Játékok, struktúrák, stratégiák

Nyerni akarunk!

Cél: nyerő stratégia keresése

játékokban.

Nyerni akarunk!

Cél: nyerő stratégia keresése

- diszkrét,

játékokban.

Nyerni akarunk!

Cél: nyerő stratégia keresése

- diszkrét,
- determinisztikus,

játékokban.

Nyerni akarunk!

Cél: nyerő stratégia keresése

- diszkrét,
- determinisztikus,
- teljes információs,

játékokban.

Nyerni akarunk!

Cél: nyerő stratégia keresése

- diszkrét,
- determinisztikus,
- teljes információs,
- kétszemélyes,

játékokban.

Nyerni akarunk!

Cél: nyerő stratégia keresése

- diszkrét,
- determinisztikus,
- teljes információs,
- kétszemélyes,
- normál (az nyer, aki az utolsó lépést teszi)

játékokban.

Nyerni akarunk!

Cél: nyerő stratégia keresése

- diszkrét,
- determinisztikus,
- teljes információs,
- kétszemélyes,
- normál (az nyer, aki az utolsó lépést teszi)

játékokban.

háromszemélyes Bachet; burkolt személytelen játékok

Játékok, mint matematikai struktúrák

Kétszemélyes normál definit játék: $\mathcal{J} = (P, L_1, L_2, p_0, N_1, N_2)$

Játékok, mint matematikai struktúrák

Kétszemélyes normál definit játék: $\mathcal{J} = (P, L_1, L_2, p_0, N_1, N_2)$

- pozíciók: P nemüres halmaz

Játékok, mint matematikai struktúrák

Kétszemélyes normál definit játék: $\mathcal{J} = (P, L_1, L_2, p_0, N_1, N_2)$

- pozíciók: P nemüres halmaz
- lépések: $L_1, L_2 \subseteq P \times P$

Játékok, mint matematikai struktúrák

Kétszemélyes normál definit játék: $\mathcal{J} = (P, L_1, L_2, p_0, N_1, N_2)$

- pozíciók: P nemüres halmaz
- lépések: $L_1, L_2 \subseteq P \times P$
- kezdőállás: $p_0 \in P$

Játékok, mint matematikai struktúrák

Kétszemélyes normál definit játék: $\mathcal{J} = (P, L_1, L_2, p_0, N_1, N_2)$

- pozíciók: P nemüres halmaz
- lépések: $L_1, L_2 \subseteq P \times P$
- kezdőállás: $p_0 \in P$
- nyerő végállások: $N_1, N_2 \subseteq P$

Játékok, mint matematikai struktúrák

Kétszemélyes normál definit játék: $\mathcal{J} = (P, L_1, L_2, p_0, N_1, N_2)$

- pozíciók: P nemüres halmaz
- lépések: $L_1, L_2 \subseteq P \times P$
- kezdőállás: $p_0 \in P$
- nyerő végállások: $N_1, N_2 \subseteq P$

  $N_1 = \{p \in P \mid \nexists q \in P\colon\ (p, q) \in L_2\}$ (A nyert)

Játékok, mint matematikai struktúrák

Kétszemélyes normál definit játék: $\mathcal{J} = (P, L_1, L_2, p_0, N_1, N_2)$

- pozíciók: P nemüres halmaz
- lépések: $L_1, L_2 \subseteq P \times P$
- kezdőállás: $p_0 \in P$
- nyerő végállások: $N_1, N_2 \subseteq P$

  $N_1 = \{p \in P \mid \nexists q \in P\colon\ (p, q) \in L_2\}$ (A nyert)

  $N_2 = \{p \in P \mid \nexists q \in P\colon\ (p, q) \in L_1\}$ (B nyert)

Játékok, mint matematikai struktúrák

Kétszemélyes normál definit játék: $\mathcal{J} = (P, L_1, L_2, p_0, N_1, N_2)$

- pozíciók: P nemüres halmaz
- lépések: $L_1, L_2 \subseteq P \times P$
- kezdőállás: $p_0 \in P$
- nyerő végállások: $N_1, N_2 \subseteq P$

  $N_1 = \{p \in P \mid \nexists q \in P\colon\ (p, q) \in L_2\}$ (A nyert)

  $N_2 = \{p \in P \mid \nexists q \in P\colon\ (p, q) \in L_1\}$ (B nyert)

Ha $L_1 = L_2$ (és így $N_1 = N_2$), akkor a játék szimmetrikus.

Játékok, mint matematikai struktúrák

Kétszemélyes normál definit játék: $\mathcal{J} = (P, L_1, L_2, p_0, N_1, N_2)$

- pozíciók: P nemüres halmaz
- lépések: $L_1, L_2 \subseteq P \times P$
- kezdőállás: $p_0 \in P$
- nyerő végállások: $N_1, N_2 \subseteq P$

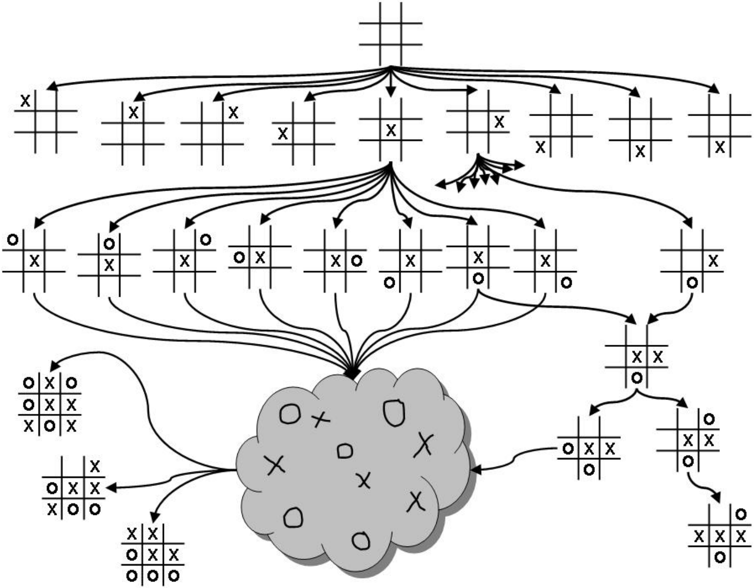
  $N_1 = \{p \in P \mid \nexists q \in P\colon\ (p, q) \in L_2\}$ (A nyert)

