Betli játékok

Hisztizzünk!

- normál játék: $\mathcal{J} = (P, L, V)$; aki V-be lép, az nyer
- betli játék: $\mathcal{J}' = (P, L, V)$; aki V-be lép, az veszít
- hiszti-változat: $\mathcal{J}^h = \left(P^h, L^h, V^h\right)$; aki V-be lép, az nyer

$$\begin{aligned} P^h &= P \,\dot\cup\, \{h\} \\ L^h &= L \cup \{(v, h) \mid v \in V\} = L \cup (V \times \{h\}) \\ V^h &= \{h\} \end{aligned}$$

A $\mathcal{J}'$ játékot megnyerni „ugyanaz”, mint a $\mathcal{J}^h$ játékot megnyerni.

Legyen γ^h a $\mathcal{J}^h$ játék SG-függvénye:

$$\begin{aligned} \gamma^h(h) &= 0 \\ \forall v \in V: \quad \gamma^h(v) &= \text{mex}\left\{\gamma^h(h)\right\} = \text{mex}\,\{0\} = 1 \\ \forall p \in P \setminus V: \quad \gamma^h(p) &= \text{mex}\left\{\gamma^h(q) \mid (p, q) \in L\right\} \end{aligned}$$

Betli Wythoff-nim vs. normál Wythoff-nim

	5	3	4	0	6	8
	4	5	3	2	7	6
	3	4	5	6	2	0
	2	**1**	**0**	5	3	4
	0	**2**	**1**	4	5	3
	1	**0**	**2**	3	4	5
0						

5	3	4	0	6	8
4	5	3	2	7	6
3	4	5	6	2	0
2	**0**	**1**	5	3	4
1	**2**	**0**	4	5	3
0	**1**	**2**	3	4	5

Normál nim

Legyen $p = (n_1, \dots, n_k) \in \mathbb{N}_0^k$ a k-csomós nim egy állása.
Azt mondjuk, hogy...

- p nagy állás, ha legalább két kupacban van legalább két kavics:
$$\exists i \neq j: \quad n_i \geq 2 \text{ és } n_j \geq 2;$$
- p átmeneti állás, ha pontosan egy kupacban van legalább két kavics:
$$\exists! i: \quad n_i \geq 2;$$
- p kicsi állás, ha minden kupacban legfeljebb egy kavics van:
$$\forall i: \quad n_i \leq 1.$$

Csak ilyen lépések lehetségesek:

nagy $\rightarrow$ nagy átmeneti $\rightarrow$ átmeneti kicsi $\rightarrow$ kicsi
nagy $\rightarrow$ átmeneti átmeneti $\rightarrow$ kicsi

Normál nim

Emlékeztető: a k-csomós normál nim SG-függvénye:

$$\gamma(n_1, \dots, n_k) = n_1 \oplus \dots \oplus n_k.$$

Egy kicsi állás akkor és csak akkor jó, ha páros sok 1-est tartalmaz.

Tétel

Az átmeneti állások mind rosszak.

1. biz.

Minden átmeneti állás így fest (sorrendtől eltekintve):

$$\big(0, \dots, 0, \underbrace{1, \dots, 1}_{\ell}, n\big), \qquad \ell \geq 0, n \geq 2.$$

A SG-függvény értéke egy ilyen álláson:

$$0 \oplus \cdots 0 \oplus 1 \oplus \cdots \oplus 1 \oplus n = \begin{cases} n, & \text{ha } \ell \text{ páros,} \\ 1 \oplus n, & \text{ha } \ell \text{ páratlan.} \end{cases}$$

Mivel $n \geq 2$, egyik esetben sem kapunk nullát. $\square$

Normál nim

Tétel

Az átmeneti állások mind rosszak.

2. biz.

Tekintsük a következő átmeneti állást:

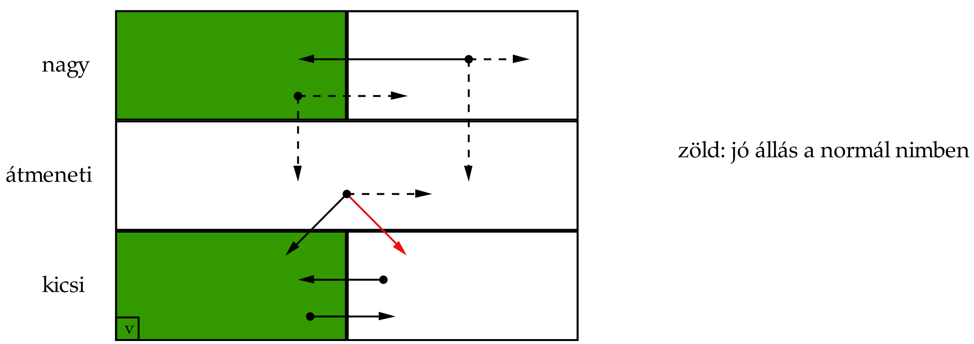
$$p := \big(0, \dots, 0, \underbrace{1, \dots, 1}_{\ell}, n\big), \qquad \ell \geq 0, n \geq 2.$$

