiája.

## Következmény

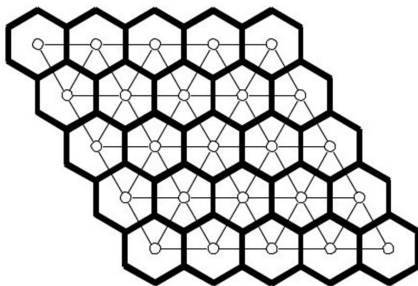
Malomszerű játékban

- vagy a kezdő játékosnak van nyerő stratégiája,
- vagy mindkét játékosnak van biztonságos stratégiája.



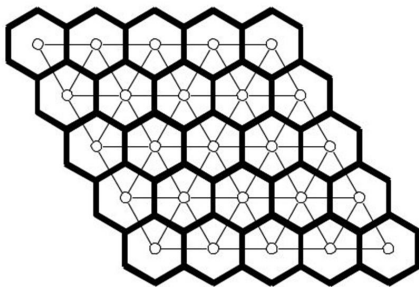
# Hex

Világos (A) és sötét (B) felváltva helyezik korongjaikat a  $(11 \times 11)$ -es hextáblára:



# Hex

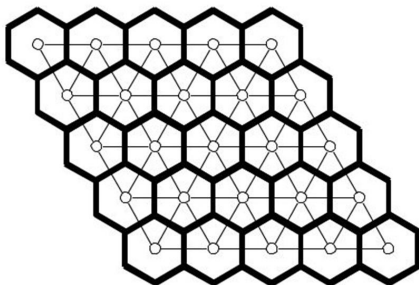
Világos (A) és sötét (B) felváltva helyezik korongjaikat a  $(11 \times 11)$ -es hextáblára:



Világos célja fehér gyöngsorral összekötni a tábla alsó és felső szélét, sötét célja pedig fekete gyöngsorral összekötni a tábla bal és jobb szélét.

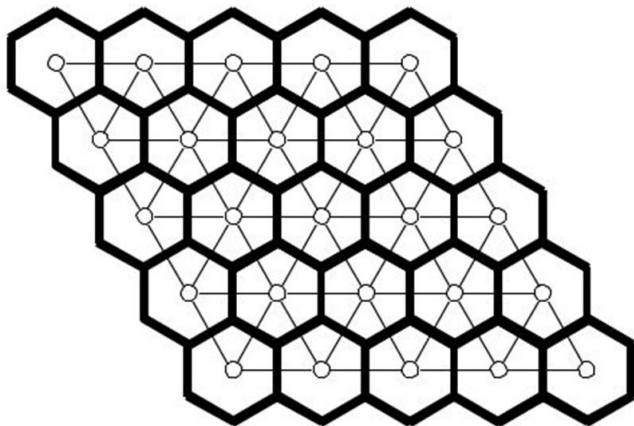
# Hex

Világos (A) és sötét (B) felváltva helyezik korongjaikat a  $(11 \times 11)$ -es hextáblára:

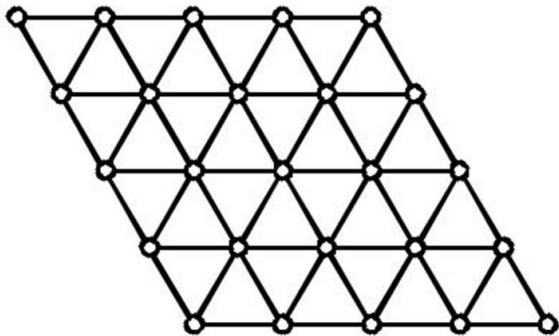


Világos célja fehér gyöngsorral összekötni a tábla alsó és felső szélét, sötét célja pedig fekete gyöngsorral összekötni a tábla bal és jobb szélét. A két játékos „malmai” nem ugyanazok, ezért a hex szigorúan véve nem malomszerű játék.

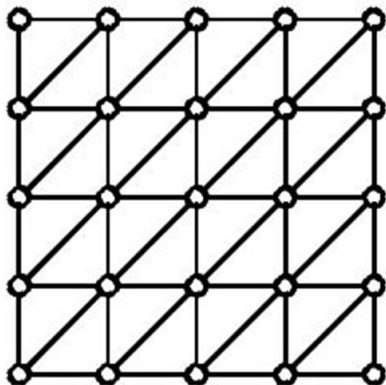
# A hex gráfja



## A hex gráfja



## A hex gráfja



# Stratégialopás a hexben

## **Tétel (Nash, 1949)**

A hexben a második játékosnak nincs nyerő stratégiája.

# Stratégialopás a hexben

## **Tétel (Nash, 1949)**

A hexben a második játékosnak nincs nyerő stratégiája.

**Biz.**



# Stratégialopás a hexben

## **Tétel (Nash, 1949)**

A hexben a második játékosnak nincs nyerő stratégiája.