  $N_2 = \{p \in P \mid \nexists q \in P\colon\ (p, q) \in L_1\}$ (B nyert)

Ha $L_1 = L_2$ (és így $N_1 = N_2$), akkor a játék szimmetrikus.

pozíció és állás; szimmetria; gráfjáték

A minimalom gráfja



Játékok, mint matematikai struktúrák

Egyszemélyes definit játék: $\mathcal{J} = (P, L, p_0, N)$

Játékok, mint matematikai struktúrák

Egyszemélyes definit játék: $\mathcal{J} = (P, L, p_0, N)$

- pozíciók: P nemüres halmaz

Játékok, mint matematikai struktúrák

Egyszemélyes definit játék: $\mathcal{J} = (P, L, p_0, N)$

- pozíciók: P nemüres halmaz
- lépések: $L \subseteq P \times P$

Játékok, mint matematikai struktúrák

Egyszemélyes definit játék: $\mathcal{J} = (P, L, p_0, N)$

- pozíciók: P nemüres halmaz
- lépések: $L \subseteq P \times P$
- kezdőállás: $p_0 \in P$

Játékok, mint matematikai struktúrák

Egyszemélyes definit játék: $\mathcal{J} = (P, L, p_0, N)$

- pozíciók: P nemüres halmaz
- lépések: $L \subseteq P \times P$
- kezdőállás: $p_0 \in P$
- nyerő végállások: $N \subseteq P$

Játékok, mint matematikai struktúrák

Egyszemélyes definit játék: $\mathcal{J} = (P, L, p_0, N)$

- pozíciók: P nemüres halmaz
- lépések: $L \subseteq P \times P$
- kezdőállás: $p_0 \in P$
- nyerő végállások: $N \subseteq P$

Személytelen definit játék: $\mathcal{J} = (P, L, p_0)$

Játékok, mint matematikai struktúrák

Egyszemélyes definit játék: $\mathcal{J} = (P, L, p_0, N)$

- pozíciók: P nemüres halmaz
- lépések: $L \subseteq P \times P$
- kezdőállás: $p_0 \in P$
- nyerő végállások: $N \subseteq P$

Személytelen definit játék: $\mathcal{J} = (P, L, p_0)$

- pozíciók: P nemüres halmaz

Játékok, mint matematikai struktúrák

Egyszemélyes definit játék: $\mathcal{J} = (P, L, p_0, N)$

- pozíciók: P nemüres halmaz
- lépések: $L \subseteq P \times P$
- kezdőállás: $p_0 \in P$
- nyerő végállások: $N \subseteq P$

Személytelen definit játék: $\mathcal{J} = (P, L, p_0)$

- pozíciók: P nemüres halmaz
- lépések: $L \subseteq P \times P$

Játékok, mint matematikai struktúrák

Egyszemélyes definit játék: $\mathcal{J} = (P, L, p_0, N)$

- pozíciók: P nemüres halmaz
- lépések: $L \subseteq P \times P$
- kezdőállás: $p_0 \in P$
- nyerő végállások: $N \subseteq P$

Személytelen definit játék: $\mathcal{J} = (P, L, p_0)$

- pozíciók: P nemüres halmaz
- lépések: $L \subseteq P \times P$
- kezdőállás: $p_0 \in P$

Játékok, mint matematikai struktúrák

Egyszemélyes definit játék: $\mathcal{J} = (P, L, p_0, N)$

- pozíciók: P nemüres halmaz
- lépések: $L \subseteq P \times P$
- kezdőállás: $p_0 \in P$
- nyerő végállások: $N \subseteq P$

Személytelen definit játék: $\mathcal{J} = (P, L, p_0)$

- pozíciók: P nemüres halmaz
- lépések: $L \subseteq P \times P$
- kezdőállás: $p_0 \in P$
  $\forall p \in P \, \exists! q \in Q\colon \ (p, q) \in L$, azaz $L\colon \ P \to P$ leképezés

Bachet játéka

Bachet játéka: $\mathcal{J} = (P, L_1, L_2, p_0, N_1, N_2)$,

Bachet játéka

Bachet játéka: $\mathcal{J} = (P, L_1, L_2, p_0, N_1, N_2)$, ahol

- $P = \{0, 1, \ldots, 100\}$

Bachet játéka

Bachet játéka: $\mathcal{J} = (P, L_1, L_2, p_0, N_1, N_2)$, ahol

- $P = \{0, 1, \ldots, 100\}$
- $L_1 = L_2 = \{(p, q) \mid p + 1 \leq q \leq p + 10\} \subseteq P \times P$

Bachet játéka

Bachet játéka: $\mathcal{J} = (P, L_1, L_2, p_0, N_1, N_2)$, ahol

- $P = \{0, 1, \ldots, 100\}$
- $L_1 = L_2 = \{(p, q) \mid p + 1 \leq q \leq p + 10\} \subseteq P \times P$
- $p_0 = 0$

Bachet játéka

Bachet játéka: $\mathcal{J} = (P, L_1, L_2, p_0, N_1, N_2)$, ahol

- $P = \{0, 1, \ldots, 100\}$
- $L_1 = L_2 = \{(p, q) \mid p + 1 \leq q \leq p + 10\} \subseteq P \times P$
- $p_0 = 0$
- $N_1 = N_2 = \{100\}$

Bachet játéka

Bachet játéka: $\mathcal{J} = (P, L_1, L_2, p_0, N_1, N_2)$, ahol

- $P = \{0, 1, \ldots, 100\}$
- $L_1 = L_2 = \{(p, q) \mid p + 1 \leq q \leq p + 10\} \subseteq P \times P$
- $p_0 = 0$
- $N_1 = N_2 = \{100\}$

