# Pell-egyenletek

# Emlékeztető

Tekintsük a $\mathbb{Z}\left[\sqrt{d}\right] = \left\{a + b\sqrt{d} : a, b \in \mathbb{Z}\right\}$ gyűrűt, ahol $d > 1$ négyzetmentes.

## Definíció.

Az $\alpha = a + b\sqrt{d}$ elem normája:

$$N(\alpha) = \alpha \cdot \overline{\alpha} = \left(a + b\sqrt{d}\right) \cdot \left(a - b\sqrt{d}\right) = a^2 - db^2.$$

## Állítás.

Az egységek éppen a $\pm 1$ normájú elemek:

$$\begin{aligned} \alpha = a + b\sqrt{d} \in \mathbb{Z}\left[\sqrt{d}\right]^* &\iff N(\alpha) = \pm 1 \\ &\iff a^2 - db^2 = \pm 1. \end{aligned}$$

Tehát a $\mathbb{Z}\left[\sqrt{d}\right]$ gyűrű egységei szoros kapcsolatban vannak a **Pell-egyenletekkel**:

(pozitív) Pell-egyenlet: $x^2 - dy^2 = 1$ (triviális megoldás: $x_0 = 1, y_0 = 0$),

negatív Pell-egyenlet: $x^2 - dy^2 = -1$ (nem mindig van megoldás).

# Emlékeztető

Legyen $(x_1, y_1)$ a legkisebb pozitív megoldása az $x^2 - dy^2 = \pm 1$ egyenleteknek, és legyen $\varepsilon = x_1 + y_1\sqrt{d}$ (fundamentális egység), továbbá legyen $\varepsilon^n = x_n + y_n\sqrt{d}$.

## Tétel (Dirichlet).

A $\mathbb{Z}\left[\sqrt{d}\right]$ gyűrű egységcsoportja: $\mathbb{Z}\left[\sqrt{d}\right]^* = \left\{\pm\varepsilon^k : k \in \mathbb{Z}\right\}$.

## Következmény.

1. Ha $N(\varepsilon) = 1$, akkor
   - a pozitív Pell-egyenlet összes megoldása $(\pm x_n, \pm y_n)$, ahol $n \in \mathbb{N}_0$,
   - a negatív Pell-egyenletnek nincs megoldása.
2. Ha $N(\varepsilon) = -1$, akkor
   - a pozitív Pell-egyenlet összes megoldása $(\pm x_n, \pm y_n)$, ahol $n \in \mathbb{N}_0$ páros,
   - a negatív Pell-egyenlet összes megoldása $(\pm x_n, \pm y_n)$, ahol $n \in \mathbb{N}$ páratlan.

# $x^2 - 14y^2 = \pm 1$

$\sqrt{14} = [3; \overline{1, 2, 1, 6}]$

| | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 6 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 6 | 1 |
| | | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 3 | 1 | 4 | 3 | 11 | 4 | 15 | 11 | 101 | 15 | 116 | 101 | 333 | 116 | 449 | 333 | 3027 | 449 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 3 | 1 | 4 | 3 | 27 | 4 | 31 | 27 | 89 | 31 | 120 | 89 | 809 | 120 |

| $p$ | 3 | 4 | 11 | **15** | 101 | 116 | 333 | **449** | 3027 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $q$ | 1 | 1 | 3 | **4** | 27 | 31 | 89 | **120** | 809 | $\cdots$ |
| $p^2 - 14q^2$ | $-5$ | 2 | $-5$ | **1** | $-5$ | 2 | $-5$ | **1** | $-5$ | $\cdots$ |

$\left(15 + 4\sqrt{14}\right)^n = x_n + y_n\sqrt{14}$

$x^2 - 14y^2 = 1$: az összes megoldás $(\pm x_n, \pm y_n)$, ahol $n \in \mathbb{N}_0$

