

Pell-egyenletek

Emlékeztető

Tekintsük a $\mathbb{Z}[\sqrt{d}] = \{a + b\sqrt{d} : a, b \in \mathbb{Z}\}$ gyűrűt, ahol $d > 1$ négyzetmentes.

Definíció.

Az $\alpha = a + b\sqrt{d}$ elem normája:

$$N(\alpha) = \alpha \cdot \bar{\alpha} = (a + b\sqrt{d}) \cdot (a - b\sqrt{d}) = a^2 - db^2.$$

Állítás.

Az egységek éppen a ± 1 normájú elemek:

$$\begin{aligned} \alpha = a + b\sqrt{d} \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]^* &\iff N(\alpha) = \pm 1 \\ &\iff a^2 - db^2 = \pm 1 \end{aligned}$$

Tehát a $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ gyűrű egységei szoros kapcsolatban vannak a **Pell-egyenletekkel**:

(pozitív) Pell-egyenlet: $x^2 - dy^2 = 1$ (triviális megoldás: $x_0 = 1, y_0 = 0$),

negatív Pell-egyenlet: $x^2 - dy^2 = -1$ (nem mindig van megoldás).

Emlékeztető

Legyen (x_1, y_1) a legkisebb pozitív megoldása az $x^2 - dy^2 = \pm 1$ egyenleteknek, és legyen $\varepsilon = x_1 + y_1\sqrt{d}$ (fundamentális egység), továbbá legyen $\varepsilon^n = x_n + y_n\sqrt{d}$.

Tétel (Dirichlet).

A $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ gyűrű egységcsoportja: $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]^* = \{\pm\varepsilon^k : k \in \mathbb{Z}\}$.

Következmény.

1. Ha $N(\varepsilon) = 1$, akkor

- ▶ a pozitív Pell-egyenlet összes megoldása $(\pm x_n, \pm y_n)$, ahol $n \in \mathbb{N}_0$,
- ▶ a negatív Pell-egyenletnek nincs megoldása.

2. Ha $N(\varepsilon) = -1$, akkor

- ▶ a pozitív Pell-egyenlet összes megoldása $(\pm x_n, \pm y_n)$, ahol $n \in \mathbb{N}_0$ páros,
- ▶ a negatív Pell-egyenlet összes megoldása $(\pm x_n, \pm y_n)$, ahol $n \in \mathbb{N}$ páratlan.

$$x^2 - 14y^2 = \pm 1$$

$$\sqrt{14} = [3; \overline{1, 2, 1, 6}]$$

	1 1	2 1	1 1	6 1	1 1	2 1	1 1	6 1
	1 0	1 0	1 0	1 0	1 0	1 0	1 0	1 0
3 1	4 3	11 4	15 11	101 15	116 101	333 116	449 333	3027 449
1 0	1 1	3 1	4 3	27 4	31 27	89 31	120 89	809 120

p	3	4	11	15	101	116	333	449	3027	...
q	1	1	3	4	27	31	89	120	809	...
$p^2 - 14q^2$	-5	2	-5	1	-5	2	-5	1	-5	...

$$(15 + 4\sqrt{14})^n = x_n + y_n\sqrt{14}$$

$x^2 - 14y^2 = 1$: az összes megoldás $(\pm x_n, \pm y_n)$, ahol $n \in \mathbb{N}_0$

$x^2 - 14y^2 = -1$: nincs megoldás

$$x^2 - 13y^2 = \pm 1$$

$$\sqrt{13} = [3; \overline{1, 1, 1, 1, 6}]$$

	1 1	1 1	1 1	1 1	6 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	6 1
	1 0	1 0	1 0	1 0	1 0	1 0	1 0	1 0	1 0	1 0	1 0
3 1	4 3	7 4	11 7	18 11	119 18	137 119	256 137	393 256	649 393	4287 649	
1 0	1 1	2 1	3 2	5 3	33 5	38 33	71 38	109 71	180 109	1189 180	

p	3	4	7	11	18	119	137	256	393	649	4287	...
q	1	1	2	3	5	33	38	71	109	180	1189	...
$p^2 - 13q^2$	-4	3	-3	4	-1	4	-3	3	-4	1	-4	...

$$(18 + 5\sqrt{13})^n = x_n + y_n\sqrt{13}$$

$x^2 - 13y^2 = 1$: az összes megoldás $(\pm x_n, \pm y_n)$, ahol $n \in \mathbb{N}_0$ páros

$x^2 - 13y^2 = -1$: az összes megoldás $(\pm x_n, \pm y_n)$, ahol $n \in \mathbb{N}$ páratlan

A Pell-egyenletek fundamentális megoldásai

d	pozitív Pell		negatív Pell	
	x	y	x	y
2	3	2	1	1
3	2	1		
5	9	4	2	1
6	5	2		
7	8	3		
10	19	6	3	1
11	10	3		
13	649	180	18	5
14	15	4		
15	4	1		
17	33	8	4	1
19	170	39		
21	55	12		
22	197	42		
23	24	5		

A Pell-egyenletek fundamentális megoldásai

d	pozitív Pell		negatív Pell	
	x	y	x	y
26	51	10	5	1
29	9 801	1 820	70	13
30	11	2		
31	1 520	273		
33	23	4		
34	35	6		
35	6	1		
37	73	12	6	1
38	37	6		
39	25	4		
41	2 049	320	32	5
42	13	2		
43	3 482	531		
46	24 335	35 88		
47	48	7		

A Pell-egyenletek fundamentális megoldásai

d	pozitív Pell		negatív Pell	
	x	y	x	y
51	50	7		
53	66 249	9 100	182	25
55	89	12		
57	151	20		
58	19 603	2 574	99	13
59	530	69		
61	1 766 319 049	226 153 980	29 718	3 805
62	63	8		
65	129	16	8	1
66	65	8		
67	48 842	5 967		
69	7 775	936		
70	251	30		
71	3 480	413		
73	2 281 249	267 000	1 068	125

A pozitív Pell-egyenlet fund. megoldásának nagyságrendje