Kivonásos változat: $\mathcal{J}^* = (P^*, L_1^*, L_2^*, p_0^*, N_1^*, N_2^*)$,

Bachet játéka

Bachet játéka: $\mathcal{J} = (P, L_1, L_2, p_0, N_1, N_2)$, ahol

- $P = \{0, 1, \ldots, 100\}$
- $L_1 = L_2 = \{(p, q) \mid p + 1 \leq q \leq p + 10\} \subseteq P \times P$
- $p_0 = 0$
- $N_1 = N_2 = \{100\}$

Kivonásos változat: $\mathcal{J}^* = (P^*, L_1^*, L_2^*, p_0^*, N_1^*, N_2^*)$, ahol

- $P^* = \{0, 1, \ldots, 100\}$

Bachet játéka

Bachet játéka: $\mathcal{J} = (P, L_1, L_2, p_0, N_1, N_2)$, ahol

- $P = \{0, 1, \ldots, 100\}$
- $L_1 = L_2 = \{(p, q) \mid p + 1 \leq q \leq p + 10\} \subseteq P \times P$
- $p_0 = 0$
- $N_1 = N_2 = \{100\}$

Kivonásos változat: $\mathcal{J}^* = (P^*, L_1^*, L_2^*, p_0^*, N_1^*, N_2^*)$, ahol

- $P^* = \{0, 1, \ldots, 100\}$
- $L_1^* = L_2^* = \{(p, q) \mid p - 10 \leq q \leq p - 1\} \subseteq P \times P$

Bachet játéka

Bachet játéka: $\mathcal{J} = (P, L_1, L_2, p_0, N_1, N_2)$, ahol

- $P = \{0, 1, \ldots, 100\}$
- $L_1 = L_2 = \{(p, q) \mid p + 1 \leq q \leq p + 10\} \subseteq P \times P$
- $p_0 = 0$
- $N_1 = N_2 = \{100\}$

Kivonásos változat: $\mathcal{J}^* = (P^*, L_1^*, L_2^*, p_0^*, N_1^*, N_2^*)$, ahol

- $P^* = \{0, 1, \ldots, 100\}$
- $L_1^* = L_2^* = \{(p, q) \mid p - 10 \leq q \leq p - 1\} \subseteq P \times P$
- $p_0^* = 100$

Bachet játéka

Bachet játéka: $\mathcal{J} = (P, L_1, L_2, p_0, N_1, N_2)$, ahol

- $P = \{0, 1, \ldots, 100\}$
- $L_1 = L_2 = \{(p, q) \mid p + 1 \leq q \leq p + 10\} \subseteq P \times P$
- $p_0 = 0$
- $N_1 = N_2 = \{100\}$

Kivonásos változat: $\mathcal{J}^* = (P^*, L_1^*, L_2^*, p_0^*, N_1^*, N_2^*)$, ahol

- $P^* = \{0, 1, \ldots, 100\}$
- $L_1^* = L_2^* = \{(p, q) \mid p - 10 \leq q \leq p - 1\} \subseteq P \times P$
- $p_0^* = 100$
- $N_1^* = N_2^* = \{0\}$

Izomorfia

$\mathcal{J} = (P, L_1, L_2, p_0, N_1, N_2)$ és $\mathcal{J}^* = (P^*, L_1^*, L_2^*, p_0^*, N_1^*, N_2^*)$
izomorf játékok,

Izomorfia

$\mathcal{J} = (P, L_1, L_2, p_0, N_1, N_2)$ és $\mathcal{J}^* = (P^*, L_1^*, L_2^*, p_0^*, N_1^*, N_2^*)$ izomorf játékok, ha létezik olyan $\varphi\colon P \to P^*$ leképezés, hogy

Izomorfia

$\mathcal{J} = (P, L_1, L_2, p_0, N_1, N_2)$ és $\mathcal{J}^* = (P^*, L_1^*, L_2^*, p_0^*, N_1^*, N_2^*)$ izomorf játékok, ha létezik olyan $\varphi \colon P \to P^*$ leképezés, hogy

- φ bijektív

Izomorfia

$\mathcal{J} = (P, L_1, L_2, p_0, N_1, N_2)$ és $\mathcal{J}^* = (P^*, L_1^*, L_2^*, p_0^*, N_1^*, N_2^*)$ izomorf játékok, ha létezik olyan $\varphi\colon P \to P^*$ leképezés, hogy

- φ bijektív
- $\forall p, q \in P\colon\ (p, q) \in L_1 \iff (\varphi(p), \varphi(q)) \in L_1^*$

Izomorfia

$\mathcal{J} = (P, L_1, L_2, p_0, N_1, N_2)$ és $\mathcal{J}^* = (P^*, L_1^*, L_2^*, p_0^*, N_1^*, N_2^*)$ izomorf játékok, ha létezik olyan $\varphi\colon P \to P^*$ leképezés, hogy

- φ bijektív
- $\forall p, q \in P\colon \ (p, q) \in L_1 \iff (\varphi(p), \varphi(q)) \in L_1^*$
- $\forall p, q \in P\colon \ (p, q) \in L_2 \iff (\varphi(p), \varphi(q)) \in L_2^*$

Izomorfia

$\mathcal{J} = (P, L_1, L_2, p_0, N_1, N_2)$ és $\mathcal{J}^* = (P^*, L_1^*, L_2^*, p_0^*, N_1^*, N_2^*)$ izomorf játékok, ha létezik olyan $\varphi\colon P \to P^*$ leképezés, hogy

- φ bijektív
- $\forall p, q \in P\colon\ (p, q) \in L_1 \iff (\varphi(p), \varphi(q)) \in L_1^*$
- $\forall p, q \in P\colon\ (p, q) \in L_2 \iff (\varphi(p), \varphi(q)) \in L_2^*$
- $\varphi(p_0) = p_0^*$