$x^2 - 14y^2 = -1$: nincs megoldás

# $x^2 - 13y^2 = \pm 1$

$\sqrt{13} = [3; \overline{1, 1, 1, 1, 6}]$

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 6 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 6 | 1 |
| | | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 3 | 1 | 4 | 3 | 7 | 4 | 11 | 7 | 18 | 11 | 119 | 18 | 137 | 119 | 256 | 137 | 393 | 256 | 649 | 393 | 4287 | 649 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 2 | 1 | 3 | 2 | 5 | 3 | 33 | 5 | 38 | 33 | 71 | 38 | 109 | 71 | 180 | 109 | 1189 | 180 |

| $p$ | 3 | 4 | 7 | 11 | **18** | 119 | 137 | 256 | 393 | **649** | 4287 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $q$ | 1 | 1 | 2 | 3 | **5** | 33 | 38 | 71 | 109 | **180** | 1189 | $\cdots$ |
| $p^2 - 13q^2$ | $-4$ | 3 | $-3$ | 4 | **-1** | 4 | $-3$ | 3 | $-4$ | **1** | $-4$ | $\cdots$ |

$\left(18 + 5\sqrt{13}\right)^n = x_n + y_n\sqrt{13}$

$x^2 - 13y^2 = 1$: az összes megoldás $(\pm x_n, \pm y_n)$, ahol $n \in \mathbb{N}_0$ páros

$x^2 - 13y^2 = -1$: az összes megoldás $(\pm x_n, \pm y_n)$, ahol $n \in \mathbb{N}$ páratlan

# A Pell-egyenletek legkisebb pozitív megoldásai

| | pozitív Pell | | negatív Pell | |
|---|---|---|---|---|
| $d$ | $x$ | $y$ | $x$ | $y$ |
| 2 | 3 | 2 | 1 | 1 |
| 3 | 2 | 1 | | |
| 5 | 9 | 4 | 2 | 1 |
| 6 | 5 | 2 | | |
| 7 | 8 | 3 | | |
| 10 | 19 | 6 | 3 | 1 |
| 11 | 10 | 3 | | |
| 13 | 649 | 180 | 18 | 5 |
| 14 | 15 | 4 | | |
| 15 | 4 | 1 | | |
| 17 | 33 | 8 | 4 | 1 |
| 19 | 170 | 39 | | |
| 21 | 55 | 12 | | |
| 22 | 197 | 42 | | |
| 23 | 24 | 5 | | |

# A Pell-egyenletek legkisebb pozitív megoldásai

| | pozitív Pell | | negatív Pell | |
|---|---|---|---|---|
| $d$ | $x$ | $y$ | $x$ | $y$ |
| 26 | 51 | 10 | 5 | 1 |
| 29 | 9 801 | 1 820 | 70 | 13 |
| 30 | 11 | 2 | | |
| 31 | 1 520 | 273 | | |
| 33 | 23 | 4 | | |
| 34 | 35 | 6 | | |
| 35 | 6 | 1 | | |
| 37 | 73 | 12 | 6 | 1 |
| 38 | 37 | 6 | | |
| 39 | 25 | 4 | | |
| 41 | 2 049 | 320 | 32 | 5 |
| 42 | 13 | 2 | | |
| 43 | 3 482 | 531 | | |
| 46 | 24 335 | 35 88 | | |
| 47 | 48 | 7 | | |

# A Pell-egyenletek legkisebb pozitív megoldásai

| | pozitív Pell | | negatív Pell | |
|---|---|---|---|---|
| $d$ | $x$ | $y$ | $x$ | $y$ |
| 51 | 50 | 7 | | |
| 53 | 66 249 | 9 100 | 182 | 25 |
| 55 | 89 | 12 | | |
| 57 | 151 | 20 | | |
| 58 | 19 603 | 2 574 | 99 | 13 |
| 59 | 530 | 69 | | |
| 61 | 1 766 319 049 | 226 153 980 | 29 718 | 3 805 |
| 62 | 63 | 8 | | |
| 65 | 129 | 16 | 8 | 1 |
| 66 | 65 | 8 | | |
| 67 | 48 842 | 5 967 | | |
| 69 | 7 775 | 936 | | |
| 70 | 251 | 30 | | |
| 71 | 3 480 | 413 | | |
| 73 | 2 281 249 | 267 000 | 1 068 | 125 |

# A pozitív Pell-egyenlet legk. poz. megoldásának nagyságrendje