FEJEZETEK A SZÁMELMÉLETBŐL ELŐADÁS

Waldhauser Tamás

SZTE Bolyai Intézet

2021. április 20.

$(SL_2(\mathbb{Z});\cdot)$ csoport hat az $\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ halmazon.

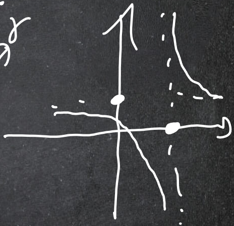
$$G = (SL_2(\mathbb{Z});\cdot) \qquad \Omega = \mathbb{R}\cup\{\infty\}$$

$$\forall g\in G \ \forall \omega\in\Omega : g\circ\omega\in\Omega$$

$$G \hookrightarrow S_\Omega \qquad h\circ(g\circ\omega) = (hg)\circ\omega$$

$$\alpha,\beta\in\Omega \qquad \alpha\sim\beta \iff \exists g\in\Omega : \beta = g\circ\alpha$$

$$\begin{tikzcd} \alpha \arrow[loop above, "1"] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \alpha \arrow[r, bend left, "g"] & \beta \arrow[l, bend left, "g^{-1}"] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \alpha \arrow[r, bend left, "g"] \arrow[rr, bend right, "gh"'] & \beta \arrow[r, bend left, "h"] & \gamma \end{tikzcd}$$



Definíció

Az n-edik Farey-sorozat a 0 és 1 közé eső redukált törtek sorozata, nagyság szerinti sorrendben.

Példák

1. $\mathcal{F}_1 : \frac{0}{1}, \frac{1}{1}$
2. $\mathcal{F}_2 : \frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}$
3. $\mathcal{F}_3 : \frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1}$
4. $\mathcal{F}_4 : \frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1}$
5. $\mathcal{F}_5 : \frac{0}{1}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1}$

Definíció

Két tört mediánsa: $\dfrac{a}{b} \oplus \dfrac{c}{d} = \dfrac{a+c}{b+d}$

Megjegyzés

- A mediáns függ a törtek alakjától (nem csak az értéküktől):
  $\dfrac{1}{2} \oplus \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{5}$ és $\dfrac{2}{4} \oplus \dfrac{1}{3} = \dfrac{3}{7}$.
- Redukált törtek mediánsa nem mindig redukált:
  $\dfrac{1}{2} \oplus \dfrac{2}{7} = \dfrac{3}{9}$.

Definíció

Az $\dfrac{a}{b} < \dfrac{c}{d}$ törtek közeliek, ha távolságuk $\dfrac{1}{bd}$:

$$\frac{c}{d} - \frac{a}{b} = \frac{bc - ad}{bd} = \frac{1}{bd}.$$

Vegyük észre, hogy ebből következik, hogy mindkét tört redukált.

1. Lemma

Ha $\dfrac{a}{b} < \dfrac{c}{d}$, akkor $\dfrac{a}{b} < \dfrac{a+c}{b+d} < \dfrac{c}{d}$.

Bizonyítás.

$$\frac{a+c}{b+d} - \frac{a}{b} = \frac{b(a+c) - a(b+d)}{b(b+d)} =$$

$$= \frac{ab + bc - ab - ad}{b(b+d)} = \frac{bc - ad}{b(b+d)} = \frac{1}{b(b+d)} \qquad \blacksquare$$

2. Lemma

Ha $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, akkor a közéjük eső legkisebb nevezőjű tört $\frac{a+c}{b+d}$.

Bizonyítás.

$\geq \frac{1}{bq}$ $\quad$ $\geq \frac{1}{qd}$

$$\frac{a}{b} < \frac{p}{q} < \frac{c}{d} \implies \frac{1}{bd} \geq \frac{1}{bq} + \frac{1}{dq}$$