Izomorfia

$\mathcal{J} = (P, L_1, L_2, p_0, N_1, N_2)$ és $\mathcal{J}^* = (P^*, L_1^*, L_2^*, p_0^*, N_1^*, N_2^*)$ izomorf játékok, ha létezik olyan $\varphi\colon P \to P^*$ leképezés, hogy

- φ bijektív
- $\forall p, q \in P\colon\ (p, q) \in L_1 \iff (\varphi(p), \varphi(q)) \in L_1^*$
- $\forall p, q \in P\colon\ (p, q) \in L_2 \iff (\varphi(p), \varphi(q)) \in L_2^*$
- $\varphi(p_0) = p_0^*$
- $\forall p \in P\colon\ p \in N_1 \iff \varphi(p) \in N_1^*$

Izomorfia

$\mathcal{J} = (P, L_1, L_2, p_0, N_1, N_2)$ és $\mathcal{J}^* = (P^*, L_1^*, L_2^*, p_0^*, N_1^*, N_2^*)$ izomorf játékok, ha létezik olyan $\varphi \colon P \to P^*$ leképezés, hogy

- φ bijektív
- $\forall p, q \in P \colon\ (p, q) \in L_1 \iff (\varphi(p), \varphi(q)) \in L_1^*$
- $\forall p, q \in P \colon\ (p, q) \in L_2 \iff (\varphi(p), \varphi(q)) \in L_2^*$
- $\varphi(p_0) = p_0^*$
- $\forall p \in P \colon p \in N_1 \iff \varphi(p) \in N_1^*$
- $\forall p \in P \colon p \in N_2 \iff \varphi(p) \in N_2^*$

Izomorfia

$\mathcal{J} = (P, L_1, L_2, p_0, N_1, N_2)$ és $\mathcal{J}^* = (P^*, L_1^*, L_2^*, p_0^*, N_1^*, N_2^*)$ izomorf játékok, ha létezik olyan $\varphi\colon P \to P^*$ leképezés, hogy

- φ bijektív
- $\forall p, q \in P\colon\ (p, q) \in L_1 \iff (\varphi(p), \varphi(q)) \in L_1^*$
- $\forall p, q \in P\colon\ (p, q) \in L_2 \iff (\varphi(p), \varphi(q)) \in L_2^*$
- $\varphi(p_0) = p_0^*$
- $\forall p \in P\colon p \in N_1 \iff \varphi(p) \in N_1^*$
- $\forall p \in P\colon p \in N_2 \iff \varphi(p) \in N_2^*$

Bachet játékának eredeti, illetve kivonásos változata izomorf egymással:

Izomorfia

$\mathcal{J} = (P, L_1, L_2, p_0, N_1, N_2)$ és $\mathcal{J}^* = (P^*, L_1^*, L_2^*, p_0^*, N_1^*, N_2^*)$ izomorf játékok, ha létezik olyan $\varphi\colon P \to P^*$ leképezés, hogy

- φ bijektív
- $\forall p, q \in P\colon\ (p, q) \in L_1 \iff (\varphi(p), \varphi(q)) \in L_1^*$
- $\forall p, q \in P\colon\ (p, q) \in L_2 \iff (\varphi(p), \varphi(q)) \in L_2^*$
- $\varphi(p_0) = p_0^*$
- $\forall p \in P\colon p \in N_1 \iff \varphi(p) \in N_1^*$
- $\forall p \in P\colon p \in N_2 \iff \varphi(p) \in N_2^*$

Bachet játékának eredeti, illetve kivonásos változata izomorf egymással: $\varphi\colon P \to P^*,\ n \mapsto 100 - n$ izomorfizmus $\mathcal{J}$ és $\mathcal{J}^*$ között.

Játszma

Játszma kétszemélyes játékban: $p_0, p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$

Játszma

Játszma kétszemélyes játékban: $p_0, p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$

- $\forall i \colon p_i \in P$

Játszma

Játszma kétszemélyes játékban: $p_0, p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$

- $\forall i \colon p_i \in P$
- $2 \mid i \implies (p_i, p_{i+1}) \in L_1$

Játszma

Játszma kétszemélyes játékban: $p_0, p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$

- $\forall i\colon p_i \in P$
- $2 \mid i \implies (p_i, p_{i+1}) \in L_1$
- $2 \nmid i \implies (p_i, p_{i+1}) \in L_2$

Játszma

Játszma kétszemélyes játékban: $p_0, p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$

- $\forall i \colon p_i \in P$
- $2 \mid i \implies (p_i, p_{i+1}) \in L_1$
- $2 \nmid i \implies (p_i, p_{i+1}) \in L_2$
- $p_n \in N_1 \cup N_2$

Játszma

Játszma kétszemélyes játékban: $p_0, p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$

- $\forall i\colon p_i \in P$
- $2 \mid i \implies (p_i, p_{i+1}) \in L_1$
- $2 \nmid i \implies (p_i, p_{i+1}) \in L_2$
- $p_n \in N_1 \cup N_2$
  (ha n páros, akkor B nyert, ha n páratlan, akkor A nyert)

Játszma

Játszma kétszemélyes játékban: $p_0, p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$

- $\forall i \colon p_i \in P$
- $2 \mid i \implies (p_i, p_{i+1}) \in L_1$
- $2 \nmid i \implies (p_i, p_{i+1}) \in L_2$
- $p_n \in N_1 \cup N_2$
  (ha n páros, akkor B nyert, ha n páratlan, akkor A nyert)

Játszma egyszemélyes játékban: $p_0, p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$

Játszma

Játszma kétszemélyes játékban: $p_0, p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$

- $\forall i \colon p_i \in P$
- $2 \mid i \implies (p_i, p_{i+1}) \in L_1$
- $2 \nmid i \implies (p_i, p_{i+1}) \in L_2$
- $p_n \in N_1 \cup N_2$
  (ha n páros, akkor B nyert, ha n páratlan, akkor A nyert)

Játszma egyszemélyes játékban: $p_0, p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$

- $\forall i \colon p_i \in P$

Játszma

Játszma kétszemélyes játékban: $p_0, p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$