## **Biz.**

A stratégialopás itt is működik,

# Stratégialopás a hexben

## **Tétel (Nash, 1949)**

A hexben a második játékosnak nincs nyerő stratégiája.

## **Biz.**

A stratégialopás itt is működik, csak a színek kicserélése (és az első lépés titkosítása) mellett tükrözni is kell. □

# Stratégialopás a hexben

## **Tétel (Nash, 1949)**

A hexben a második játékosnak nincs nyerő stratégiája.

## **Biz.**

A stratégialopás itt is működik, csak a színek kicserélése (és az első lépés titkosítása) mellett tükrözni is kell.

## **Tétel (Nash, 1949)**

A hex éles játék (azaz döntetlen nem lehetséges).

# Stratégialopás a hexben

## **Tétel (Nash, 1949)**

A hexben a második játékosnak nincs nyerő stratégiája.

## **Biz.**

A stratégialopás itt is működik, csak a színek kicserélése (és az első lépés titkosítása) mellett tükrözni is kell.

## **Tétel (Nash, 1949)**

A hex éles játék (azaz döntetlen nem lehetséges).

## **Biz.**

# Stratégialopás a hexben

## **Tétel (Nash, 1949)**

A hexben a második játékosnak nincs nyerő stratégiája.

### **Biz.**

A stratégialopás itt is működik, csak a színek kicserélése (és az első lépés titkosítása) mellett tükrözni is kell.

## **Tétel (Nash, 1949)**

A hex éles játék (azaz döntetlen nem lehetséges).

### **Biz.**

A következő oldalon.

# Stratégialopás a hexben

## **Tétel (Nash, 1949)**

A hexben a második játékosnak nincs nyerő stratégiája.

### **Biz.**

A stratégialopás itt is működik, csak a színek kicserélése (és az első lépés titkosítása) mellett tükrözni is kell.

## **Tétel (Nash, 1949)**

A hex éles játék (azaz döntetlen nem lehetséges).

### **Biz.**

A következő oldalon.

## **Következmény (Nash, 1949)**

A hexben a kezdő játékosnak van nyerő stratégiája.

# Stratégialopás a hexben

## Tétel (Nash, 1949)

A hexben a második játékosnak nincs nyerő stratégiája.

### Biz.

A stratégialopás itt is működik, csak a színek kicserélése (és az első lépés titkosítása) mellett tükrözni is kell.

## Tétel (Nash, 1949)

A hex éles játék (azaz döntetlen nem lehetséges).

### Biz.

A következő oldalon.

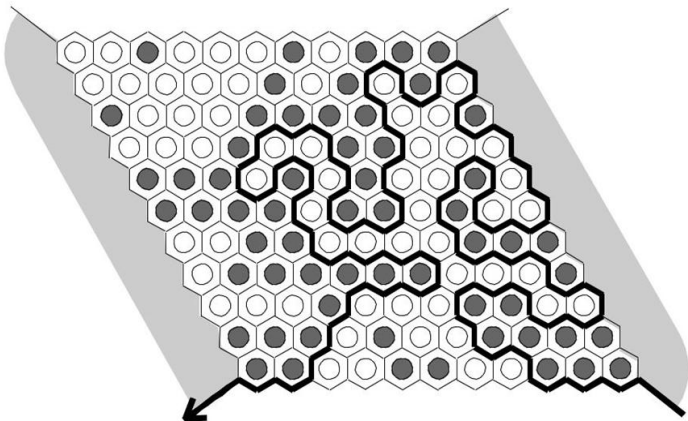
## Következmény (Nash, 1949)

A hexben a kezdő játékosnak van nyerő stratégiája.

## Megjegyzés

A négyzetrácon (sakktáblán) játszott „hex” nem éles, és mindkét játékosnak van biztonságos stratégiája (lásd a 4.3. alfejezetet).

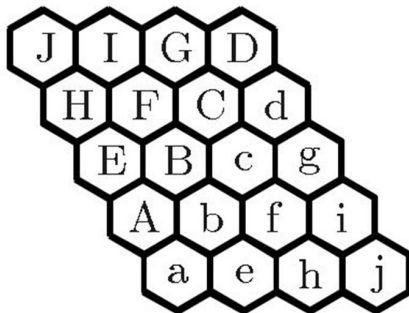
## A hex élességének bizonyítása





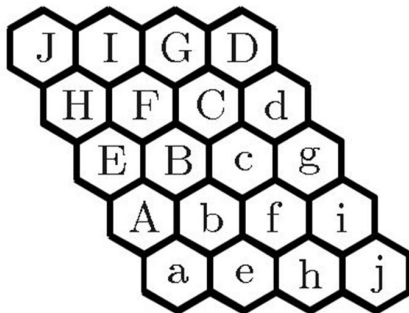
# Hex aszimmetrikus táblán

A előnyét csökkenthetjük azzal, hogy  $n \times (n - 1)$ -es táblán játszunk:



## Hex aszimmetrikus táblán

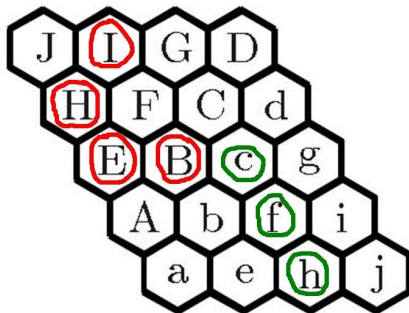
A előnyét csökkenthetjük azzal, hogy  $n \times (n - 1)$ -es táblán játszunk:



Így viszont már B-nek van nyerő stratégiája: mindig az A által utoljára elfoglalt mező párját kell elfoglalnia (párosítási stratégia).

