FEJEZETEK A SZÁMELMÉLETBŐL ELŐADÁS

Waldhauser Tamás

SZTE Bolyai Intézet

2021. április 13.

$$x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d} = f_{a,b,c,d}(x) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \circ x$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \circ \left[\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \circ x \right] = \underbrace{\begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}} \circ x$$

$$\forall A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2} \ \forall x \in \mathbb{R}: \quad A \circ (B \circ x) = (A \cdot B) \circ x$$

$\boxed{\text{HF21}}$ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\alpha \sim \beta \iff \exists a, b, c, d \in \mathbb{Z}: \ ad - bc = 1 \text{ és } \beta = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \circ \alpha$$
$$\iff \exists A \in SL_2(\mathbb{Z}) \ : \ \beta = A \circ \alpha$$

$$SL_2(\mathbb{Z}) = \{ A \in \mathbb{Z}^{2\times 2} \mid \det(A) = 1 \}$$

Biz. be. $\sim$ ekvivalenciareláció!

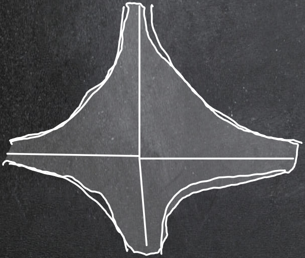
jó közelítés: $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}$

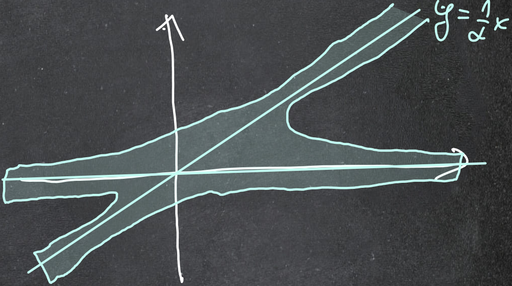
$$\left|\alpha - \frac{x}{y}\right| < \frac{1}{y^2}$$

$$\left\{(x,y) \;\middle|\; |y|\cdot|\alpha y - x| < 1\right\} \subseteq \mathbb{R}\times\mathbb{R}$$

$\alpha = 0$: $\quad |y\cdot x| < 1$

$$y\cdot(\alpha y - x) = 1$$





DEF. $\alpha \in \mathbb{R}$ irracionalitási mértéke:

$$r(\alpha) = \sup\left\{ n \in \mathbb{R}^+ \;\middle|\; \exists \infty \text{ sok } \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} : \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^n} \right\}$$

LIOUVILLE TÉTELE Ha α egy n-edfokú $\underbrace{\text{algebrai}}_{\text{irrac.}}$ szám, akkor

$$r(\alpha) \leq n.$$

Biz. $f \in \mathbb{Z}[x]$, $\deg f = n \geq 2$, $f(\alpha) = 0$, f irred. $\mathbb{Q}$ felett

$$f = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = a_n (x - \underset{\alpha}{\underset{\|}{\alpha_1}}) \cdot (x - \alpha_2) \cdot \ldots \cdot (x - \alpha_n)$$

Tfh. $r(\alpha) > n \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 \;\exists \frac{p_k}{q_k} \in \mathbb{Q} : \left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| < \frac{1}{q_k^{n+\varepsilon}}$

$$q_k^n \left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| < \frac{1}{q_k^{\varepsilon}} \to 0 \quad (k \to \infty)$$

$$q_k^n \cdot \left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| \to 0$$

$$q_k^n \cdot \Big|\underbrace{f\left(\frac{p_k}{q_k}\right)}_{\substack{\neq \ (n \geq 2) \\ 0}}\Big| = \underbrace{q_k^n \cdot \left|a_n \frac{p_k^n}{q_k^n} + a_{n-1} \cdot \frac{p_k^{n-1}}{q_k^{n-1}} + \dots + a_0\right|}_{\in \mathbb{N}} \geq 1$$

$$q_k^n \cdot \left|f\left(\frac{p_k}{q_k}\right)\right| = \underbrace{\underbrace{q_k^n \cdot \left|\frac{p_k}{q_k} - \alpha\right|}_{\downarrow \atop 0} \cdot \underbrace{\left|\frac{p_k}{q_k} - \alpha_2\right|}_{\downarrow \atop |\alpha - \alpha_2|} \cdot \dots \cdot \underbrace{\left|\frac{p_k}{q_k} - \alpha_n\right|}_{\downarrow \atop |\alpha - \alpha_n|}}_{\downarrow \atop 0}$$

↯ ▨

DEF α egy Liouville-féle szám, ha $r(\alpha)=\infty$.

KÖV: Minden Liouville-féle szám transzcendens.

DEF A Liouville-szám: $0{,}1100010\ldots01|0\ldots010\ldots$ $11\ldots$

$$=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{10^{i!}}=\lambda$$

TÉTEL (LIOUVILLE, 1844). Ez a szám transzcendens.

