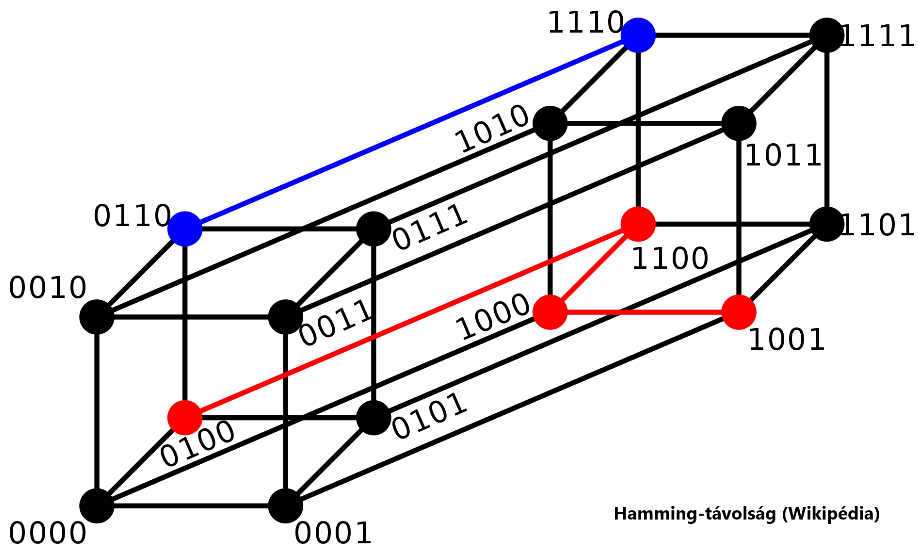
Feladatgyűjtemény

Diszkrét matematika III.
(Informatikusoknak)



2023

Bevezetés

A feladatgyűjteményt készítették:

Kátai-Urbán Kamilla, Kulin Júlia, Kunos Ádám, Maróti Miklós, Tóth Endre.

A feladatgyűjtemény a Diszkrét matematika III (informatikusoknak) tárgyhoz készült. A feladatsorok a Diszkrét matematika III. (informatikusoknak) előadáson szereplő fogalmak gyakorlására szolgálnak. A szükséges definíciók, tételek megtalálhatók az előadásvázlatban, itt. Az 1. fejezetben a tárgy gyakorlatához tartozó feladatok találhatók (permutációk, alterek, lineáris leképezések,kvadratikus alakok, euklideszi terek, polinomok, véges testek, kódolás), a 2. fejezetben pedig a feladatok eredményei vannak. Bizonyos feladatok esetén a teljes megoldást tartalmazó videó (youtube-videó) is elérhető. A feladatok számozása „1.x.y. feladat" alakú, ahol „x.y. feladat" a gyakorlatokon használt feladatsorok számozását követi, a megfelelő megoldások sorszáma: „2.x.y. feladat".

A feladatgyűjteményt készítette: Kátai-Urbán Kamilla, Kulin Júlia, Kunos Ádám, Maróti Miklós és Tóth Endre.

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Feladatok

1.1. Permutációk

Kidolgozott feladat. Az alábbi S_7-beli permutáció egy ciklus. Adjuk meg ezt a permutációt ciklusos alakban: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 1 & 5 & 4 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$.

Megoldás. A permutáció fenti, kétsoros írásmóddal való megadásánál az oszlopokkal azt jelöljük, hogy az adott (felső) elemet mely (alsó) elemhez rendeljük. Tehát az 1-hez a permutáció 7-et rendel, 2-höz 1-et stb. Ciklusos alakban való felírásnál pedig zárójelek közé egy sorba írjuk az elemeket, és mindig a jobbra következő elem jelöli az adott elem képét. Ha körbe értünk (azaz az adott elem képe a zárójelben lévő első elem), akkor bezárjuk a zárójelet. Azon elemeket, melyeknek önmaguk a képük, nem jelöljük ebben az írásmódban. A fenti ciklus (egy) ciklusos írásmódban való megadása: (176352). (A ciklusos alakban való megadás nem egyértelmű, egy másik például a (635217), ha nem az 1, hanem a 6 elemmel kezdjük el a leírást.)

Kidolgozott feladat. Írjuk fel az alábbi S_7-beli permutációt páronként idegen ciklusok szorzataként: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 3 & 4 & 2 & 5 & 1 & 6 \end{pmatrix}$.

Megoldás. A permutáció ciklusait írjuk fel. Zárójelet nyitunk, és ciklusos írásmódban leírjuk az első ciklust. Ha bezártuk az első ciklus zárójelét, akkor megnézzük, hogy van-e még elem, aminek nem önmaga a képe és még nem írtuk le. Ha van, akkor új zárójelet nyitunk, és leírjuk a következő ciklust. Ezt mindaddig folytatjuk, amíg van olyan elem, aminek nem önmaga a képe, és még nem írtuk le. Azon elemeket, melyeknek önmaguk a képük, nem jelöljük ebben a felírásmódban. A fenti permutáció (egy) páronként idegen ciklusokkal való megadása: (176)(234).

1.1.1. Feladat. Írjuk fel az alábbi S_7-beli permutációkat páronként idegen ciklusok szorzataként:

(a) $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 4 & 2 & 3 & 6 & 5 & 1 \end{pmatrix}$;
(b) $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 6 & 5 & 2 & 4 & 3 & 7 \end{pmatrix}$;
(c) $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 7 & 1 & 2 & 6 & 3 \end{pmatrix}$.

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.1.1)

1.1.2. Feladat. Adjuk meg a következő S_7-beli, páronként idegen ciklusok szorzataként előállított permutációkat kétsoros írásmódban:

(a) $\delta = (1\,3\,6)(2\,7\,5\,4)$;
(b) $\varepsilon = (1\,7)(2\,6)(3\,4\,5)$;
(c) $\eta = (1\,5\,4\,2\,7\,3)$.

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.1.2)

Kidolgozott feladat. Írjuk fel az alábbi S_7-beli permutációk szorzatát páronként idegen ciklusok szorzataként: $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\7&1&5&4&2&3&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\7&3&4&2&5&1&6\end{pmatrix}$.

1. Megoldás. Megnézzük, hogy az adott elemeket a két permutáció szorzata (azaz „egymás után elvégzése") hova mozgatja. Például az 1 elemet az első permutáció a 7-be viszi, melyet a második permutáció a 6-ba mozgatja; tehát a szorzat az 1 elemet a 6-ba viszi. A 2 elemet az első permutáció az 1-be viszi, melyet a második permutáció a 7-be mozgatja; tehát a szorzat a 2 elemet a 7-be viszi és így tovább. A permutációk szorzata
$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\7&1&5&4&2&3&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\7&3&4&2&5&1&6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\6&7&5&2&3&4&1\end{pmatrix} = (16427)(35)$.

2. Megoldás. Átírjuk mindkét permutációt idegen ciklusok szorzatára. Ekkor a szorzat $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\7&1&5&4&2&3&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\7&3&4&2&5&1&6\end{pmatrix} = (176352)\,(176)(234)$ alakban való felírásához jutunk, amely azonban nem páronként idegen ciklusok szorzata. Ezért megnézzük, hogy a fenti ciklusok szorzata hova mozgatja az egyes elemeket, és ennek megfelelően írjuk fel a páronként idegen ciklusokat. Például az 1 elemet az első ciklus a 7-be viszi, mely elemet a második ciklus a 6-ba mozgat, amit pedig a harmadik ciklus nem mozgat (hiszen nincs jelölve benne). Tehát a szorzat az 1 elemet a 6-ba viszi, azaz az idegen ciklusokra bontott alak „$(16\ldots$" módon kezdődik. A kapott 6 elemet az első ciklus a 3-ba viszi, mely elemet a második ciklus nem mozgat, a harmadik ciklus pedig őt a 4-be viszi. Tehát az idegen ciklusos alak „$(164\ldots$" módon folytatódik, és így tovább. A permutációk szorzata (16427)(35).

1.1.3. Feladat. Adjuk meg a következő S_6-beli permutációkat páronként idegen ciklusok szorzataként.

(a) $(1\,2\,4\,3)(1\,5\,2\,3)$;
(b) $(1\,2\,3\,4)(3\,4\,6\,1)$;
(c) $(1\,2\,3)(4\,5)(1\,2\,5\,4\,6)$;
(d) $(1\,3\,4\,2)(5\,6)(1\,4\,3\,2)$.

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.1.3)

Kidolgozott feladat. Írjuk fel az alábbi S_7-beli permutációt páronként idegen ciklusok szorzataként: $\left(\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\7&1&5&4&2&3&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\7&3&4&2&5&1&6\end{pmatrix}\right)^{-12}$.

Megoldás. Ha permutációk szorzatát kell hatványoznunk, akkor csak akkor lehet tényezőnként hatványozni, ha a tényezők idegenek. Átírjuk a hatványozandó (belső) permutációt páronként idegen ciklusok szorzatára: $\left(\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\7&1&5&4&2&3&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\7&3&4&2&5&1&6\end{pmatrix}\right)^{-12} = ((16427)(35))^{-12}$. Felhasználva a hatványozás azonosságait a következőt kapjuk: $((16427)(35))^{-12} = \left(((16427)(35))^{-1}\right)^{12}$. Miután (belül) páronként idegen ciklusok szorzatának vesszük az inverzét, az inverz megegyezik a ciklusok külön-külön vett inverzének szorzatával, tehát: $\left(((16427)(35))^{-1}\right)^{12} = \left((16427)^{-1}(35)^{-1}\right)^{12}$.

Egy ciklus inverze nem más, mint a ciklus „fordítva való leírása”, így $\left((16427)^{-1}(35)^{-1}\right)^{12} = ((72461)(53))^{12}$. Mivel a hatványozandó permutációnk páronként idegen ciklusok szorzatára bontva szerepel, így a szorzatot tényezőnként lehet hatványozni: $((72461)(53))^{12} = (72461)^{12}(53)^{12}$.
Könnyű meggondolni, hogy egy k-hosszú ciklust hatványozva az eredmény k periodicitással ismétlődik, így elég a kitevő k-val vett osztási maradékát tekintenünk. Tehát $(72461)^{12} = (72461)^2$ mivel a ciklus 5-hosszú, és 12-nek az 5-tel vett osztási maradéka 2, továbbá $(53)^2 = (53)^0$, mivel a ciklus 2-hosszú, és a 2-nek a 2-vel vett osztási maradéka 0. Így a permutáció páronként idegen ciklusok szorzatával megadva: $(72461)^{12}(53)^{12} = (72461)^2(53)^0 = (72461)(72461)\mathrm{id} = (74126)$.