$\frac{1}{bd}$

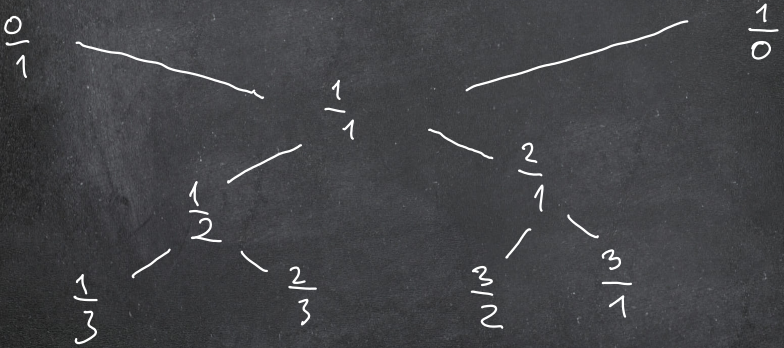
$$\Downarrow$$

$$q \geq b + d$$

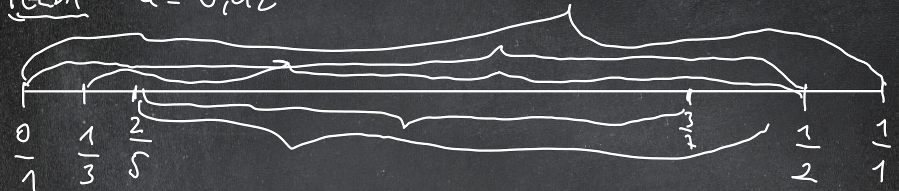
■

Tétel

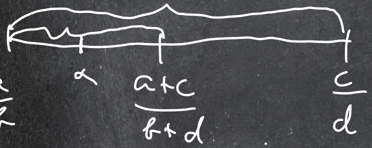
1. A Farey-sorozatok „legyárthatóak” mediánsképzéssel.
2. A szomszédos törtek mindig közeliek.
3. Ha $\dfrac{a}{b} < \dfrac{c}{d}$ közeliek, akkor ők szomszédosak valamelyik $\mathcal{F}_n$-ben (pl. $n = \max(b, d)$).



PÉLDA $\alpha = 0{,}42$

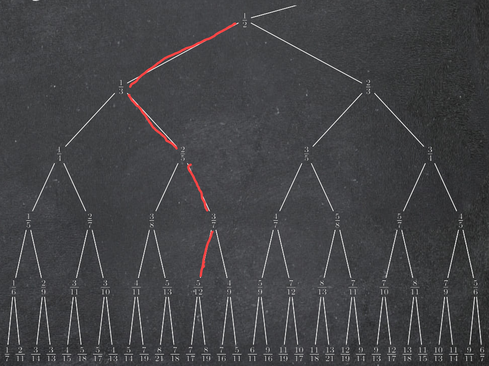


$\frac{0}{1} \xrightarrow{R}$, $\frac{1}{1} \xrightarrow{L}$ $\frac{1}{2} \xrightarrow{L} \frac{1}{3} \xrightarrow{R} \frac{2}{5} \xrightarrow{R} \frac{3}{7} \xrightarrow{L} \frac{5}{12}$

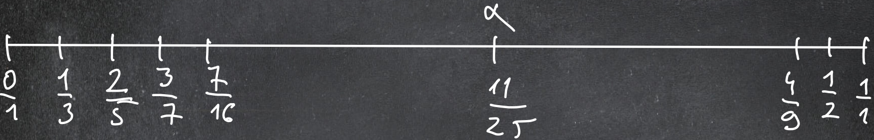


$\left[\frac{a}{b}, \frac{c}{d}\right] \xrightarrow{L} \left[\frac{a}{b}, \frac{a+c}{b+d}\right]$

$\cancel{\frac{a}{b}}, \frac{c}{d} \;? \xrightarrow{L} \frac{a+c}{b+d}$



PÉLDA $\alpha = 0{,}44 = \frac{11}{25}$



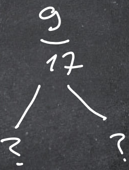
$$\frac{1}{2} \xrightarrow{L} \frac{1}{3} \xrightarrow{R} \frac{2}{5} \xrightarrow{R} \frac{3}{7} \xrightarrow{R} \frac{4}{9} \xrightarrow{L} \frac{7}{16} \xrightarrow{R} \frac{11}{25}$$