- $\forall i \colon p_i \in P$
- $2 \mid i \implies (p_i, p_{i+1}) \in L_1$
- $2 \nmid i \implies (p_i, p_{i+1}) \in L_2$
- $p_n \in N_1 \cup N_2$
  (ha n páros, akkor B nyert, ha n páratlan, akkor A nyert)

Játszma egyszemélyes játékban: $p_0, p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$

- $\forall i \colon p_i \in P$
- $(p_i, p_{i+1}) \in L$

Játszma

Játszma kétszemélyes játékban: $p_0, p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$

- $\forall i \colon p_i \in P$
- $2 \mid i \implies (p_i, p_{i+1}) \in L_1$
- $2 \nmid i \implies (p_i, p_{i+1}) \in L_2$
- $p_n \in N_1 \cup N_2$
  (ha n páros, akkor B nyert, ha n páratlan, akkor A nyert)

Játszma egyszemélyes játékban: $p_0, p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$

- $\forall i \colon p_i \in P$
- $(p_i, p_{i+1}) \in L$
- $p_n \in N$ esetén siker, $p_n \notin N$ esetén kudarc

Játszma

Játszma kétszemélyes játékban: $p_0, p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$

- $\forall i\colon p_i \in P$
- $2 \mid i \implies (p_i, p_{i+1}) \in L_1$
- $2 \nmid i \implies (p_i, p_{i+1}) \in L_2$
- $p_n \in N_1 \cup N_2$
  (ha n páros, akkor B nyert, ha n páratlan, akkor A nyert)

Játszma egyszemélyes játékban: $p_0, p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$

- $\forall i\colon p_i \in P$
- $(p_i, p_{i+1}) \in L$
- $p_n \in N$ esetén siker, $p_n \notin N$ esetén kudarc

Játszma személytelen játékban: $p_0, p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$

Játszma

Játszma kétszemélyes játékban: $p_0, p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$

- $\forall i \colon p_i \in P$
- $2 \mid i \implies (p_i, p_{i+1}) \in L_1$
- $2 \nmid i \implies (p_i, p_{i+1}) \in L_2$
- $p_n \in N_1 \cup N_2$
  (ha n páros, akkor B nyert, ha n páratlan, akkor A nyert)

Játszma egyszemélyes játékban: $p_0, p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$

- $\forall i \colon p_i \in P$
- $(p_i, p_{i+1}) \in L$
- $p_n \in N$ esetén siker, $p_n \notin N$ esetén kudarc

Játszma személytelen játékban: $p_0, p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$

- $\forall i \colon p_i \in P$

Játszma

Játszma kétszemélyes játékban: $p_0, p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$

- $\forall i$: $p_i \in P$
- $2 \mid i \implies (p_i, p_{i+1}) \in L_1$
- $2 \nmid i \implies (p_i, p_{i+1}) \in L_2$
- $p_n \in N_1 \cup N_2$
  (ha n páros, akkor B nyert, ha n páratlan, akkor A nyert)

Játszma egyszemélyes játékban: $p_0, p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$

- $\forall i$: $p_i \in P$
- $(p_i, p_{i+1}) \in L$
- $p_n \in N$ esetén siker, $p_n \notin N$ esetén kudarc

Játszma személytelen játékban: $p_0, p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$

- $\forall i$: $p_i \in P$
- $(p_i, p_{i+1}) \in L$, azaz $p_{i+1} = L(p_i)$

Végességi feltételek

A $\mathcal{J} = (P, L_1, L_2, p_0, N_1, N_2)$ játék

Végességi feltételek

A $\mathcal{J} = (P, L_1, L_2, p_0, N_1, N_2)$ játék

- véges, ha minden játszmája véges;

Végességi feltételek

A $\mathcal{J} = (P, L_1, L_2, p_0, N_1, N_2)$ játék

- véges, ha minden játszmája véges;
- végesfokú, ha minden p állásra
  a $\{q \in P \mid (p, q) \in L_1 \cup L_2\}$ halmaz véges.

Végességi feltételek

A $\mathcal{J} = (P, L_1, L_2, p_0, N_1, N_2)$ játék

- véges, ha minden játszmája véges;
- végesfokú, ha minden p állásra
  a $\{q \in P \mid (p, q) \in L_1 \cup L_2\}$ halmaz véges.

A p állás rendje:

Végességi feltételek

A $\mathcal{J} = (P, L_1, L_2, p_0, N_1, N_2)$ játék

- véges, ha minden játszmája véges;
- végesfokú, ha minden p állásra
  a $\{q \in P \mid (p, q) \in L_1 \cup L_2\}$ halmaz véges.

A p állás rendje:

- Ha a p-ből induló leghosszabb játszma n lépésből áll, akkor p rendje n. Jelölés: $o(p) = n$.

Végességi feltételek

A $\mathcal{J} = (P, L_1, L_2, p_0, N_1, N_2)$ játék

- véges, ha minden játszmája véges;
- végesfokú, ha minden p állásra
  a $\{q \in P \mid (p, q) \in L_1 \cup L_2\}$ halmaz véges.

A p állás rendje:

- Ha a p-ből induló leghosszabb játszma n lépésből áll, akkor p rendje n. Jelölés: $o(p) = n$.
- Ha a p-ből induló játszmák hosszának nincs felső korlátja (vagy p-ből indul végtelen játszma), akkor p rendje végtelen.
  Jelölés: $o(p) = \infty$.

Végességi feltételek

A $\mathcal{J} = (P, L_1, L_2, p_0, N_1, N_2)$ játék

- véges, ha minden játszmája véges;
- végesfokú, ha minden p állásra
  a $\{q \in P \mid (p, q) \in L_1 \cup L_2\}$ halmaz véges.

A p állás rendje:

- Ha a p-ből induló leghosszabb játszma n lépésből áll, akkor p rendje n. Jelölés: $o(p) = n$.
- Ha a p-ből induló játszmák hosszának nincs felső korlátja (vagy p-ből indul végtelen játszma), akkor p rendje végtelen.
  Jelölés: $o(p) = \infty$.