1.1.4. Feladat. Az 1.1. és az 1.2 feladatban bevezetett jelöléseket felhasználva adjuk meg az alábbi S_7-beli permutációkat páronként idegen ciklusok szorzataként:

$$\text{(a) } \alpha\beta; \quad \text{(b) } \beta\alpha; \quad \text{(c) } (\beta\alpha)^{-1}; \quad \text{(d) } \beta^2; \quad \text{(e) } \beta^{2013}; \quad \text{(f) } \alpha^8; \quad \text{(g) } \varepsilon\eta^{-1}\beta\gamma\delta^{-1}.$$

(⇝ eredmény: 2.1.4)

1.1.5. Feladat. Adjuk meg a következő S_9-beli permutációkat páronként idegen ciklusok szorzataként:

(a) $((1\,2\,3)(4\,5))^{15}$;
(b) $((1\,2\,3\,4\,6)(7\,8))^{-1}$;
(c) $((1\,2\,3\,4)(5\,7\,8))^{26}$;
(d) $\left((1\,2\,4)^5(1\,3\,4)\right)^{-4}$;
(e) $\left((1\,2\,4\,3)^{-6}(1\,5\,4)^{13}\right)^{-4}$;
(f) $\left(((1\,3\,4\,6)(2\,5\,7\,9\,8))^{-1}\left((1\,7\,6)(2\,8\,4)(3\,9)\right)^2(1\,3\,4\,6)(2\,5\,7\,9\,8)\right)^{109}$;
(g) $\left((1\,5\,4\,3\,7\,2)^9\left((2\,9\,3)(4\,5\,2\,7)\right)^{120}(4\,8\,1)\right)^{-1}$.

(⇝ eredmény: 2.1.5)

1.1.6. Feladat. Keressük meg azokat a $\sigma \in S_8$ permutációkat, amelyekre teljesülnek a következő összefüggések:

(a) $(1\,5\,3)\sigma(6\,2\,1)(4\,1\,3) = (3\,1\,5)$;
(b) $((1\,2\,3\,4)(7\,3\,8))^3\,\sigma(3\,4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 5 & 6 & 4 & 3 & 1 & 2 & 7 \end{pmatrix}^{-1}$.
(c) $(2\,4\,3\,6)^{14}\sigma(1\,2\,3\,5)^{-9} = (1\,4\,2\,3)^{12}$.

(⇝ eredmény: 2.1.6)

Kidolgozott feladat. Döntsük el, hogy az alábbi S_7-beli permutáció páros vagy páratlan.
$\left((1234)\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7\\ 2 & 6 & 7 & 3 & 5 & 4 & 1\end{pmatrix}\right)^{18}((13567)(7631))^{-1}$

1. Megoldás. Felírjuk a (belső) hatványozandó permutációkat páronként idegen ciklusok szorzataként:
$\left((1234)\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7\\ 2 & 6 & 7 & 3 & 5 & 4 & 1\end{pmatrix}\right)^{18}((13567)(7631))^{-1} = ((1234)(126437))^{18}((13567)(7631))^{-1}$
$= (16427)^{18}(35)^{-1}$. Ezután a korábban látottak szerint hatványozunk: $(16427)^{18}(35)^{-1} = (16427)^{3}(35)^{-1} = (12674)(53)$.
Egy permutáció paritását abból kaphatjuk meg, hogy páros-, vagy páratlan sok transzpozíció (azaz 2-hosszú ciklus) szorzatára lehet felírni. Ehhez felhasználjuk, hogy egy k-hosszú ciklust fel tudunk írni $k-1$ db transzpozíció szorzatára. Miután (12674) egy 5-hosszú ciklus, őt $5-1=4$ db transzpozíció szorzatára fel tudjuk írni, és mivel (53) egy 2-hosszú ciklus, őt $2-1=1$ db transzpozíció szorzatára fel tudjuk írni (az (53) önmagában egy transzpozíció). Így összességében az eredeti $(12674)(53)$ permutációt $4+1=5$ db transzpozíció szorzataként fel tudjuk írni, és mivel az 5 páratlan, az eredeti permutációnk páratlan lesz.

2. Megoldás. Ebben a megoldásban maguk a permutációk helyett inkább csak a transzpozíciók számával dolgozunk. Először a kétsoros írásmódo(ka)t ciklusos alakba írjuk:
$\left((1234)\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7\\ 2 & 6 & 7 & 3 & 5 & 4 & 1\end{pmatrix}\right)^{18}((13567)(7631))^{-1} = ((1234)(126437))^{18}((13567)(7631))^{-1}.$
Tudjuk, hogy az (1234) ciklus $4-1=3$ db transzpozíció, az (126437) ciklus pedig $6-1=5$ db transzpozíció szorzatára felírható. Ezek szerint az $(1234)(126437)$ szorzat $3+5=8$ db transzpozíció szorzatára felírható, ami páros sok transzpozíció. Ha ezen páros sok transzpozíciót a 18-adikra emeljük, akkor $18\cdot$ páros = páros sok transzpozíció szorzatát kapjuk.
Hasonlóan, az (13567) ciklus $5-1=4$ db transzpozíció, a (7631) ciklus pedig $4-1=3$ db transzpozíció szorzatára felírható. Ezek szerint az $(13567)(7631)$ szorzat $4+3=7$ db transzpozíció szorzatára felírható, ami páratlan sok transzpozíció. Ha ezen páratlan sok transzpozíciót a -1-edikre emeljük, akkor páratlan sok transzpozíció szorzatát kapjuk: ha az egész szorzatot megfordítjuk, akkor a transzpozíciók szorzatának inverzét kapjuk, ami így nyilván ugyanannyi transzpozícióból fog állni.
Az előzőek alapján az eredeti permutációt páros sok transzpozíció + páratlan sok transzpozíció szorzatára fel tudjuk írni, ami összesen páratlan sok transzpozíciót jelent, így a permutáció páratlan.
A számolásunkból jól látszik, hogy valójában a $(3+5)\cdot 18 + (4+3)\cdot(-1)$ műveletet végeztük el modulo 2. Azaz $(3+5)\cdot 18 + (4+3)\cdot(-1) \equiv (1+1)\cdot 0 + (0+1)\cdot 1 \equiv 0\cdot 0 + 1\cdot 1 \equiv 1 \pmod 2$, tehát a permutáció páratlan (hiszen az 1 páratlan).

1.1.7. Feladat. Döntsük el, hogy az első két feladatban bevezetett $\alpha,\dots,\eta \in S_7$ permutációk, valamint a segítségükkel megadott alábbi permutációk párosak vagy páratlanok:

$$\text{(a)}\ \left(\eta^{-1}\delta^{112}\right)^{111}; \qquad \text{(b)}\ (\varepsilon\gamma\alpha)^{-1}\left(\beta^{-1}\delta\eta^{9}\right)^{2}.$$

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.1.7)

Kidolgozott feladat. Hány olyan $\sigma \in S_7$ permutáció van, amely 4 elemet mozgat? (Azaz melyre $|M_\sigma| = 4$?)

Megoldás. S_7-beli permutációkat tekintünk, azaz az alaphalmazunk az $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ halmaz. A permutációkat páronként idegen ciklusok szorzatára bontva keressük.

Első lehetőség, hogy a permutációnk egy 4-hosszú ciklus. Összesen $\binom{7}{4} \cdot \frac{4!}{4}$ ilyen ciklus van: $\binom{7}{4}$-féleképp választhatjuk ki azt a 4 elemet, amelyet a ciklus mozgat; a 4 elemet 4!-féleképp rendezhetjük sorba, azonban ezt még el kell osztanunk 4-el, hiszen ugyanazt a ciklust 4-féleképpen is leírhatjuk: (1234), (2341), (3412) és (4123) ugyanazt a ciklust jelölik.

Második lehetőség, hogy a permutációnk nem egyetlen ciklus. Ekkor a permutáció legalább két idegen ciklus szorzata kell legyen, de mivel csak 4 elemet mozgat, a permutáció csak két idegen transzpozíció szorzata lehet. (Hiszen ha egy ciklus mozgat egy elemet, akkor szükségképpen legalább még egyet mozgatnia kell). Összesen $\binom{7}{4} \cdot 3$ ilyen permutáció van: $\binom{7}{4}$-féleképp választhatjuk ki azt a 4 elemet, amelyet a két transzpozíció mozgat, és a 4 elemünkből 3-féleképp tudunk két idegen transzpozíció szorzatával felírt permutációt csinálni (hiszen, például, ha az 1-nek adott a képe, ami 3-féle lehet, akkor szükségképpen a többi elemnek is adott a képe: az 1 képét csak az 1-be, a másik két elemet pedig csak egymásba viheti a permutációnk).

Összesen tehát $\binom{7}{4} \cdot \frac{4!}{4} + \binom{7}{4} \cdot 3 = 210 + 105 = 315$ olyan permutáció van S_7-ben, amely 4 elemet mozgat.

1.1.8. Feladat. Hány olyan $\sigma \in S_6$ permutáció van, amelyre

(a) $|M_\sigma| = 0$;
(b) $|M_\sigma| = 1$;
(c) $|M_\sigma| = 2$;
(d) $|M_\sigma| = 3$;
(e) $|M_\sigma| = 4$;
(f) $|M_\sigma| = 5$;
(g) $|M_\sigma| = 6$.

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.1.8)

1.1.9. Feladat. Hányféleképpen táncolhat 6 házaspár úgy, hogy senki sem táncol a saját házastársával?

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.1.9)

1.2. Rang, alterek

Kidolgozott feladat. Oldjuk meg Gauss-elimináció segítségével az alábbi lineáris egyenletrendszert.

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} -2x_1 & - & 4x_2 & + & 4x_3 & - & 8x_4 & = & -4 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & - & x_3 & + & 5x_4 & = & 10 \\ -3x_1 & - & 6x_2 & + & 5x_3 & - & 11x_4 & = & -8 \end{array}$$

Megoldás. Az egyenletrendszer bővített mátrixával fogunk számolni, mely együtthatóiból és konstans tagjaiból áll:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -2 & -4 & 4 & -8 & -4 \\ 2 & 4 & -1 & 5 & 10 \\ -3 & -6 & 5 & -11 & -8 \end{array}\right)$$

Gauss-eliminációt fogunk végezni, azzal a céllal, hogy végül minden (kivéve az elsőt) sor több nullával kezdődjön, mint a fölötte lévő. Az első oszlopot tekintve úgy tűnhet, hogy törtekkel kell majd számolnunk, mely könnyen elszámoláshoz vezethet. Ez azonban jelen esetben kétféleképpen is elkerülhető. A két módszer közül az egyik általános(abb), azaz (szinte) mindig alkalmazható (feltéve, hogy racionális számokból áll a mátrixunk).

Az ad hoc módszer annak az észrevételén alapul, hogy mátrixunk első sorának elemei mindannyian oszthatóak kettővel. Az első sor 2-vel való osztása tehát nem vezet ki az egész számok komfortos köréből. Ezután a bal felső elem -1 lesz, mellyel könnyen nullázhatjuk az alatta lévő elemeket. Vegyük észre, hogy ez meglehetősen esetleges volt, ugyanis általában semmi nem garantálja, hogy az első (vagy akármelyik) sort hasonlóan leoszthatjuk – az egész számok körében maradva. Ez a tény okot ad arra, hogy általánosabb módszer után nézzünk.