Biz: Elég belátni, hogy $r(\lambda)=\infty$, azaz $\forall n\in\mathbb{N}: r(\lambda)\geq n$.

$$\frac{p_k}{q_k}=\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{10^{i!}}=\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\ldots+\frac{1}{10^{k!}}=\frac{\ldots 1}{10^{k!}}\begin{matrix}\leftarrow p_k\\ \leftarrow q_k\end{matrix}$$

$$\left|\lambda-\frac{p_k}{q_k}\right|=\sum_{i=k+1}^{\infty}\frac{1}{10^{i!}}<\sum_{j=(k+1)!}^{\infty}\frac{1}{10^{j}}=\frac{10/9}{10^{(k+1)!}}=\frac{10/9}{q_k^{k+1}}\overset{?}{<}\frac{1}{q_k^{n}}$$

$\frac{10}{9} \overset{?}{<} \frac{q_k^{k+1}}{q_k^{n}}$ igaz, ha $k \geq n$.

Tehát $\frac{p_n}{q_n}, \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}, \dots$ n-edrendű közelítések.

$\Rightarrow r(\lambda) \geq n$.

Itt n tetsz. poz. egész $\Rightarrow r(\lambda) = \infty$.

Ha α algebrai szám n-edfokú minimálpolinommal ($n \geq 2$), akkor...

- $r(\alpha) \leq n$ (Liouville, 1844)
- $r(\alpha) \leq \frac{n}{2} + 1$ (Thue, 1909)
- $r(\alpha) \leq 2\sqrt{n}$ (Siegel, 1921)
- $r(\alpha) \leq \sqrt{2n}$ (Dyson, 1947)
- $r(\alpha) \leq 2$ (Roth, 1955)

TÉTEL $\alpha \in \mathbb{R}$

- $\alpha \in \mathbb{Q} \Rightarrow r(\alpha) = 1$
- α irrac. algebrai szám $\Rightarrow r(\alpha) = 2$
- α transzcendens szám $\Rightarrow r(\alpha) \geq 2$

$r(e) = 2 \quad r(\pi) \leq 7{,}61 \quad r(\ln 2) \leq 3{,}58$

$\{\alpha \mid r(\alpha) > 2\} \subseteq \mathbb{R}$ 0-mértékű halmaz (KINCHIN, 1926)

- Euler (1737): e irracionális
- Lambert (1761): π irracionális
- Liouville (1844): $\sum \frac{1}{10^{n!}}$ transzcendens
- Hermite (1873): e transzcendens
- Lindemann (1882) és Weierstrass (1885): Ha $\alpha \neq 0$ algebrai szám, akkor e^α transzcendens. ($\implies \pi$ transzcendens)
- Gelfond (1934) és Schneider (1934): Ha $\alpha \neq 0, 1$ algebrai szám és β irracionális algebrai szám, akkor α^β transzcendens.

π alg. $\Rightarrow \pi i$ is alg.

$\Rightarrow e^{i\pi}$ tr. $\lightning$

$e^{i\pi} = -1$

$2^{\sqrt{2}} \quad \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ tr.

$\exists ?\ a, b$ irrac. a^b rac.

$\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ rac   v. $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ irrac

$a = \sqrt{2},\ b = \sqrt{2}$ $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}},\ b = \sqrt{2}$

$$a^b = \left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{2} = 2$$

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{c \cdot q^2}$$

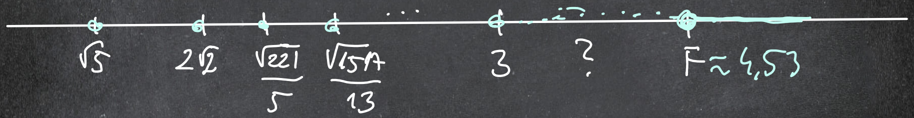
TÉTEL (HURWITZ 1891, BOREL 1903)

α irrac. $\Longrightarrow \exists \infty$ sok $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$: $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}\, q^2}$

$\alpha \sim \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ esetén semmi $\sqrt{5}$-nél nagyobb nem lesz igaz.

TÉTEL $\alpha \not\sim \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \exists \infty$ sok $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q} : \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{2\sqrt{2}q^2}$

$\alpha \sim \sqrt{2}$ esetén nem javítható.



$$\lambda(\alpha) = \sup\left\{ c \in \mathbb{R}^+ \,\middle|\, \exists \infty \text{ sok } \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} : \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{cq^2} \right\}$$

$$\lambda\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = \sqrt{5}, \quad \lambda(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}, \ \ldots$$

LAGRANGE-SPEKTRUM: λ értékkészlete

FREIMAN-KONSTANS $F = \frac{2\,221\,564\,096 + 283\,748\sqrt{462}}{491\,993\,569} = 4,527\ldots$

HF22

$$\left|\left\{ \frac{p}{q} \;\middle|\; 1 \le q \le 14,\ 0 \le \frac{p}{q} \le 1,\ p \perp q \right\}\right| = ?$$

HF23