# Hex aszimmetrikus táblán

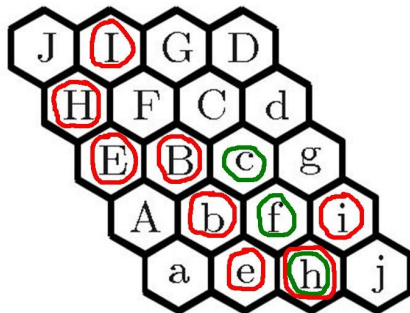
Tegyük fel, hogy A összekötötte a tábla alsó és felső szélét:



hfcBEHI

# Hex aszimmetrikus táblán

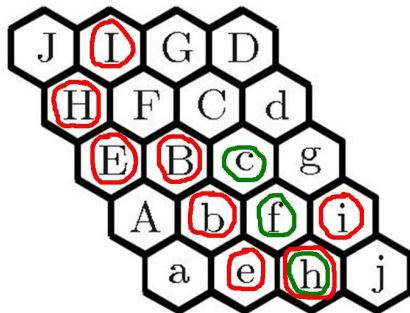
Tükrözzük a gyöngysor „nagybetűs” részét:



hfcbehi

# Hex aszimmetrikus táblán

Tükrözzük a gyöngysor „nagybetűs” részét:

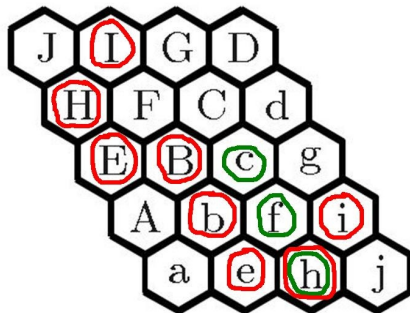


hfcbehi

A tükrözött és az eredeti gyöngysor metszi egymást, így van olyan pár, aminek mindkét tagját A foglalta el (h és H),

# Hex aszimmetrikus táblán

Tükrözzük a gyöngysor „nagybetűs” részét:

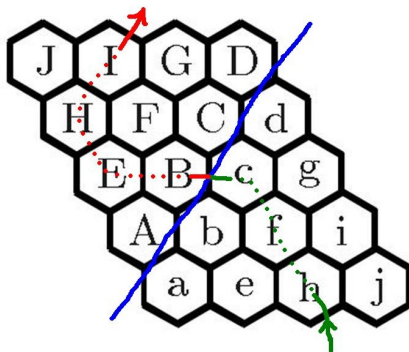


hfcbehi

A tükrözött és az eredeti gyöngysor metszi egymást, így van olyan pár, aminek mindkét tagját A foglalta el (h és H), ez pedig ellentmond a B által követett párosítási stratégiának.

# Hex aszimmetrikus táblán

Az eredeti gyöngysor a tábla alsó szélétől a felsőig halad, és jobbról balra szeli át a két térfél határát:

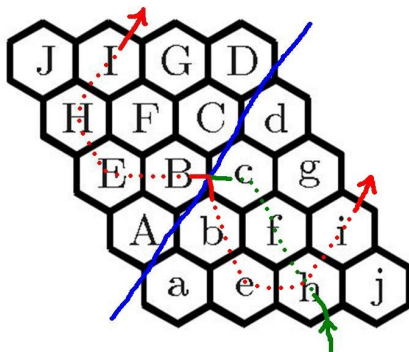






# Hex aszimmetrikus táblán

A gyöngysor tükrözött része a határvonalnál lefelé indul, eleinte az eredeti gyöngysortól balra halad, majd végül eléri a tábla jobb szélét:



Ebből következik, hogy valóban lesz metszéspont.

# Hex aszimmetrikus táblán

Összefoglalva: az  $n \times m$ -es táblán játszott hex játékban

- A-nak van nyerő stratégiája, ha  $n \leq m$ , és
- B-nek van nyerő stratégiája, ha  $n > m$ .

# Hex aszimmetrikus táblán

Összefoglalva: az  $n \times m$ -es táblán játszott hex játékban

- A-nak van nyerő stratégiája, ha  $n \leq m$ , és
- B-nek van nyerő stratégiája, ha  $n > m$ .

A nyerő stratégiája csak  $n \leq 9$  esetén ismert az  $n \times n$ -es hex játékban.