Általában a következőt tehetjük. Azon kinullázandó elemek sorát, melyek kinullázása törtszámokhoz vezetne, felszorozzuk. Úgy, hogy a nullázó és a nullázandó elem legkisebb közös többszöröse jelenjen meg a nullázandó elem helyén. Jelen mátrixunk első oszlopa esetén a -3 kinullázása okozna tört számokat. Mármost 2 és 3 legkisebb közös többszöröse 6, ennélfogva úgy indulunk el, hogy az utolsó sort 2-vel szorozzuk – hogy -6-al kezdődjön.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -2 & -4 & 4 & -8 & -4 \\ 2 & 4 & -1 & 5 & 10 \\ -3 & -6 & 5 & -11 & -8 \end{array}\right) \xrightarrow{2\times S_3} \left(\begin{array}{cccc|c} -2 & -4 & 4 & -8 & -4 \\ 2 & 4 & -1 & 5 & 10 \\ -6 & -12 & 10 & -22 & -16 \end{array}\right) \xrightarrow[S_3-3S_1]{S_2+S_1}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -2 & -4 & 4 & -8 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow{3\times S_3} \left(\begin{array}{cccc|c} -2 & -4 & 4 & -8 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & -6 & 6 & -12 \end{array}\right) \xrightarrow{S_3+2S_2}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -2 & -4 & 4 & -8 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{0 sor elhagyása}} \left(\begin{array}{cccc|c} -2 & -4 & 4 & -8 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow{S_2/3}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -2 & -4 & 4 & -8 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

Elértük célunkat, a sorok egyre több 0-val kezdődnek. A sorok első nemnulla elemeihez tartozó változók, azaz x_1 és x_3, a kötött változók, a többi, azaz x_2 és x_4 a szabad változók.

Az egyenleteket alulról felfelé sorra véve kifejezzük a kötött változókat a szabad változók segítségével. A legalsó egyenlet $x_3 - x_4 = 2$, melyből a kötött változót kifejezve $x_3 = 2 + x_4$ adódik. Eggyel feljebb, a $-2x_1 - 4x_2 + 4x_3 - 8x_4 = -4$ egyenlet két kötött változót tartalmaz, de ezek közül az egyiket már kifejeztük a szabad változók segítségével. Ezt felhasználva

$$-2x_1 - 4x_2 + 4(2 + x_4) - 8x_4 = -4$$

adódik, melyből $x_1 = 6 - 2x_2 - 2x_4$.
Összegezve, a megoldás:

$$x_2, x_4 \in \mathbb{R}, \quad x_1 = 6 - 2x_2 - 2x_4, \quad x_3 = 2 + x_4,$$

vagy vektoros formában

$$(6 - 2x_2 - 2x_4,\ x_2,\ 2 + x_4,\ x_4), \quad x_2, x_4 \in \mathbb{R}.$$

1.2.1. Feladat. Oldjuk meg az alábbi lineáris egyenletrendszereket Gauss eliminációval:

(a) $$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 &+& 2x_2 &+& 5x_3 &=& -9 \\ x_1 &-& x_2 &+& 3x_3 &=& 2 \\ 3x_1 &-& 6x_2 &-& x_3 &=& 25 \end{array};$$

(b) $$\begin{array}{rcrcrcr} 4x_1 &+& 4x_2 &+& 5x_3 &=& 6 \\ x_1 &+& x_2 &+& 2x_3 &=& 3 \\ 7x_1 &+& 7x_2 &+& 8x_3 &=& 10 \end{array};$$

(c) $$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 &-& 2x_2 &+& x_3 &+& x_4 &=& 1 \\ 2x_1 &-& 4x_2 &+& 2x_3 &-& 2x_4 &=& -2 \\ -x_1 &+& 2x_2 &-& x_3 &-& 5x_4 &=& -5 \end{array};$$

(d) $$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 &+& 3x_2 &-& 4x_3 &+& x_4 &=& 1 \\ 2x_1 &+& 6x_2 &-& 7x_3 &+& x_4 &=& 6 \\ -3x_1 &-& 9x_2 &+& 10x_3 &-& x_4 &=& -11 \end{array};$$

(e) $$\begin{array}{rcrcrcrcr} & & & & x_3 &-& 2x_4 &=& 3 \\ 2x_1 &+& 3x_2 &+& x_3 & & &=& 4 \\ 4x_1 &+& 6x_2 &+& 4x_3 &-& 4x_4 &=& 8 \end{array};$$

(f) $$\begin{array}{rcrcrcr} & & x_3 &+& 4x_4 &=& 2 \\ x_1 &-& x_3 &+& 3x_4 &=& 2 \\ x_1 &+& x_3 &+& 11x_4 &=& 6 \\ 2x_1 &-& 4x_3 &-& 2x_4 &=& 0 \end{array};$$

(g) $$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 &-& 3x_2 & & &+& 2x_4 &=& 1 \\ 2x_1 &-& 6x_2 &+& 4x_3 &+& 5x_4 &=& 4 \\ -3x_1 &+& 9x_2 &+& 3x_3 &-& x_4 &=& 0 \end{array}.$$

(⇝ eredmény: 2.2.1)

Kidolgozott feladat. Döntsük el, hogy a

$$(3,0,1),\ (1,2,3),\ (-1,0,1),\ (0,3,1)$$

vektorrendszer lineáris független-e, illetve generátorrendszert, bázist alkot-e az $\mathbb{R}^3$ vektortérben.

Megoldás. Egy vektorrendszer rangját megkaphatjuk, ha a vektorrendszert egy mátrix soraiba írjuk, majd lépcsős alakra hozzuk a mátrixot Gauss-eliminációval. Az így kapott mátrixban a (nemnulla) sorok száma a vektorrendszer rangja. A rangból már minden (a feladat által feltett) kérdésre válaszolhatunk, ugyanis a vektorrendszer

- lineárisan független $\iff$ rang = vektorrendszer eredeti elemszáma (azaz hány darab vektor volt eredetileg), jelen feladatban 4;
- generátorrendszer $\iff$ rang = vektortér dimenziója (azaz hány komponensűek a vektorok), jelen feladatban 3;
- bázis $\iff$ független és generátorrendszer egyszerre.

Számítsuk ki tehát a vektorrendszerünk rangját!

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{sorcsere}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[S_3+S_1]{S_2-3S_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -6 & -8 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[2\times S_4]{3\times S_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -6 & -8 \\ 0 & 6 & 12 \\ 0 & 6 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[S_4+S_2]{S_3+S_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -6 & -8 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -6 & -8 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -6 & -8 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

A rang tehát 3. Innen vektorrendszerünk:
függő, ugyanis $3 \neq 4$;
generátorrendszer, ugyanis $3 = 3$;
nem bázis, ugyanis nem független.

1.2.2. Feladat. Döntsük el, hogy lineárisan független vektorrendszert alkotnak-e az alábbi vektorok a V vektortérben. Határozzuk meg a vektorrendszerek rangját.

(a) $V = \mathbb{R}^3$; $v_1 = (1,\ 2,\ 1), v_2 = (1,\ -1,\ 1), v_3 = (1,\ 1,\ 0)$;
(b) $V = \mathbb{R}^3$; $v_1 = (1,\ -2,\ 4),\ v_2 = (2,\ -3,\ 1),\ v_3 = (-4,\ 5,\ 5)$;
(c) $V = \mathbb{R}^4$; $v_1 = (1,\ -2,\ 3,\ 4),\ v_2 = (0,\ -3,\ 1,\ 2),\ v_3 = (2\ -4,\ 5,\ 9)$;
(d) $V = \mathbb{Z}_3^4$; $v_1 = (\overline{2},\overline{0},\overline{1},\overline{1}),\ v_2 = (\overline{2},\overline{1},\overline{0},\overline{2}),\ v_3 = (\overline{1},\overline{2},\overline{0},\overline{1})$;
(e) $V = \mathbb{Z}_5^4$; $v_1 = (\overline{4},\overline{2},\overline{2},\overline{3}),\ v_2 = (\overline{4},\overline{0},\overline{1},\overline{1}),\ v_3 = (\overline{3},\overline{0},\overline{2},\overline{2})$,
$v_4 = (\overline{4},\overline{4},\overline{3},\overline{0})$.

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.2.2)

1.2.3. Feladat. Határozzuk meg a következő valós mátrixok rangját, valamint adjunk meg a mátrixokban maximális méretű nemelfajuló (nem nulla) aldeterminánst.

$$\text{(a)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 9 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \text{(b)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 2 & 4 & 8 \\ 9 & 3 & 1 \\ 8 & 4 & 2 \end{pmatrix}; \quad \text{(c)} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -3 & 6 & -9 \\ 2 & -4 & 6 \\ -4 & 8 & -12 \end{pmatrix}.$$

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.2.3)

1.2.4. Feladat. Számítsuk ki az alábbi, $\mathbb{Z}_5$ feletti mátrix rangját.

$$\begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{2} & \overline{3} & \overline{4} & \overline{0} \\ \overline{2} & \overline{2} & \overline{4} & \overline{0} & \overline{3} \\ \overline{3} & \overline{4} & \overline{2} & \overline{4} & \overline{3} \\ \overline{4} & \overline{0} & \overline{2} & \overline{1} & \overline{3} \end{pmatrix}.$$

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.2.4)

Kidolgozott feladat. Soroljuk fel a $\mathbb{Z}_3^3$ vektortér $U_1 = [(\overline{1}, \overline{2}, \overline{1}), (\overline{1}, \overline{1}, \overline{2})]$ és

$$U_2 = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 + x_2 + x_3 = \overline{0},\ x_2 + 2x_3 = \overline{0}\}$$

altereinek elemeit.

Megoldás. Az U_1 egy (két vektor által) generált altér, mely a generáló vektorok összes lineáris kombinációjából áll. Feladatunk tehát meghatározni az összes $\alpha \cdot (\overline{1}, \overline{2}, \overline{1}) + \beta \cdot (\overline{1}, \overline{1}, \overline{2})$ vektort, ahol $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_3$. Például, ha $\alpha = \overline{1}$ és $\beta = \overline{2}$, akkor

$$\overline{1} \cdot (\overline{1}, \overline{2}, \overline{1}) + \overline{2} \cdot (\overline{1}, \overline{1}, \overline{2}) = (\overline{1}, \overline{2}, \overline{1}) + (\overline{2}, \overline{2}, \overline{1}) = (\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}).$$

Hasonlóan, mind a $9(= 3 \times 3)$ lehetőséget kiszámítva

$$U_1 = \{(\overline{0}, \overline{0}, \overline{0}), (\overline{1}, \overline{1}, \overline{2}), (\overline{2}, \overline{2}, \overline{1}), (\overline{1}, \overline{2}, \overline{1}), (\overline{2}, \overline{0}, \overline{0}), (\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}), (\overline{2}, \overline{1}, \overline{2}), (\overline{0}, \overline{2}, \overline{1}), (\overline{1}, \overline{0}, \overline{0})\}.$$

Az U_2 altér elemeinek meghatározásához először is megoldjuk az őt definiáló

$$x_1 + x_2 + x_3 = \overline{0},\ x_2 + 2x_3 = \overline{0}$$

egyenletrendszert. Könnyű dolgunk van, mert az egyenletrendszer eleve lépcsős alakban van, melyből egyszerűen leolvasható a megoldásvektor:

$$(x_3, x_3, x_3), \quad x_3 \in \mathbb{Z}_3.$$

U_2 elemei az összes ilyen vektor, azaz $U_2 = \{(\overline{0}, \overline{0}, \overline{0}), (\overline{1}, \overline{1}, \overline{1}), (\overline{2}, \overline{2}, \overline{2})\}$.