Kőnig-lemma
Véges és végesfokú játékban minden állás véges rendű.

Végességi feltételek

A $\mathcal{J} = (P, L_1, L_2, p_0, N_1, N_2)$ játék

- véges, ha minden játszmája véges;
- végesfokú, ha minden p állásra
  a $\{q \in P \mid (p, q) \in L_1 \cup L_2\}$ halmaz véges.

A p állás rendje:

- Ha a p-ből induló leghosszabb játszma n lépésből áll, akkor p rendje n. Jelölés: $o(p) = n$.
- Ha a p-ből induló játszmák hosszának nincs felső korlátja (vagy p-ből indul végtelen játszma), akkor p rendje végtelen.
  Jelölés: $o(p) = \infty$.

Kőnig-lemma
Véges és végesfokú játékban minden állás véges rendű.

HF: Venn-diagram

Kőnig Dénes lemmája

Kőnig-lemma

Véges és végesfokú játékban minden állás véges rendű.

Biz.

Legyen $\mathcal{J}$ véges, végesfokú játék, és tfh. a p állás rendje végtelen.

Kőnig Dénes lemmája

Kőnig-lemma

Véges és végesfokú játékban minden állás véges rendű.

Biz.

Legyen $\mathcal{J}$ véges, végesfokú játék, és tfh. a p állás rendje végtelen.
Legyenek a p-ből egy lépésben elérhető állások $q_1, \ldots, q_k$.

Kőnig Dénes lemmája

Kőnig-lemma

Véges és végesfokú játékban minden állás véges rendű.

Biz.

Legyen $\mathcal{J}$ véges, végesfokú játék, és tfh. a p állás rendje végtelen. Legyenek a p-ből egy lépésben elérhető állások $q_1, \ldots, q_k$.

Ha ezek mind véges rendűek lennének, akkor

$$o(p) =$$

Kőnig Dénes lemmája

Kőnig-lemma

Véges és végesfokú játékban minden állás véges rendű.

Biz.

Legyen $\mathcal{J}$ véges, végesfokú játék, és tfh. a p állás rendje végtelen.
Legyenek a p-ből egy lépésben elérhető állások $q_1, \ldots, q_k$.

Ha ezek mind véges rendűek lennének, akkor

$$o(p) = 1 + \max\{o(q_1), \ldots, o(q_k)\} < \infty.$$

Kőnig Dénes lemmája

Kőnig-lemma

Véges és végesfokú játékban minden állás véges rendű.

Biz.

Legyen $\mathcal{J}$ véges, végesfokú játék, és tfh. a p állás rendje végtelen. Legyenek a p-ből egy lépésben elérhető állások $q_1, \ldots, q_k$.

Ha ezek mind véges rendűek lennének, akkor

$$o(p) = 1 + \max\{o(q_1), \ldots, o(q_k)\} < \infty. \lightning$$

Kőnig Dénes lemmája

Kőnig-lemma

Véges és végesfokú játékban minden állás véges rendű.

Biz.

Legyen $\mathcal{J}$ véges, végesfokú játék, és tfh. a p állás rendje végtelen.
Legyenek a p-ből egy lépésben elérhető állások $q_1, \ldots, q_k$.

Ha ezek mind véges rendűek lennének, akkor

$$o(p) = 1 + \max\{o(q_1), \ldots, o(q_k)\} < \infty. \ \lightning$$

Tehát $\exists i: \ o(q_i) = \infty$.

Kőnig Dénes lemmája

Kőnig-lemma

Véges és végesfokú játékban minden állás véges rendű.

Biz.

Legyen $\mathcal{J}$ véges, végesfokú játék, és tfh. a p állás rendje végtelen. Legyenek a p-ből egy lépésben elérhető állások $q_1, \ldots, q_k$.

Ha ezek mind véges rendűek lennének, akkor

$$o(p) = 1 + \max\{o(q_1), \ldots, o(q_k)\} < \infty. \ \lightning$$

Tehát $\exists i: \ o(q_i) = \infty$. Ezzel beláttuk, hogy végtelen rendű állásból mindig lehet végtelen rendű állásba lépni.

Kőnig Dénes lemmája

Kőnig-lemma

Véges és végesfokú játékban minden állás véges rendű.

Biz.
Legyen $\mathcal{J}$ véges, végesfokú játék, és tfh. a p állás rendje végtelen.
Legyenek a p-ből egy lépésben elérhető állások $q_1, \ldots, q_k$.

Ha ezek mind véges rendűek lennének, akkor

$$o(p) = 1 + \max\{o(q_1), \ldots, o(q_k)\} < \infty. \lightning$$

Tehát $\exists i: \; o(q_i) = \infty$. Ezzel beláttuk, hogy végtelen rendű állásból mindig lehet végtelen rendű állásba lépni.

Így a $p \to q_i \to \cdots$ játszmát végtelen sokáig lehet folytatni.

Kőnig Dénes lemmája

Kőnig-lemma

Véges és végesfokú játékban minden állás véges rendű.

Biz.

Legyen $\mathcal{J}$ véges, végesfokú játék, és tfh. a p állás rendje végtelen.
Legyenek a p-ből egy lépésben elérhető állások $q_1, \dots, q_k$.

Ha ezek mind véges rendűek lennének, akkor

$$o(p) = 1 + \max\{o(q_1), \dots, o(q_k)\} < \infty. \ \lightning$$

Tehát $\exists i:\ o(q_i) = \infty$. Ezzel beláttuk, hogy végtelen rendű állásból mindig lehet végtelen rendű állásba lépni.

Így a $p \to q_i \to \cdots$ játszmát végtelen sokáig lehet folytatni. $\lightning$

Kőnig Dénes lemmája

Kőnig-lemma

Véges és végesfokú játékban minden állás véges rendű.

Biz.