Ebből tudunk lépni a következő két kicsi állásba:

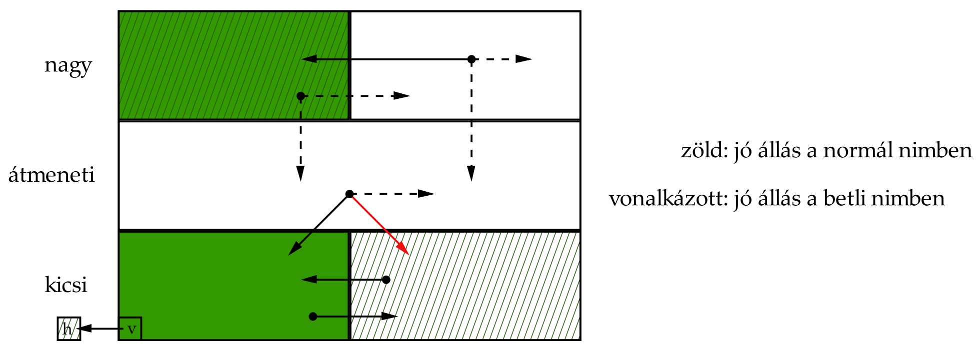
$$q_1 := \big(0, \dots, 0, \underbrace{1, \dots, 1}_{\ell}, 1\big), \qquad q_2 := \big(0, \dots, 0, \underbrace{1, \dots, 1}_{\ell}, 0\big).$$

A q_1 és q_2 állások közül az egyik jó állás (ha ℓ páros, akkor q_2 jó, ha ℓ páratlan, akkor q_1 jó). Tehát p-ből lehet jó állásba lépni, ezért p rossz állás. $\square$

Normál nim



Betli nim

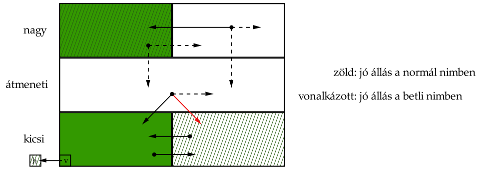


Betli nim

Tétel

A hisztis nim jó állásai éppen a normál nim nagy jó állásai és kis rossz állásai (valamint a hiszti-állás).

Biz.



□

Következmény

A betli nim nyerő stratégiája majdnem ugyanaz, mint a normál nimé, csak a végjátékot kell módosítani: amikor átmeneti állásból kis állásba készülünk lépni, akkor páratlan sok 1-est tartalmazó kis állásba kell lépnünk.

Betli kivonási játékok

$K = \{2, 6\}$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
$\gamma(n)$	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0
$\gamma^h(n)$	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1

$K = \{2, 5\}$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
$\gamma(n)$	0	0	1	1	0	2	1	0	0	1	1	0	2	1	0	0	1	1
$\gamma^h(n)$	1	1	0	0	1	2	0	1	1	0	0	1	2	0	1	1	0	0

Betli kivonási játékok

$K = \{1, 3, 4\}$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
$\gamma(n)$	0	1	0	1	2	3	2	0	1	0	1	2	3	2	0	1	0	1
$\gamma^h(n)$	1	0	1	0	2	3	2	1	0	1	0	2	3	2	1	0	1	0

$K = \{2, 4, 7\}$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
$\gamma(n)$	0	0	1	1	2	2	0	3	1	0	2	1	0	2	1	0	2	1
$\gamma^h(n)$	1	1	0	0	2	2	1	3	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0

Betli kivonási játékok

Lemma (Ferguson-párok)

Legyen a $K = \{a_1, a_2, \dots\}$ kivonási halmazú ($a_1 = \min K$) kivonási játék SG-függvénye γ. Ekkor

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : \ \gamma(n) = 1 \iff \gamma(n - a_1) = 0.$$

Biz.