1.2.5. Feladat. Tekintsük az alábbi V vektortereket. Soroljuk fel az U alterek elemeit.

(a) $V = \mathbb{Z}_2^3;\quad U = [(\overline{1}, \overline{0}, \overline{0}), (\overline{0}, \overline{1}, \overline{0})]$;

(b) $V = \mathbb{Z}_3^3;\quad U = [(\overline{1}, \overline{2}, \overline{1}), (\overline{2}, \overline{0}, \overline{1})]$;

(c) $V = \mathbb{Z}_3^3$; $\quad U = \{(x_1, x_2, x_3)\colon x_2 + x_3 = \overline{0},\ x_1 + \overline{2}x_2 = \overline{0}\}$;
(d) $V = \mathbb{Z}_3^4$; $\quad U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)\colon x_1 + \overline{2}x_4 = \overline{0},\ \overline{2}x_1 + x_3 + x_4 = \overline{0}\}$.

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.2.5)

Kidolgozott feladat. Adjuk meg az $(1, 2, 3) \in \mathbb{R}^3$ vektor koordinátasorát az $(1, 0, 1)$, $(1, -2, -1)$, $(2, -2, 3)$ bázisban.

Megoldás. A koordinátasor meghatározásához meg kell keresnünk azokat az x_1, x_2, x_3 együtthatókat, amelyekre $x_1 \cdot (1, 0, 1) + x_2 \cdot (1, -2, -1) + x_3 \cdot (2, -2, 3) = (1, 2, 3)$. A beszorzást és az összeadást elvégezve a komponensek egyenlőségéből az alábbi lineáris egyenletrendszert kapjuk.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 3 \end{array}\right)$$

Megfigyelhetjük, hogy a bővített mátrix oszlopai éppen a feladatbeli vektoraink. A lineáris egyenletrendszer megoldásával megkapjuk a koordinátasort, jelen esetben $(x_1, x_2, x_3) = (2, -1, 0)$. (A megoldáshoz vezető számítást most nem részleteztük.) A bázis tulajdonságai miatt ezek az együtthatók egyértelműen meghatározhatók, azaz a koordinátasor kiszámolásánál a megfelelő lineáris egyenletrendszernek mindig pontosan egy megoldása lesz.

1.2.6. Feladat. Adjuk meg az alábbi v vektorok koordinátasorát a $\mathbb{Z}_2^3$ vektortér

$$(\overline{1}, \overline{1}, \overline{1}), (\overline{0}, \overline{1}, \overline{0}), (\overline{1}, \overline{1}, \overline{0})$$

bázisában.

(a) $v = (\overline{1}, \overline{0}, \overline{0})$;
(b) $v = (\overline{1}, \overline{0}, \overline{1})$.

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.2.6)

Kidolgozott feladat. Határozzuk meg a $\mathbb{Z}_3^3$ vektortér $[(\overline{1}, \overline{1}, \overline{1}), (\overline{1}, \overline{0}, \overline{2}), (\overline{2}, \overline{1}, \overline{0})]$ alterének dimenzióját és egy bázisát.

Megoldás. A vektorokat egy mátrix soraiba írjuk, majd Gauss-eliminálunk. A kapott lépcsős alak (minden sor több nullával kezdődik, mint az előző, és nincs csupa nulla sor) sorainak száma a dimenzió lesz, és maguk a sorok az altér bázisát fogják alkotni.

$$\begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{1} & \overline{1} \\ \overline{1} & \overline{0} & \overline{2} \\ \overline{2} & \overline{1} & \overline{0} \end{pmatrix} \xrightarrow[S_3 - \overline{2} \times S_1]{S_2 - S_1} \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{1} & \overline{1} \\ \overline{0} & \overline{2} & \overline{1} \\ \overline{0} & \overline{2} & \overline{1} \end{pmatrix} \xrightarrow{S_3 - S_2} \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{1} & \overline{1} \\ \overline{0} & \overline{2} & \overline{1} \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{1} & \overline{1} \\ \overline{0} & \overline{2} & \overline{1} \end{pmatrix}$$

Tehát az altér 2-dimenziós és egy lehetséges bázisa $(\overline{1}, \overline{1}, \overline{1})$, $(\overline{0}, \overline{2}, \overline{1})$.

1.2.7. Feladat. Határozzuk meg a V vektortér U alterének dimenzióját és egy bázisát.

(a) $V=\mathbb{R}^4$; $U=[(0,1,2,4),(2,-1,2,2),(1,-1,1,2)]$;
(b) $V=\mathbb{R}^4$; $U=[(1,2,4,1),\ (-2,-4,-5,-3),(-1,-2,-7,0),\ (1,2,-2,3)]$;
(c) $V=\mathbb{Z}_5^4$; $U=[(\overline{1},\overline{4},\overline{2},\overline{3}),(\overline{2},\overline{3},\overline{4},\overline{2})]$.

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.2.7)

Kidolgozott feladat. Adjuk meg a $\mathbb{Z}_3^4$ vektortér

$$\{(x_1,x_2,x_3,x_4):\overline{2}x_1+\overline{2}x_2+x_3+x_4=\overline{0},\ x_1+x_2+x_4=\overline{0},\ \overline{2}x_1+\overline{2}x_2+\overline{2}x_3=\overline{0}\}$$

alterét generátorrendszer segítségével. Határozzuk meg az altér dimenzióját is.

Megoldás. Megoldjuk az altér egyenletrendszerét, majd a szabad változókba a standard bázist helyettesítjük. Így kapjuk az altér egy bázisát, a dimenzió pedig a bázis elemszáma. Az egyenletrendszer mátrixát alakítjuk:

$$\left(\begin{array}{cccc|c}\overline{2}&\overline{2}&\overline{1}&\overline{1}&\overline{0}\\ \overline{1}&\overline{1}&\overline{0}&\overline{1}&\overline{0}\\ \overline{2}&\overline{2}&\overline{2}&\overline{0}&\overline{0}\end{array}\right)\xrightarrow[S_3-S_1]{S_2-\overline{2}\times S_1}\left(\begin{array}{cccc|c}\overline{2}&\overline{2}&\overline{1}&\overline{1}&\overline{0}\\ \overline{0}&\overline{0}&\overline{1}&\overline{2}&\overline{0}\\ \overline{0}&\overline{0}&\overline{1}&\overline{2}&\overline{0}\end{array}\right)\xrightarrow{S_3-S_2}\left(\begin{array}{cccc|c}\overline{2}&\overline{2}&\overline{1}&\overline{1}&\overline{0}\\ \overline{0}&\overline{0}&\overline{1}&\overline{2}&\overline{0}\end{array}\right)$$

Innen már a megoldásvektor könnyen kifejezhető: $(\overline{2}x_2+\overline{2}x_4,x_2,x_4,x_4)$, ahol $x_2,x_4\in\mathbb{Z}_3$. A standard bázist a szabad változókba helyettesítve

x_2	x_4	$(\overline{2}x_2+\overline{2}x_4,x_2,x_4,x_4)$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$(\overline{2},\overline{1},\overline{0},\overline{0})$
$\overline{0}$	$\overline{1}$	$(\overline{2},\overline{0},\overline{1},\overline{1})$

adódik. Tehát az altér egy lehetséges bázisa $(\overline{2},\overline{1},\overline{0},\overline{0})$, $(\overline{2},\overline{0},\overline{1},\overline{1})$; dimenziója pedig ennek elemszáma, azaz 2. Mivel egy bázis generátorrendszer is, az altér generátorrendszer segítségével: $[(\overline{2},\overline{1},\overline{0},\overline{0}),(\overline{2},\overline{0},\overline{1},\overline{1})]$.

1.2.8. Feladat. Adjuk meg a V vektortér U alterét generátorrendszer segítségével. Határozzuk meg U dimenzióját.

(a) $V=\mathbb{R}^3$, $U=\{(x_1,x_2,x_3):2x_1-x_3=0\}$;
(b) $V=\mathbb{Z}_5^3$, $U=\{(x_1,x_2,x_3):\overline{2}x_1+\overline{4}x_3=\overline{0},\ x_1+x_2=\overline{0}\}$;
(c) $V=\mathbb{Z}_3^4$, $U=\{(x_1,x_2,x_3,x_4):x_1+\overline{2}x_2+x_3=\overline{0},\ x_2+x_3+x_4=\overline{0}\}$;
(d) $V=\mathbb{R}^4$, $U=\{(x_1,x_2,x_3,x_4):x_1-x_2+3x_3-2x_4=0,\ 2x_1+x_2-x_3-x_4=0,\ x_2+x_3+x_4=0\}$;
(e) $V=\mathbb{R}^4$; $U=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\colon x_1=2x_2,\ x_3=x_1+x_2\}$;
(f) $V=\mathbb{R}^4$; $U=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\colon x_1=3x_2+x_3\}$;
(g) $V=\mathbb{Z}_3^4$; $U=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\colon x_1+\overline{2}x_4=\overline{0},\ \overline{2}x_1+x_3+x_4=\overline{0}\}$.

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.2.8)

Kidolgozott feladat. Adjuk meg a $\mathbb{Z}_3^4$ vektortérben a $(\overline{0},\overline{2},\overline{1},\overline{2})$ és $(\overline{0},\overline{1},\overline{2},\overline{1})$ vektorok által kifeszített alteret homogén lineáris egyenletrendszer segítségével.