Legyen $\mathcal{J}$ véges, végesfokú játék, és tfh. a p állás rendje végtelen. Legyenek a p-ből egy lépésben elérhető állások $q_1, \ldots, q_k$.

Ha ezek mind véges rendűek lennének, akkor

$$o\left(p\right) = 1 + \max\left\{o\left(q_1\right), \ldots, o\left(q_k\right)\right\} < \infty. \ \lightning$$

Tehát $\exists i: \ o\left(q_i\right) = \infty$. Ezzel beláttuk, hogy végtelen rendű állásból mindig lehet végtelen rendű állásba lépni.

Így a $p \to q_i \to \cdots$ játszmát végtelen sokáig lehet folytatni. $\lightning$ $\square$

Kombinatorikai játékok

- Kétszemélyes kombinatorikai játék:
  diszkrét, determinisztikus, teljes információs, véges

Kombinatorikai játékok

- Kétszemélyes kombinatorikai játék:
  diszkrét, determinisztikus, teljes információs, véges

- Egyszemélyes kombinatorikai játék:
  diszkrét, determinisztikus, teljes információs, végesfokú

Kombinatorikai játékok

- Kétszemélyes kombinatorikai játék:
  diszkrét, determinisztikus, teljes információs, véges

- Egyszemélyes kombinatorikai játék:
  diszkrét, determinisztikus, teljes információs, végesfokú
- Személytelen kombinatorikai játék:
  diszkrét, determinisztikus

Kombinatorikai játékok

- Kétszemélyes kombinatorikai játék:
  diszkrét, determinisztikus, teljes információs, véges
- Egyszerű játék: ... + normál, szimmetrikus, végesfokú
- Egyszemélyes kombinatorikai játék:
  diszkrét, determinisztikus, teljes információs, végesfokú
- Személytelen kombinatorikai játék:
  diszkrét, determinisztikus

Stratégia

Stratégia kétszemélyes kombinatorikai játékban

Stratégia

Stratégia kétszemélyes kombinatorikai játékban

- A számára: olyan $s_1 \colon P \setminus N_2 \to P$ leképezés, amelyre $\forall p \in P \setminus N_2 \colon \left(p, s_1\left(p\right)\right) \in L_1$

Stratégia

Stratégia kétszemélyes kombinatorikai játékban

- A számára: olyan $s_1 \colon P \setminus N_2 \to P$ leképezés, amelyre $\forall p \in P \setminus N_2 \colon \ (p, s_1(p)) \in L_1$
- B számára: olyan $s_2 \colon P \setminus N_1 \to P$ leképezés, amelyre $\forall p \in P \setminus N_1 \colon \ (p, s_2(p)) \in L_2$

Stratégia

Stratégia kétszemélyes kombinatorikai játékban

- A számára: olyan $s_1 : P \setminus N_2 \to P$ leképezés, amelyre $\forall p \in P \setminus N_2 :\ (p, s_1(p)) \in L_1$
- B számára: olyan $s_2 : P \setminus N_1 \to P$ leképezés, amelyre $\forall p \in P \setminus N_1 :\ (p, s_2(p)) \in L_2$

Bachet: $10^{91} \cdot 9!$

Stratégia

Stratégia kétszemélyes kombinatorikai játékban

- A számára: olyan $s_1 : P \setminus N_2 \to P$ leképezés, amelyre $\forall p \in P \setminus N_2 :\ (p, s_1(p)) \in L_1$
- B számára: olyan $s_2 : P \setminus N_1 \to P$ leképezés, amelyre $\forall p \in P \setminus N_1 :\ (p, s_2(p)) \in L_2$

Bachet: $10^{91} \cdot 9!$

Ha A és B előre megválasztják a stratégiájukat, akkor a játszma így zajlik:

Stratégia

Stratégia kétszemélyes kombinatorikai játékban

- A számára: olyan $s_1 : P \setminus N_2 \to P$ leképezés, amelyre $\forall p \in P \setminus N_2 : \ (p, s_1(p)) \in L_1$
- B számára: olyan $s_2 : P \setminus N_1 \to P$ leképezés, amelyre $\forall p \in P \setminus N_1 : \ (p, s_2(p)) \in L_2$

Bachet: $10^{91} \cdot 9!$

Ha A és B előre megválasztják a stratégiájukat, akkor a játszma így zajlik:

$$p_0, \ s_1(p_0), \ s_2(s_1(p_0)), \ s_1(s_2(s_1(p_0))), \ \ldots, \ p_n$$

Stratégia

Stratégia kétszemélyes kombinatorikai játékban

- A számára: olyan $s_1 \colon P \setminus N_2 \to P$ leképezés, amelyre $\forall p \in P \setminus N_2 \colon \ (p, s_1(p)) \in L_1$
- B számára: olyan $s_2 \colon P \setminus N_1 \to P$ leképezés, amelyre $\forall p \in P \setminus N_1 \colon \ (p, s_2(p)) \in L_2$

Bachet: $10^{91} \cdot 9!$

Ha A és B előre megválasztják a stratégiájukat, akkor a játszma így zajlik:

$$p_0,\ s_1(p_0),\ s_2(s_1(p_0)),\ s_1(s_2(s_1(p_0))),\ \ldots,\ p_n$$

stratégiai játékok, kő-papír-olló

Stratégia

Stratégia kétszemélyes kombinatorikai játékban

- A számára: olyan $s_1 \colon P \setminus N_2 \to P$ leképezés, amelyre $\forall p \in P \setminus N_2 \colon \left(p, s_1(p)\right) \in L_1$
- B számára: olyan $s_2 \colon P \setminus N_1 \to P$ leképezés, amelyre $\forall p \in P \setminus N_1 \colon \left(p, s_2(p)\right) \in L_2$