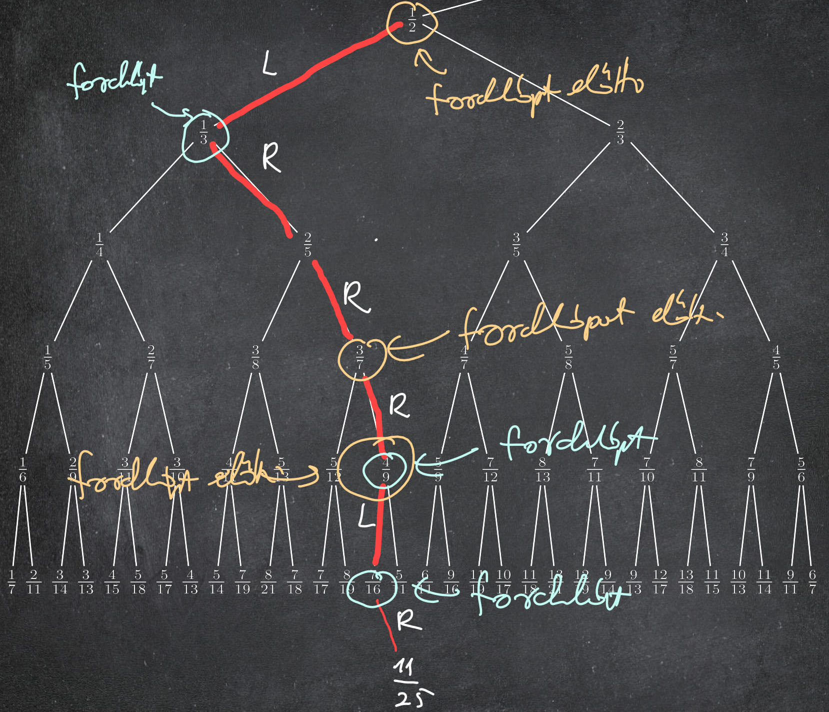
$$LRRRLR = LR^3LR$$

$\boxed{\text{HF24}}$ $68\% \approx \frac{p}{q}$

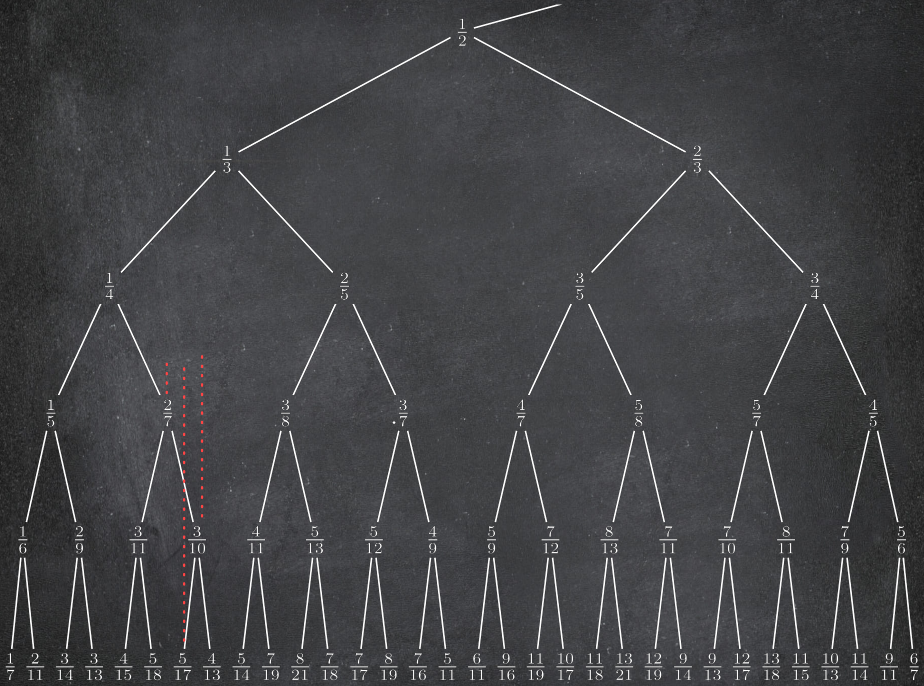
$\boxed{\text{HF25}}$ $\alpha = \frac{10}{17}$

$\boxed{\text{HF26}}$ $\frac{9}{17}$ út a gyökérig?