Megoldás. Az altereket ugyebár kétféleképpen adhatjuk meg: homogén lineáris egyenletrendszerrel és generátorrendszerrel. A két megadási mód közötti oda- illetve visszaváltás (egy bizonyos szögből ügyesen rájuk nézve) lényegében ugyanaz, így a két átváltásra lehet ugyanazt a módszert alkalmazni. Azt már tudjuk, hogy homogén lin. egy. rsz.-ből hogyan váltunk generátorrendszeres megadási módba. Most „úgy fogunk tenni”, mintha most is ez lenne a feladat. Ehhez vektorainkból egyenleteket kell készítenünk. Ezt a következő módon csináljuk:

$$(\overline{0},\overline{2},\overline{1},\overline{2}) \rightsquigarrow \overline{0}x_1+\overline{2}x_2+\overline{1}x_3+\overline{2}x_4=\overline{0},$$

$$(\overline{0},\overline{1},\overline{2},\overline{1}) \rightsquigarrow \overline{0}x_1+\overline{1}x_2+\overline{2}x_3+\overline{1}x_4=\overline{0}.$$

Egy segédfeladatot oldunk meg. Úgy teszünk, mintha az lenne a feladat, hogy a kapott homogén lineáris egyenletrendszerrel megadott alteret generátorrendszerrel adjuk meg. Ehhez, először is, meg kell oldanunk az egyenletrendszert.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \overline{0} & \overline{2} & \overline{1} & \overline{2} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} & \overline{1} & \overline{0} \end{array}\right) \xrightarrow{S_2-\overline{2}\times S_1} \left(\begin{array}{cccc|c} \overline{0} & \overline{2} & \overline{1} & \overline{2} & \overline{0} \end{array}\right)$$

Innen az egyenletrendszer általános megoldása

$$(x_1, x_3+\overline{2}x_4, x_3, x_4), \quad x_1, x_3, x_4 \in \mathbb{Z}_3.$$

Hogy megkapjuk a segédfeladat megoldását a szabad változókba a standard bázist helyettesítjük.

x_1	x_3	x_4	$(x_1, x_3+\overline{2}x_4, x_3, x_4)$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$(\overline{1},\overline{0},\overline{0},\overline{0})$
$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{0}$	$(\overline{0},\overline{1},\overline{1},\overline{0})$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$(\overline{0},\overline{2},\overline{0},\overline{1})$

Tehát a segédfeladat megoldása a most kapott 3-elemű generátorrendszer. Ne feledjük azonban, hogy a mi eredeti feladatunk egy homogén lineáris egyenletrendszert keresett. Hogy ezt megkapjuk, ugyanazt az egyszerű átváltást alkalmazzuk, amit feljebb.

$$\begin{array}{lcl} (\overline{1},\overline{0},\overline{0},\overline{0}) & \rightsquigarrow & x_1=\overline{0} \\ (\overline{0},\overline{1},\overline{1},\overline{0}) & \rightsquigarrow & x_2+x_3=\overline{0} \\ (\overline{0},\overline{2},\overline{0},\overline{1}) & \rightsquigarrow & \overline{2}x_2+x_4=\overline{0} \end{array}$$

Ez alapján a feladatbeli altér homogén lineáris egyenletrendszerrel:

$$\{(x_1,x_2,x_3,x_4): \ x_1=\overline{0},\ x_2+x_3=\overline{0},\ \overline{2}x_2+x_4=\overline{0}\}.$$

Ugyanerre a feladattípusra mutatunk egy másik megoldási módszert is.

Kidolgozott feladat. Adjuk meg a $\mathbb{Z}_3^4$ vektortérben a $(\overline{0},\overline{2},\overline{1},\overline{2})$, $(\overline{0},\overline{1},\overline{2},\overline{1})$ és $(\overline{0},\overline{0},\overline{2},\overline{0})$ vektorok által kifeszített alteret homogén lineáris egyenletrendszer segítségével.

Megoldás. A vektorainkat egy mátrix soraiba írjuk, majd Gauss-eliminálunk. Most azt is elérjük (a sorokat megfelelő számokkal szorozva), hogy az első nemnulla elemek, az ún. vezérelemek, $\overline{1}$-k legyenek, majd ezen vezéregyesek felett is nullázunk, hogy az oszlopaikban ők legyenek az egyetlen nemnulla elemek.

$$\begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{2} & \overline{1} & \overline{2} \\ \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} & \overline{1} \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{2} & \overline{0} \end{pmatrix} \xrightarrow{S_2+S_1} \begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{2} & \overline{1} & \overline{2} \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{2} & \overline{0} \end{pmatrix} \xrightarrow[\overline{2}\times S_2]{\overline{2}\times S_1} \begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} & \overline{1} \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{1} & \overline{0} \end{pmatrix} \xrightarrow{S_1+S_2} \begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{1} & \overline{0} & \overline{1} \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{1} & \overline{0} \end{pmatrix}$$

A Gauss-elimináció során kapott vektorrendszerek ugyanazt az alterek generálják, tehát az eredeti alterünket a $(\overline{0},\overline{1},\overline{0},\overline{1})$ és $(\overline{0},\overline{0},\overline{1},\overline{0})$ vektorok is generálják. Alterünk tehát a következő alakba írható:

$$\{\alpha,\beta\in\mathbb{Z}_3 : \alpha(\overline{0},\overline{1},\overline{0},\overline{1})+\beta(\overline{0},\overline{0},\overline{1},\overline{0})\} = \{\alpha,\beta\in\mathbb{Z}_3 : (\overline{0},\alpha,\beta,\alpha)\}$$

$$= \{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{Z}_3^4 :\; x_1=\overline{0},\; x_2=x_4\}.$$

Ez utóbbi a feladat megoldása, az alterünk homogén lineáris egyenletrendszerrel megadva. (Az $x_2=x_4$ egyenlet az $x_2+\overline{2}x_4=\overline{0}$ homogén lineáris egyenlettel ekvivalens.)

1.2.9. Feladat. Adjuk meg a V vektortérben a megadott vektorok által kifeszített alteret homogén lineáris egyenletrendszer segítségével.

(a) $V=\mathbb{R}^3$; $u=(1,1,1)$, $v=(-2,2,-2)$, $w=(3,-1,3)$;
(b) $V=\mathbb{R}^3$; $u=(-1,-1,-1)$, $v=(-2,2,-2)$, $w=(0,-1,3)$;
(c) $V=\mathbb{R}^4$; $u=(2,2,-2,4)$, $v=(-4,-5,6,-5)$;
(d) $V=\mathbb{Z}_5^4$; $u=(\overline{1},\overline{2},\overline{2},\overline{4})$, $v=(\overline{0},\overline{1},\overline{4},\overline{2})$, $w=(\overline{2},\overline{0},\overline{2},\overline{0})$;
(e) $V=\mathbb{Z}_3^5$; $u=(\overline{1},\overline{0},\overline{2},\overline{2},\overline{1})$, $v=(\overline{1},\overline{1},\overline{2},\overline{0},\overline{2})$, $w=(\overline{0},\overline{2},\overline{2},\overline{1},\overline{0})$.

(⇝ eredmény: 2.2.9)

Kidolgozott feladat. Határozzuk meg a $\mathbb{Z}_3^4$ vektortér alábbi U_1 és U_2 alterei esetén az U_1+U_2 és az $U_1\cap U_2$ alterek dimenzióját, bázisát.

$$U_1=\{(x_1,x_2,x_3,x_4) : \overline{2}x_1+\overline{2}x_2+x_3+x_4=\overline{0},\; x_1+x_2+x_4=\overline{0},\; \overline{2}x_1+\overline{2}x_2+\overline{2}x_3=\overline{0}\}$$

$$U_2=[(\overline{0},\overline{2},\overline{1},\overline{2}),(\overline{0},\overline{1},\overline{2},\overline{1})]$$

Megoldás. Alterek összegének meghatározásához a generátorrendszeres, míg metszetéhez a hom. lin. egy. rsz.-es megadási módot használjuk. Ez azt jelenti, hogy ebben a feladatban az alterek két megadási módja közti átváltás játszik kulcsszerepet. Ez általában sok számolással jár. Hogy csökkentsük a számolás mennyiségét, mi most két olyan alteret (U_1 és U_2) választottunk, melyeket korábbi kidolgozott feladatokban már átváltottunk a másik megadási módba.

U_1+U_2 meghatározásához tehát mindkét altér generátorrendszeres formában kell nekünk. Ehhez U_1-et kell átváltanunk, melyet feljebb egy kidolgozott feladatban már megtettünk, azt kaptuk, hogy $U_1 = [(\bar{2},\bar{1},\bar{0},\bar{0}),(\bar{2},\bar{0},\bar{1},\bar{1})]$. Az U_1+U_2 altér egy generátorrendszerét az U_1 és U_2 alterek generátorrendszereinek egymás mellé írásával kaphatjuk, azaz

$$U_1+U_2 = [(\bar{2},\bar{1},\bar{0},\bar{0}),(\bar{2},\bar{0},\bar{1},\bar{1}),(\bar{0},\bar{2},\bar{1},\bar{2}),(\bar{0},\bar{1},\bar{2},\bar{1})].$$

Ez a négy generátorvektor azonban nem biztos, hogy független, azaz bázist alkot, tehát további számolásra van szükség. Lépcsős alakra hozzuk a generátorrendszert.

$$\begin{pmatrix} \bar{2} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{2} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{1} \end{pmatrix} \xrightarrow{S_2-S_1} \begin{pmatrix} \bar{2} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{1} \end{pmatrix} \xrightarrow[S_4+S_2]{S_3-S_2} \begin{pmatrix} \bar{2} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{S_4+S_3} \begin{pmatrix} \bar{2} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix}$$

Az U_1+U_2 altér egy lehetséges bázisa tehát $(\bar{2},\bar{1},\bar{0},\bar{0}),(\bar{0},\bar{2},\bar{1},\bar{1}),(\bar{0},\bar{0},\bar{0},\bar{1})$, dimenziója 3.
Az $U_1 \cap U_2$ altér meghatározásához az alterek homomogén lineáris egyenletrendszeres megadására van szükség. Az U_2 alteret egy korábbi kidolgozott feladatban már átváltottuk, és azt kaptuk, hogy

$$U_2 = \{(x_1,x_2,x_3,x_4):\ x_1=\bar{0},\ x_2+x_3=\bar{0},\ \bar{2}x_2+x_4=\bar{0}\}.$$

Az $U_1 \cap U_2$ altér (egyenletekkel) a két altér egyenleteinek egyesítésével kapható:

$$U_1\cap U_2 = \{(x_1,x_2,x_3,x_4):\ \bar{2}x_1+\bar{2}x_2+x_3+x_4=\bar{0},\ x_1+x_2+x_4=\bar{0},\ \bar{2}x_1+\bar{2}x_2+\bar{2}x_3=\bar{0};$$
$$x_1=\bar{0},\ x_2+x_3=\bar{0},\ \bar{2}x_2+x_4=\bar{0}\}.$$

Ahhoz, hogy megkapjuk ennek az altérnek egy bázisát, még egy átváltást kell végeznünk. A kapott $U_1\cap U_2$ alteret kell hom. lin. e. rsz.-es megadásból a másikba váltanunk. Ehhez meg kell oldanunk a kapott egyenletrendszert. Az egyenletek sorrendjét egy kicsit kapásból felcserélve:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{2} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{2} & \bar{2} & \bar{2} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{2} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \end{array}\right) \xrightarrow[\text{nullázása}]{\text{első oszlop}} \left(\begin{array}{cccc|c} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{2} & \bar{2} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{2} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \end{array}\right) \xrightarrow[\text{nullázása}]{\text{második oszlop}} \left(\begin{array}{cccc|c} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{2} & \bar{0} & \bar{0} \end{array}\right)$$

Két sort felcserélve folytatjuk:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{2} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{0} \end{array}\right) \xrightarrow[\text{nullázása}]{\text{harmadik oszlop}} \left(\begin{array}{cccc|c} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{2} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{2} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{2} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \end{array}\right) \xrightarrow[\text{nullázása}]{\text{negyedik oszlop}} \left(\begin{array}{cccc|c} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{2} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{2} & \bar{0} \end{array}\right)$$

melyből $x_1=x_2=x_3=x_4=\bar{0}$, azaz $U_1\cap U_2$ a triviális altér, melynek egyetlen eleme $(\bar{0},\bar{0},\bar{0},\bar{0})$, bázisa az üreshalmaz, azaz $\emptyset$, dimenziója pedig 0.