Tfh. nem igaz az állítás, és legyen n a legkisebb ellenpélda. Két eset lehetséges:

1. $\gamma(n) = 1$ de $\gamma(n - a_1) \neq 0$

$$\gamma(n - a_1) \neq 0 \quad \overset{SG}{\Longrightarrow} \quad \exists i : \gamma(n - a_1 - a_i) = 0$$
$$\overset{n \text{ mini}}{\Longrightarrow} \quad \gamma(n - a_i) = 1 \ \lightning\ \gamma(n) = 1$$

Betli kivonási játékok

Lemma (Ferguson-párok)

Legyen a $K = \{a_1, a_2, \ldots\}$ kivonási halmazú ($a_1 = \min K$) kivonási játék SG-függvénye γ. Ekkor

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : \ \gamma(n) = 1 \iff \gamma(n - a_1) = 0.$$

Biz.

Tfh. nem igaz az állítás, és legyen n a legkisebb ellenpélda. Két eset lehetséges:

2. $\gamma(n - a_1) = 0$ de $\gamma(n) \neq 1$

$$\begin{aligned} \gamma(n-a_1) = 0 \quad &\overset{SG}{\Longrightarrow} \quad \gamma(n) \neq 0 \\ &\Longrightarrow \quad \gamma(n) \geq 2 \\ &\overset{SG}{\Longrightarrow} \quad \exists i : \gamma(n - a_i) = 1 \\ &\overset{n \text{ mini}}{\Longrightarrow} \quad \gamma(n - a_i - a_1) = 0 \ \lightning \ \gamma(n - a_1) = 0 \end{aligned}$$

$\square$

Betli kivonási játékok

Ferguson tétele

Bármely kivonási játék hisztis és normál változatának SG-függvénye között az alábbi összefüggés áll fenn:

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : \ \gamma^h(n) = \begin{cases} 1, & \text{ha } \gamma(n) = 0; \\ 0, & \text{ha } \gamma(n) = 1; \\ \gamma(n), & \text{ha } \gamma(n) \geq 2. \end{cases}$$

Biz.

Teljes indukcióval bizonyítunk. Ha $n < a_1$, akkor $\gamma(n) = 0$ és $\gamma^h(n) = 1$.

Legyen most már $n > a_1$ és tfh. $(n-1)$-ig igaz az állítás (IH).

$$\begin{aligned} \gamma(n) &= \text{mex}\{\gamma(n - a_1), \gamma(n - a_2), \ldots\} &&= \text{mex}\, H \\ \gamma^h(n) &= \text{mex}\{\gamma^h(n - a_1), \gamma^h(n - a_2), \ldots\} &&= \text{mex}\, H^h \end{aligned}$$

Betli kivonási játékok

Biz. (folyt.) $\gamma(n) = \text{mex}\, H$, $\gamma^h(n) = \text{mex}\, H^h$

Három esetet különböztetünk meg:

1. $\gamma(n) \geq 2$

$$\gamma(n) \geq 2 \overset{SG}{\Longrightarrow} 0, 1 \in H \overset{IH}{\Longrightarrow} H^h = H \overset{SG}{\Longrightarrow} \gamma^h(n) = \gamma(n) \checkmark$$

2. $\gamma(n) = 1$

$$\gamma(n) = 1 \overset{SG}{\Longrightarrow} 0 \in H, 1 \notin H \overset{IH}{\Longrightarrow} 1 \in H^h, 0 \notin H^h \overset{SG}{\Longrightarrow} \gamma^h(n) = 0 \checkmark$$

3. $\gamma(n) = 0$

$$\gamma(n) = 0 \overset{SG}{\Longrightarrow} 0 \notin H \overset{IH}{\Longrightarrow} 1 \notin H^h \not\Longrightarrow \gamma^h(n) = 1 \ ☹$$

Szükségünk van arra, hogy $0 \in H^h$, azaz $1 \in H$.

$$\begin{aligned} \gamma(n) = 0 \quad &\overset{SG}{\Longrightarrow} \quad \gamma(n - a_1) \neq 0 \\ &\overset{SG}{\Longrightarrow} \quad \exists i : \gamma(n - a_1 - a_i) = 0 \\ &\overset{F.\text{-}p.}{\Longrightarrow} \quad \gamma(n - a_i) = 1 \\ &\Longrightarrow \quad 1 \in H \overset{IH}{\Longrightarrow} 0 \in H^h \Longrightarrow \gamma^h(n) = 1 \checkmark \end{aligned}$$

$\square$

További betli játékok

Gyakori jelenség, hogy egy játék betli változata sokkal nehezebb, mint a normál. Előfordulhat az is, hogy a normál változat triviális, a betli változat viszont érdekes (és nehéz). Ilyen például a harapás (chomp), Gale lefedős játéka, és a taktix (lásd a 3.11. és 3.12. alfejezeteket).