Bachet: $10^{91} \cdot 9!$

Ha A és B előre megválasztják a stratégiájukat, akkor a játszma így zajlik:

$$p_0,\ s_1(p_0),\ s_2(s_1(p_0)),\ s_1(s_2(s_1(p_0))),\ \ldots,\ p_n$$

stratégiai játékok, kő-papír-olló

Másrészt tetszőleges $p_0, p_1, p_2, \ldots, p_n$ játszma előáll a fenti alakban

Stratégia

Stratégia kétszemélyes kombinatorikai játékban

- A számára: olyan $s_1 \colon P \setminus N_2 \to P$ leképezés, amelyre $\forall p \in P \setminus N_2 \colon \left(p, s_1\left(p\right)\right) \in L_1$
- B számára: olyan $s_2 \colon P \setminus N_1 \to P$ leképezés, amelyre $\forall p \in P \setminus N_1 \colon \left(p, s_2\left(p\right)\right) \in L_2$

Bachet: $10^{91} \cdot 9!$

Ha A és B előre megválasztják a stratégiájukat, akkor a játszma így zajlik:

$$p_0,\ s_1\left(p_0\right),\ s_2\left(s_1\left(p_0\right)\right),\ s_1\left(s_2\left(s_1\left(p_0\right)\right)\right),\ \ldots,\ p_n$$

stratégiai játékok, kő-papír-olló

Másrészt tetszőleges $p_0, p_1, p_2, \ldots, p_n$ játszma előáll a fenti alakban olyan s_1, s_2 stratégiákkal, amelyekre

$$s_1\left(p_0\right) = p_1,\ s_1\left(p_2\right) = p_3,\ s_1\left(p_4\right) = p_5,\ \ldots$$
$$s_2\left(p_1\right) = p_2,\ s_2\left(p_3\right) = p_4,\ s_2\left(p_5\right) = p_6,\ \ldots$$

Nyerő stratégia

- s_1 nyerő stratégia A-nak, ha B bármely s_2 stratégiája esetén nyerést biztosít A számára

Nyerő stratégia

- s_1 nyerő stratégia A-nak, ha B bármely s_2 stratégiája esetén nyerést biztosít A számára
- s_2 nyerő stratégia B-nek, ha A bármely s_1 stratégiája esetén nyerést biztosít B számára

Nyerő stratégia

- s_1 nyerő stratégia A-nak, ha B bármely s_2 stratégiája esetén nyerést biztosít A számára
- s_2 nyerő stratégia B-nek, ha A bármely s_1 stratégiája esetén nyerést biztosít B számára
- s_1 biztonságos stratégia A-nak, ha B bármely s_2 stratégiája esetén legalább döntetlent biztosít A számára

Nyerő stratégia

- s_1 nyerő stratégia A-nak, ha B bármely s_2 stratégiája esetén nyerést biztosít A számára
- s_2 nyerő stratégia B-nek, ha A bármely s_1 stratégiája esetén nyerést biztosít B számára
- s_1 biztonságos stratégia A-nak, ha B bármely s_2 stratégiája esetén legalább döntetlent biztosít A számára
- s_2 biztonságos stratégia B-nek, ha A bármely s_1 stratégiája esetén legalább döntetlent biztosít B számára

Nyerő stratégia

- s_1 nyerő stratégia A-nak, ha B bármely s_2 stratégiája esetén nyerést biztosít A számára
- s_2 nyerő stratégia B-nek, ha A bármely s_1 stratégiája esetén nyerést biztosít B számára
- s_1 biztonságos stratégia A-nak, ha B bármely s_2 stratégiája esetén legalább döntetlent biztosít A számára
- s_2 biztonságos stratégia B-nek, ha A bármely s_1 stratégiája esetén legalább döntetlent biztosít B számára

Tétel (Neumann János 1928)

Kétszemélyes definit kombinatorikai játékban

- valamelyik játékosnak van nyerő stratégiája,

Nyerő stratégia

- s_1 nyerő stratégia A-nak, ha B bármely s_2 stratégiája esetén nyerést biztosít A számára
- s_2 nyerő stratégia B-nek, ha A bármely s_1 stratégiája esetén nyerést biztosít B számára
- s_1 biztonságos stratégia A-nak, ha B bármely s_2 stratégiája esetén legalább döntetlent biztosít A számára
- s_2 biztonságos stratégia B-nek, ha A bármely s_1 stratégiája esetén legalább döntetlent biztosít B számára

Tétel (Neumann János 1928)

Kétszemélyes definit kombinatorikai játékban

- valamelyik játékosnak van nyerő stratégiája, vagy pedig
- mindkét játékosnak van biztonságos stratégiája.

Nyerő stratégia

- s_1 nyerő stratégia A-nak, ha B bármely s_2 stratégiája esetén nyerést biztosít A számára
- s_2 nyerő stratégia B-nek, ha A bármely s_1 stratégiája esetén nyerést biztosít B számára
- s_1 biztonságos stratégia A-nak, ha B bármely s_2 stratégiája esetén legalább döntetlent biztosít A számára
- s_2 biztonságos stratégia B-nek, ha A bármely s_1 stratégiája esetén legalább döntetlent biztosít B számára

Tétel (Neumann János 1928)

Kétszemélyes definit kombinatorikai játékban

- valamelyik játékosnak van nyerő stratégiája, vagy pedig
- mindkét játékosnak van biztonságos stratégiája.

kifizetési mátrix

Nyerő stratégia

- s_1 nyerő stratégia A-nak, ha B bármely s_2 stratégiája esetén nyerést biztosít A számára
- s_2 nyerő stratégia B-nek, ha A bármely s_1 stratégiája esetén nyerést biztosít B számára
- s_1 biztonságos stratégia A-nak, ha B bármely s_2 stratégiája esetén legalább döntetlent biztosít A számára
- s_2 biztonságos stratégia B-nek, ha A bármely s_1 stratégiája esetén legalább döntetlent biztosít B számára

Tétel (Neumann János 1928)

Kétszemélyes definit kombinatorikai játékban

- valamelyik játékosnak van nyerő stratégiája, vagy pedig
- mindkét játékosnak van biztonságos stratégiája.

kifizetési mátrix

Tétel (Ralph Gasser 1994)

A malomban mindkét játékosnak van biztonságos stratégiája.