1.2.10. Feladat. Határozzuk meg a V vektorterek alábbi U_1 és U_2 alterei esetén az U_1+U_2 és az $U_1 \cap U_2$ alterek dimenzióját, bázisát.

(a) $V=\mathbb{R}^4$; $\quad U_1=[(1,2,1,0),(-1,1,1,1)],\ U_2=[(2,1,0,-1),(1,-1,3,7)]$;
(b) $V=\mathbb{R}^4$; $\quad U_1=[(1,2,1,3),(0,-2,3,-1)]$,
$U_2=[(0,2,-3,1),(0,-2,4,-4),(0,-6,11,-9)]$;
(c) $V=\mathbb{R}^4$; $\quad U_1=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\colon x_2+x_3+x_4=0\}$,
$U_2=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\colon x_1+x_2=0,\ x_3=2x_4\}$;
(d) $V=\mathbb{R}^4$; $\quad U_1=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\colon x_1+x_2+x_3=0,\ x_2-2x_3=0\}$,
$U_2=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\colon 2x_2-4x_3=0,\ 3x_3+x_4=0\}$;
(e) $V=\mathbb{Z}_3^4$; $\quad U_1=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\colon x_2+x_4=\overline{0},\ \overline{2}x_1+\overline{2}x_3=\overline{0}\}$,
$U_2=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\colon x_1+\overline{2}x_4=\overline{0}\}$;
(f) $V=\mathbb{Z}_3^5$; $\quad U_1=\{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)\colon x_1+\overline{2}x_3=\overline{0},\ x_1+x_2+x_4=\overline{0},\ x_1+\overline{2}x_2+\overline{2}x_5=\overline{0}\},\ U_2=[(\overline{1},\overline{2},\overline{0},\overline{1},\overline{1}),(\overline{1},\overline{1},\overline{0},\overline{0},\overline{0}),(\overline{0},\overline{0},\overline{2},\overline{1},\overline{0})]$;
(g) $V=\mathbb{Z}_5^4$; $\quad U_1=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\,:\,x_1+\overline{2}x_2+x_3=\overline{0},x_1+\overline{4}x_2=\overline{0},x_2+\overline{2}x_3=\overline{0}\},\ U_2=[(\overline{1},\overline{1},\overline{2},\overline{1}),(\overline{1},\overline{3},\overline{4},\overline{3}),(\overline{4},\overline{3},\overline{2},\overline{3})]$.

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.2.10)

1.2.11. Feladat. A V vektortér és U_1,U_2 altereinek megadott dimenziói esetén határozzuk meg az U_1+U_2 és az $U_1\cap U_2$ alterek dimenziójának összes lehetséges értékét.

(a) $\dim V=6,\quad \dim U_1=5,\quad \dim U_2=3$;
(b) $\dim V=5,\quad \dim U_1=4,\quad \dim U_2=3$;
(c) $\dim V=10,\quad \dim U_1=5,\quad \dim U_2=2$.

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.2.11)

1.3. Lineáris leképezések

Kidolgozott feladat. A síkon tekintsük azt a transzformációt, ami a sík összes vektorát merőlegesen vetíti az y tengelyre. Döntsük el, hogy ez a transzformáció lineáris-e. Ha igen, akkor adjuk meg a magterét, képterét és azok dimenzióját, bázisát.

Megoldás. Jelölje φ a síkon az y tengelyre való merőleges vetítést, ekkor tetszőleges $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ esetén $(x, y)\varphi = (0, y)$. Ellenőrizzük, hogy teljesülnek-e a lineáris leképezés definíciójában szereplő tulajdonságok, azaz φ felcserélhető-e az összeadással, és a skalárral való szorzással.

(1) Tetszőleges $u, v \in \mathbb{R}^2$ vektor esetén teljesülni kell, hogy $(u + v)\varphi = u\varphi + v\varphi$. Legyen $u = (x_1, y_1)$ és $v = (x_2, y_2)$, ekkor $(u+v)\varphi = ((x_1, y_1)+(x_2, y_2))\varphi = (x_1+x_2, y_1+y_2)\varphi = (0, y_1 + y_2)$. Másrészt $u\varphi + v\varphi = (x_1, y_1)\varphi + (x_2, y_2)\varphi = (0, y_1) + (0, y_2) = (0, y_1 + y_2)$. Mivel mindkét esetben ugyanazt kaptuk, így teljesül az egyenlőség.

(2) Tetszőleges $\lambda \in \mathbb{R}$ és $u \in \mathbb{R}^2$ esetén vizsgáljuk, hogy $(\lambda u)\varphi = \lambda(u\varphi)$ teljesül-e. Legyen $u = (x, y)$, ekkor egyrészt $(\lambda u)\varphi = (\lambda(x, y))\varphi = (\lambda x, \lambda y)\varphi = (0, \lambda y)$. Másrészt $\lambda(u\varphi) = \lambda((x, y)\varphi) = \lambda(0, y) = (0, \lambda y)$, ismét egyenlőséget kaptunk.

Mivel φ felcserélhető az összeadással (1), és a skalárral való szorzással (2), így φ lineáris leképezés.

Meghatározzuk φ magterét, azaz azon vektorok halmazát, amelyeknek a képe a zérusvektor. $\operatorname{Ker}\varphi = \{(x, y) : (x, y)\varphi = (0, 0)\} = \{(x, y) : (0, y) = (0, 0)\} = \{(x, y) : y = 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$. A magtér a sík $(x, 0)$ pontjait tartalmazza tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén, azaz az x-tengely pontjai alkotják. A magtér tehát 1-dimenziós, egy bázisa: $(1, 0)$.

A képtér azoknak a vektoroknak a halmaza, amelyek előállnak képként. $\operatorname{Im}\varphi = \{(x, y)\varphi : (x, y) \in \mathbb{R}^2\} = \{(0, y) : y \in \mathbb{R}\}$. Tehát a képteret az y-tengely pontjai alkotják. A képtér szintén 1-dimenziós, egy bázisa: $(0, 1)$.

1.3.1. Feladat. A sík $\mathbb{R}^2$ vektorterében tekintsük a következő transzformációkat. Döntsük el, hogy lineáris transzformációk-e. Ha igen, akkor adjuk meg a magjukat, képterüket és azok dimenzióját, bázisát.

(a) eltolás az $(1, 1)$ vektorral;
(b) tükrözés az y tengelyre;
(c) tükrözés az $x = -1$ egyenesre;
(d) merőleges vetítés az x tengelyre;
(e) origó középpontú 2 paraméterű nyújtás;
(f) $\pi/2$ szögű forgatás az origó körül;
(g) merőleges vetítés az $y = x$ egyenesre;
(h) tükrözés az $y = x$ egyenesre;
(i) $5\pi/3$ szögű forgatás az origó körül.

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.3.1)

Kidolgozott feladat. Határozzuk meg a $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x,y) \mapsto (3x+6y,\ 9y)$ lineáris transzformáció mátrixát a következő bázisokban.

(1) $\mathcal{E}\colon (1,0),\ (0,1)$ (standard bázis);
(2) $\mathcal{F}\colon (3,1),\ (0,-1)$.

Megoldás. A mátrix felírásához a bázisvektorok képének koordinátáit kell meghatározni az adott bázisban.

(1) A bázisvektorok képei $(1,0)\varphi = (3\cdot 1+6\cdot 0,\ 9\cdot 0) = (3,0)$, és $(0,1)\varphi = (3\cdot 0+6\cdot 1,\ 9\cdot 1) = (6,9)$. A standard bázis esetén a vektorok képei már a megfelelő bázisban, $\mathcal{E}$-ben vannak megadva. A lineáris leképezés mátrixának sorait az $\mathcal{E}$ bázisban a kapott képek alkotják:

$$A_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

(2) Először határozzuk meg a bázisvektorok képét: $(3,1)\varphi = (3\cdot 3+6\cdot 1,\ 9\cdot 1) = (15,9)$, illetve $(0,-1)\varphi = (3\cdot 0+6\cdot(-1),\ 9\cdot(-1)) = (-6,-9)$. Mivel most nem a standard bázisban kell felírni a lineáris leképezés mátrixát, az (1)-hez képest annyi a különbség, hogy a bázisvektorok képének koordinátáit is ki kell számolni az $\mathcal{F}$ bázisban. Azaz először meg kell határozni azokat az $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ értékeket, amelyekre $x_1(3,1) + x_2(0,-1) = (15,9)$. Mivel a második bázisvektor első koordinátája 0, így az első koordinátát az első bázisvektor határozza meg. Tehát $3x_1 = 15$, amelyből $x_1 = 5$, ezt visszahelyettesítve pedig a második komponensben az $5 - x_2 = 9$ egyenlőséget kapjuk, amely alapján $x_2 = -4$. Tehát a $(15,9)$ vektor koordinátái az $\mathcal{F}$ bázisban $(5,-4)$. Teljesen hasonlóan számolva kapjuk, hogy a $(-6,-9)$ vektor koordinátái $\mathcal{F}$-ben $(-2,7)$. A kapott vektorok alkotják a lineáris leképezés mátrixának sorait az $\mathcal{F}$ bázisban:

$$A_{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}.$$

A vektorok koordinátasorának meghatározása most könnyen ment, mert kihasználtuk a bázis egy speciális tulajdonságát, és a dimenzió is alacsony volt. Tetszőleges bázis esetén, tekinthetjük azt a lineáris egyenletrendszert, ahol az együtthatómátrix oszlopvektorait a bázisvektorok, a jobboldali konstansok oszlopvektorát pedig az adott vektor alkotja. Ennek a lineáris egyenletrendszernek a megoldásával megkapjuk a vektor koordinátasorát az adott bázisban.

1.3.2. Feladat. Melyek lineárisak az alábbi leképezések közül? Amelyik lineáris, annak határozzuk meg a standard bázisban megadott mátrixát.

(a) $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x,y) \mapsto (x+y,\ xy)$;
(b) $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ (x,y,z) \mapsto (x-y,\ x+y)$;
(c) $\varphi\colon \mathbb{Z}_3^2 \to \mathbb{Z}_3^3,\ (x,y) \mapsto (x+\overline{2}y,\ x+y,\ \overline{2}x)$;
(d) $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x,y,z) \mapsto (x-y,\ y+1,\ x+z)$.

