Feladat. Hozzuk *nemelfajuló* lineáris helyettesítéssel kanonikus alakra az alábbi q kvadratikus alakot és állapítsuk meg a definitségi osztályát:

$$q = 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3.$$

Megoldás. Először hozzunk létre négyzeteket a $4x_1x_2$ tagból:

$$q = (x_1 + x_2)^2 - (x_1 - x_2)^2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3.$$

Vezessük be x_1 helyett az $y_1 = x_1 + x_2$, és x_2 helyett az $y_2 = x_1 - x_2$ új változókat. Ez nemelfajuló helyettesítés, mert „vissza lehet csinálni": $x_1 = (y_1 + y_2)/2$ és $x_2 = (y_1 - y_2)/2$. Az utóbbi kifejezésekre szükségünk is van, hogy el tudjuk tüntetni az „idejétmúlt" x_1 és x_2 változókat:

$$q = y_1^2 - y_2^2 + 2(y_1 + y_2)x_3 + 2(y_1 - y_2)x_3 = y_1^2 - y_2^2 + 4y_1x_3.$$

Alakítsuk teljes négyzetté az y_1-et tartalmazó tagokat:

$$q = (y_1 + 2x_3)^2 - y_2^2 - 4x_3^2.$$

Vezessük be y_1 helyett a $z_1 = y_1 + 2x_3$ új változót, és – csak a szépség kedvéért – nevezzük át y_2-t z_2-re és x_3-at z_3-ra. (Ez is nyilván nemelfajuló helyettesítés.) Ezzel meg is kapjuk q egy kanonikus alakját:

$$q = z_1^2 - z_2^2 - 4z_3^2.$$

Mivel pozitív és negatív együttható is szerepel, q pozitív és negatív értékeket is felvesz, tehát indefinit.

Ellenőrzés. Mindkét helyettesítés, amit elvégeztünk, nemelfajuló volt, ezért az „eredőjük" is az. Ellenőrzésképpen azért írjuk fel a helyettesítés mátrixát. Ehhez először fejezzük ki a z_i változókat az eredeti x_i változókból:

$$\begin{aligned} z_1 &= y_1 + 2x_3 = x_1 + x_2 + 2x_3 \\ z_2 &= y_2 = x_1 - x_2 \\ z_3 &= x_3 \end{aligned}$$

Ennek alapján a helyettesítés így írható le mátrixszorzásként:

$$(z_1, z_2, z_3) = (x_1, x_2, x_3) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

A mátrix determinánsa -2, ezért a helyettesítés valóban nemelfajuló. Ellenőrizzük magát a kanonikus alakot is (lehet számítógéppel is):

$$z_1^2 - z_2^2 - 4z_3^2 = (x_1 + x_2 + 2x_3)^2 - (x_1 - x_2)^2 - 4x_3^2 = 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3. \checkmark$$

$\diamond$