1/2
1/3
2/3
1/4
2/5
3/5
3/4
1/5
2/7
3/8
3/7
4/7
5/8
5/7
4/5
1/6
2/9
3/11
3/10
4/11
5/13
5/12
4/9
5/9
7/12
8/13
7/11
7/10
8/11
7/9
5/6
1/7
2/11
3/14
3/13
4/15
5/18
5/17
4/13
5/14
7/19
8/21
7/18
7/17
8/19
7/16
5/11
6/11
9/16
11/19
10/17
11/18
13/21
12/19
9/14
9/13
12/17
13/18
11/15
10/13
11/14
9/11
6/7
L
R
R
R
L
R
11/25


1/2
1/3 2/3
1/4 2/5 3/5 3/4
1/5 2/7 3/8 3/7 4/7 5/8 5/7 4/5
1/6 2/9 3/11 3/10 4/11 5/13 5/12 4/9 5/9 7/12 8/13 7/11 7/10 8/11 7/9 5/6
1/7 2/11 3/14 3/13 4/15 5/18 5/17 4/13 5/14 7/19 8/21 7/18 7/17 8/19 7/16 5/11 6/11 9/16 11/19 10/17 11/18 13/21 12/19 9/14 9/13 12/17 13/18 11/15 10/13 11/14 9/11 6/7

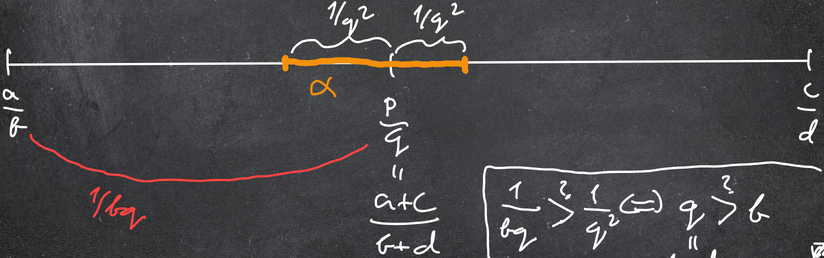
DEF. $\alpha \approx \frac{p}{q}$ jó közelítése, ha $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}$

$\alpha \approx \frac{p}{q}$ pompás közelítés, ha $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{2q^2}$

FSB

TÉTEL Minden jó közelítés fellép az FSB-algoritmus során.

Biz. Tfh. $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}$. Tekintsük $\frac{p}{q}$ FSB-közelítéseinek utolsó lépését.

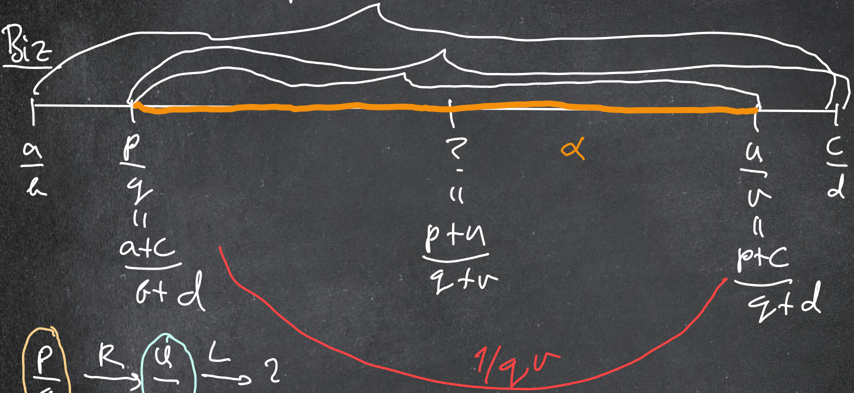


$$\frac{1}{bq} \overset{?}{>} \frac{1}{q^2} \iff \underset{b+d}{\overset{\shortparallel}{q}} \overset{?}{>} b$$

∎

TÉTEL Minden fordulópont előtti közelítés jó.

Biz



$$\frac{p}{q} \xrightarrow{R} \frac{u}{v} \xrightarrow{L} ?$$

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \le \left|\frac{u}{v} - \frac{p}{q}\right| = \frac{1}{qv} \overset{?}{<} \frac{1}{q^2} \iff q \overset{3}{<} v \checkmark$$

$$v = q+d$$

∎

TÉTEL Pompás közelítés csak fordulópont előtt léphet fel.

Biz: Tfh. $\frac{p}{q}$ nem fordulópont előtti. Cél: $\frac{p}{q}$ nem pompás közelítés

$$\frac{p}{q} \xrightarrow{R} \frac{u}{v} \xrightarrow{R} ?$$

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geq \left|\frac{p}{q} - \frac{u}{v}\right| = \frac{1}{qv} \overset{?}{\geq} \frac{1}{2q^2} \iff 2q \overset{?}{\geq} v = q+d$$

$$\iff \underset{b+d}{q} \overset{?}{\geq} d$$

$\boxtimes$

pompás $\subseteq$ fordulópont elkerülő $\subseteq$ jó $\subseteq$ FSB