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.3.2)

1.3.3. Feladat. Határozzuk meg a következő φ lineáris transzformációk mátrixát a megadott $\mathcal{E}$ bázisban. Számítsuk ki a v vektor φ melletti képének koordinátáit ebben a bázisban.

(a) $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y) \mapsto (x,\ -y)$,
$\mathcal{E}\colon (2, 1), (-1, 0), \quad v = (-1, 1)$;

(b) $\varphi\colon \mathbb{Z}_3^2 \to \mathbb{Z}_3^2,\ (x, y) \mapsto (x + \overline{2}y,\ \overline{2}x)$,
$\mathcal{E}\colon (\overline{2}, \overline{1}), (\overline{1}, \overline{1}), \quad v = (\overline{2}, \overline{0})$;

(c) $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y, z) \mapsto (2x - y,\ x + y,\ 3x - 2y - z)$,
$\mathcal{E}\colon (2, 0, 0), (0, 1, 1), (0, 1, -1), \quad v = (2, 2, 0)$;

(d) $\varphi\colon \mathbb{Z}_3^3 \to \mathbb{Z}_3^3,\ (x, y, z) \mapsto (\overline{2}x + y,\ x + y,\ y + \overline{2}z)$,
$\mathcal{E}\colon (\overline{1}, \overline{1}, \overline{2}), (\overline{0}, \overline{2}, \overline{1}), (\overline{2}, \overline{1}, \overline{1}), \quad v = (\overline{2}, \overline{1}, \overline{2})$.

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.3.3)

Kidolgozott feladat. Legyen a sík $\mathbb{R}^2$ vektorterén φ az x-tengelyre való tükrözés, ψ pedig az y-tengelyre vonatkozó merőleges vetítés. Határozzuk meg a $\varphi + \psi$, a $\varphi\psi$ és a $\psi\varphi + 2\varphi$ lineáris transzformációkat.

Megoldás. Legegyszerűbben úgy végezhetők el a lineáris leképzésekkel a műveletek, hogy a lineáris leképezések mátrixával végezzük el a megfelelő mátrixműveleteket. Mivel most mi döntjük el, hogy milyen bázisban írjuk fel a lineáris leképezés mátrixát, érdemes a legegyszerűbb módszert választani, és a standard bázisban megadni a mátrixot (ld. előző kidolgozott feladat (1) része).

Az x-tengelyre való tükrözést végrehajtjuk a standard bázis elemein: $(1, 0)\varphi = (1, 0)$, $(0, 1)\varphi = (0, -1)$. Az y-tengelyre vonatkozó merőleges vetítés esetén pedig $(1, 0)\psi = (0, 0)$ és $(0, 1)\psi = (0, 1)$. A bázisvektorok képei alkotják a lineáris leképezések mátrixának sorait, tehát a φ és a ψ lineáris leképezések mátrixai a standard bázisban:

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad A_\psi = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ezek után a $\varphi + \psi$, a $\varphi\psi$ és a $\psi\varphi + 2\varphi$ lineáris transzformációk mátrixát rendre az $A_\varphi + A_\psi$, a $A_\varphi A_\psi$ és a $A_\psi A_\varphi + 2A_\varphi$ mátrixműveletek elvégzésével kapjuk meg:

$$A_{\varphi+\psi} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_{\varphi\psi} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_{\psi\varphi+2\varphi} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

A mátrixok meghatározzák hozzájuk tartozó lineáris leképezéseket. A lineáris leképezések hozzárendelési szabálya az $(x, y)A$ mátrixszorzás elvégzésével megkapható. Például $(x, y)A_{\varphi+\psi} = (x, 0)$, tehát $\varphi + \psi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y) \mapsto (x, 0)$, ami az x-tengelyre vonatkozó merőleges vetítés.

1.3.4. Feladat. Tekintsük a sík $\mathbb{R}^2$ vektorterén értelmezett alábbi φ és ψ lineáris transzformációkat. Határozzuk meg a $\varphi + \psi$, a $\varphi\psi$ és a $\psi\varphi - 3\psi$ lineáris transzformációkat.

(a) φ az x-tengelyre, ψ az y-tengelyre vonatkozó tükrözés;

(b) φ az x-tengelyre, ψ az y-tengelyre vonatkozó merőleges vetítés;

(c) φ az identikus transzformáció, ψ az origó körüli $\pi/2$ szögű forgatás;

(d) φ az origó körüli $\pi/3$ szögű, ψ az origó körüli $-\pi/3$ szögű forgatás.

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.3.4)

Kidolgozott feladat. Döntsük el, hogy a $v = (3, 6)$ vektor sajátvektora-e az alábbi A mátrixnak, továbbá a 4 valós szám sajátértéke-e az A-nak.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Megoldás. Meghatározzuk a vA szorzatot, és vizsgáljuk, hogy létezik-e olyan $\lambda \in \mathbb{R}$, amelyre $vA = \lambda A$, ha igen, akkor v sajátvektor.

$$vA = \begin{pmatrix} 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 18 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Tehát $\lambda = 3$ esetén teljesül, hogy $vA = \lambda A$, így $v = (3, 6)$ sajátvektor.
Akkor lesz a 4 szám sajátértéke A-nak, ha $|A - 4E| = 0$ teljesül.

$$|A - 4E| = \begin{vmatrix} 5-4 & 6 \\ -1 & 0-4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-4) - 6 \cdot (-1) = 2 \neq 0$$

Tehát 4 nem sajátértéke A-nak. Az A mátrix sajátértékei az $|A - \lambda E| = 0$ egyenlet megoldásával kaphatók meg.

1.3.5. Feladat. Döntse el, hogy az u, illetve v vektor sajátvektora-e a valós A mátrixnak:

(a) $u = (1, -2, 3),\ v = (2, 0, -1),\ A = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 5 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

(b) $u = (1, -4, 0, 2),\ v = (2, 0, -1, 3),\ A = \begin{pmatrix} -2 & 6 & 4 & 6 \\ 1 & -3 & 2 & 3 \\ 7 & 9 & 10 & 21 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.3.5)

1.3.6. Feladat. Döntse el, hogy λ sajátértéke-e a valós A mátrixnak:

(a) $\lambda = -3,\ A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -4 \\ -2 & -9 & 14 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$;

(b) $\lambda = 2,\ A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ -2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$;

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.3.6)

Kidolgozott feladat. Számoljuk ki az alábbi $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mátrix sajátértékeit, és határozzuk meg a hozzá tartozó sajátaltereket.

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 9 & 4 \end{pmatrix}.$$

Megoldás. Az $|A - \lambda E|$ determinánst az első oszlopa szerint kifejtve kapjuk az A mátrix karakterisztikus polinomját:

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 7-\lambda & -3 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & 9 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (7-\lambda)[(1-\lambda)(4-\lambda) - 18] = (7-\lambda)(\lambda-7)(\lambda+2).$$

A polinom valós gyökei, azaz az A mátrix sajátértékei a $\lambda_1 = 7$ és a $\lambda_2 = -2$ skalárok. Meghatározzuk a $\lambda_1 = 7$ sajátértékhez tartozó sajátalteret. Az $xA = \lambda_1 x$ egyenletet átrendezve az $x(A - \lambda_1 E) = 0$ összefüggést kapjuk, amit ha transzponálunk, akkor az $(A - \lambda_1 E)^T x^T = 0^T$ homogén lineáris egyenletrendszerhez jutunk, amelynek megoldásai alkotják a $\lambda_1 = 7$-hez tartozó sajátalteret. Azaz az A mátrix főátlójából ki kell vonnunk a sajátértéket, majd transzponálnunk kell, így kapjuk meg a homogén lineáris egyenletrendszer együtthatómátrixát, amit lépcsős alakra hozunk:

$$(A - \lambda_1 E)^T = (A - 7E)^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -3 & -6 & 9 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -3 & -6 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Így az $x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0$ egyenletet kapjuk, amiből $x_1 = -2x_2 + 3x_3$, azaz x_1 kötött ismeretlen, x_2 és x_3 pedig szabad. A megoldástér egy bázisát úgy kapjuk, hogy a szabad változókba behelyettesítjük a 0 és 1 értékeket úgy, hogy mindig egy szabad változó kapjon 1 értéket. Így

$$\begin{aligned} x_2 &= 1, & x_3 &= 0, & x_1 &= -2\cdot 1 + 3\cdot 0 = -2, \\ x_2 &= 0, & x_3 &= 1, & x_1 &= -2\cdot 0 + 3\cdot 1 = 3. \end{aligned}$$

Az így kapott $(-2, 1, 0)$ és $(3, 0, 1)$ vektorok alkotják a $\lambda_1 = 7$-hez tartozó sajátaltér egy bázisát. A $\lambda_2 = -2$ sajátértékhez tartozó sajátaltér meghatározásához, ahogy az előbb is, az A mátrix főátlójából kivonjuk a sajátértéket, majd transzponálunk, így kapjuk meg a homogén lineáris egyenletrendszer együtthatómátrixát, amit lépcsős alakra hozunk:

$$(A - (-2)E)^T = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 9 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 9 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 9 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tehát $x_1 = 0$ és $x_2 + 3x_3 = 0$, amelyből $x_2 = -3x_3$. Így a sajátaltér egy bázisa a $(0, -3, 1)$ vektor.

1.3.7. Feladat. Legyen a V vektortérben értelmezett lineáris transzformáció mátrixa a standard bázisban A. Határozzuk meg a lineáris transzformációk karakterisztikus polinomját, sajátértékeit, valamint adjunk meg bázist a sajátalterekben.

(a) $V=\mathbb{R}^2$; $\quad A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$;

(b) $V=\mathbb{R}^2$; $\quad A=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$;

(c) $V=\mathbb{C}^2$; $\quad A=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$;

(d) $V=\mathbb{Z}_3^2$; $\quad A=\begin{pmatrix} \overline{2} & \overline{1} \\ \overline{2} & \overline{0} \end{pmatrix}$;

(e) $V=\mathbb{R}^3$; $\quad A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & -5 \\ 0 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$;

(f) $V=\mathbb{R}^3$; $\quad A=\begin{pmatrix} 1 & 13 & -4 \\ 0 & -3 & 0 \\ -8 & 19 & 5 \end{pmatrix}$;

(g) $V=\mathbb{Z}_3^3$; $\quad A=\begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{2} & \overline{1} \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{2} \\ \overline{0} & \overline{1} & \overline{1} \end{pmatrix}$.

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.3.7)

1.3.8. Feladat. Határozzuk meg a sík $\mathbb{R}^2$ vektorterében értelmezett következő lineáris transzformációk sajátértékeit, valamint a sajátalterek egy bázisát.

(a) identikus transzformáció;
(b) zérus transzformáció;
(c) tükrözés az x tengelyre;
(d) merőleges vetítés az y tengelyre;
(e) $\pi/2$ szögű forgatás az origó körül.

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.3.8)

1.4. Kvadratikus alakok, Euklideszi terek

Kidolgozott feladat. Határozzuk meg $\ell : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\ell(u, v) = \ell((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = = 4x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 2x_2y_2 - x_2y_3 - x_3y_2 + 6x_3y_3$ bilineáris leképezés mátrixát a standard bázisban. Ha a leképezés szimmetrikus bilineáris leképezés, akkor adjuk meg a hozzá tartozó kvadratikus alakot is.

Megoldás. A standard bázis $\mathbb{R}^3$-ben: $e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)$. Az ℓ lineáris leképezés mátrixa az az $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mátrix, amelyre $a_{ij} = \ell(e_i, e_j)$, azaz

$$\begin{aligned} a_{11} &= \ell(e_1, e_1) = \ell((1, 0, 0), (1, 0, 0)) = 4, & a_{12} &= \ell(e_1, e_2) = \ell((1, 0, 0), (0, 1, 0)) = 2,\\ a_{13} &= \ell(e_1, e_3) = \ell((1, 0, 0), (0, 0, 1)) = 0, & a_{21} &= \ell(e_2, e_1) = \ell((0, 1, 0), (1, 0, 0)) = 2. \end{aligned}$$

Hasonlóan kiszámítható, hogy $a_{22} = 2$, $a_{23} = -1$, $a_{31} = 0$, $a_{32} = -1$ és $a_{33} = 6$. Így az $\mathcal{E}$ bázisban az ℓ bilineáris leképezés mátrixa:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Észrevehetjük, hogy a mátrix standard bázisban való felírása a bilineáris leképezés formulájából közvetlenül is megkapható, ugyanis ha c az x_iy_j tag együtthatója, akkor $a_{ij} = c$.
Mivel a mátrix szimmetrikus, így a bilineáris leképzés is szimmetrikus, ezért tartozik hozzá egy $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ kvadratikus alak, mégpedig a $q(v) = \ell(v, v)$ hozzárendelés szerint. Azaz ℓ képletében minden y_i helyett x_i szerepel ($i = 1, 2, 3$), tehát $q(v) = \ell(v, v) = 4x_1x_1 + 2x_1x_2 + 2x_2x_1 + 2x_2x_2 - x_2x_3 - x_3x_2 + 6x_3x_3$. Összevonás után pedig kapjuk, hogy $q(v) = 4x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_2^2 - 2x_2x_3 + 6x_3^2$.

1.4.1. Feladat. Melyek bilineárisak az alábbi leképezések közül? Ha a leképezés bilineáris, akkor adjuk meg a mátrixát a standard bázisban. Ha a leképezés szimmetrikus bilineáris leképezés, akkor adjuk meg a hozzá tartozó kvadratikus alakot is.

(a) $\ell : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\ell((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_2y_2$;
(b) $\ell : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\ell((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 3$;
(c) $\ell : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\ell((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_2 - x_1y_1$;
(d) $\ell : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\ell((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1x_2$;
(e) $\ell : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\ell((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_1 + x_2y_2$;
(f) $\ell : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\ell((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2)) = 2x_1y_1 + x_2y_1 - x_1y_2 - 2x_3y_2$.

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.4.1)

Kidolgozott feladat. Hozzuk kanonikus alakra az $\mathbb{R}^3$ vektortéren értelmezett $q = 4x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_2^2 - 2x_2x_3 + 6x_3^2$ kvadratikus alakot. Továbbá meghatározzuk az osztályát (pozitív/negatív (szemi)definit, indefinit).

Megoldás. Először megadjuk a kvadratikus alak mátrixát a standard bázisban. Ezt úgy írhatjuk fel a kvadratikus alakból, hogy a négyzetes tagok együtthatói a főátlóba kerülnek, a mátrix többi eleme pedig a megfelelő vegyes tagok együtthatóinak fele lesz.

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

Ezt a mátrixot kell úgy diagonális alakra hoznunk, hogy a Gauss-eliminációnál is használt lépéseket hajtunk végre a mátrix sorain, azzal a különbséggel, hogy most minden lépést a megfelelő oszlopon is el kell végezni, hogy szimmetrikus mátrixokon keresztül haladjunk.

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 6 \end{pmatrix} \overset{s.}{\sim} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 6 \end{pmatrix} \overset{o.}{\sim} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 6 \end{pmatrix} \overset{s.}{\sim} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \overset{o.}{\sim} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

A mátrixról leolvasható, hogy a kanonikus alak $4y_1^2 + y_2^2 + 5y_3^2$. Mivel a kanonikus alak csak pozitív együtthatókat tartalmaz, és mind a három tag szerepel, így a kvadratikus alak pozitív definit.
Megfigyelhetjük, hogy a kvadratikus alak épp az előző kidolgozott feladatban szereplő bilineáris leképezéshez tartozó kvadratikus alak, és a kvadratikus alak mátrixa valójában nem más, mint a hozzá tartozó szimmetrikus bilineáris leképezés mátrixa.

1.4.2. Feladat. Hozzuk kanonikus alakra az $\mathbb{R}^n$ vektortéren értelmezett valós kvadratikus alakokat, és határozzuk meg az osztályukat (pozitív/negatív (szemi)definit, indefinit).

(a) $n = 2$, $x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2$;
(b) $n = 2$, $-4x_1^2 + 4x_1x_2 - 4x_2^2$;
(c) $n = 3$, $-4x_1^2 + 4x_1x_2 - 4x_2^2$;
(d) $n = 3$, $8x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3$;
(e) $n = 3$, $x_1^2 + 6x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_2x_3$;
(f) $n = 3$, $2x_1x_3 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3$.

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.4.2)

Kidolgozott feladat. Keressünk az alábbi A szimmetrikus mátrixhoz olyan S nemelfajuló mátrixot, amelyre SAS^T diagonális

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Megoldás. A kvadratikus alakoknál látott módszert alkalmazzuk, azaz a mátrixot diagonális alakra hozzuk úgy, hogy a Gauss-eliminációnál is használt lépéseket hajtunk végre a mátrix sorain, azzal a különbséggel, hogy most minden lépést a megfelelő oszlopokon is el kell végezni, hogy szimmetrikus mátrixokon keresztül haladjunk. Az A mátrix mellett feltüntetjük az $\mathcal{E}$ standard bázist is, és azon is végrehajtjuk a sorokra vonatkozó átalakításokat, így megkapjuk, hogy mely bázisban lesz diagonális az A mátrixhoz tartozó kvadratikus alak mátrixa.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{s.}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{o.}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{s.}{\sim}$$

$$\overset{s.}{\sim}\begin{pmatrix}4 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & | & -\frac{1}{2} & 1 & 0\\ 0 & 0 & 5 & | & -\frac{1}{2} & 1 & 1\end{pmatrix}\overset{o.}{\sim}\begin{pmatrix}4 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & | & -\frac{1}{2} & 1 & 0\\ 0 & 0 & 5 & | & -\frac{1}{2} & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

Tehát az $\mathcal{F}:(1,0,0),(-\frac{1}{2},1,0),(-\frac{1}{2},1,1)$ bázisban lesz a mátrix diagonális. A keresett S nemelfajuló mátrix sorait pedig az $\mathcal{F}$ bázis elemei alkotják:

$$S=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -\frac{1}{2} & 1 & 0\\ -\frac{1}{2} & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

1.4.3. Feladat. Keressünk az alábbi A szimmetrikus mátrixokhoz olyan S nemelfajuló mátrixot, amelyre SAS^T diagonális.

(a) $A=\begin{pmatrix}-4 & 2\\ 2 & -4\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{2\times 2}$;

(b) $A=\begin{pmatrix}8 & -2 & -2\\ -2 & 1 & 0\\ -2 & 0 & 1\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{3\times 3}$;

(c) $A=\begin{pmatrix}\overline{1} & \overline{2}\\ \overline{2} & \overline{0}\end{pmatrix}\in\mathbb{Z}_3^{2\times 2}$;

(d) $A=\begin{pmatrix}\overline{1} & \overline{3} & \overline{0}\\ \overline{3} & \overline{3} & \overline{4}\\ \overline{0} & \overline{4} & \overline{4}\end{pmatrix}\in\mathbb{Z}_5^{3\times 3}$.

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.4.3)

Kidolgozott feladat. Határozzuk meg az $u=(-4,3,-2)$ vektor $v=(1,-2,1)$ vektorra vett merőleges vetületét.

Megoldás. Jelöljük w-vel az u vektor v-re vett merőleges vetületét, amely az elméleti jegyzetben szereplő képlet szerint a következőképpen számolható:

$$w=\frac{\langle u,v\rangle}{\langle v,v\rangle}v=\frac{(-4)\cdot 1+3\cdot(-2)+(-2)\cdot 1}{1\cdot 1+(-2)\cdot(-2)+1\cdot 1}(1,-2,1)=\frac{-12}{6}(1,-2,1)=(-2,4,-2).$$

1.4.4. Feladat. Határozzuk meg az u vektor v vektorra vett merőleges vetületét a megadott $v,u\in\mathbb{R}^n$ vektorok esetén.

(a) $n=2,\ v=(11,0),\ u=(4,3)$;
(b) $n=2,\ v=(10,10),\ u=(1,7)$;
(c) $n=2,\ v=(1,-2),\ u=(-3,2)$;
(d) $n=3,\ v=(0,6,0),\ u=(-4,2,-3)$;

(e) $n = 3,\ v = (5, 2, -1),\ u = (1, -1, 3)$;
(f) $n = 3,\ v = (2, 3, -1),\ u = (-4, 14, 6)$;
(g) $n = 4,\ v = (2, 1, 1, 1),\ u = (1, 2, 3, 0)$.

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.4.4)

Kidolgozott feladat. Hajtsuk végre a Gram-Schmidt-ortogonalizációt az $u_1 = (1, -2, 1)$, $u_2 = (-4, 3, -2)$ lineárisan független $\mathbb{R}^3$-beli vektorrendszeren. (Normáljunk is!)

Megoldás. A Gram-Schmidt-ortogonalizáció során a v_1, v_2 vektorrendszert fogjuk előállítani, egy olyan ortogonális vektorrendszert, amelyre teljesül, hogy $[u_1, u_2] = [v_1, v_2]$. Először is $v_1 = u_1 = (1, -2, 1)$, a v_2 vektort pedig úgy kapjuk, hogy az u_2 vektorból kivonjuk az u_2 vektor v_1-re vett merőleges vetületét:

$$v_2 = u_2 - \tfrac{\langle u_2, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle} v_1 = (-4, 3, -2) - \tfrac{(-4)\cdot 1 + 3\cdot(-2) + (-2)\cdot 1}{1\cdot 1 + (-2)\cdot(-2) + 1\cdot 1}(1, -2, 1) = (-4, 3, -2) - (-2)(1, -2, 1)$$
$$= (-2, -1, 0).$$

A Gram-Schmidt-ortogonalizációval a $v_1 = (1, -2, 1)$, $v_2 = (-2, -1, 0)$ vektorrendszert kaptuk, amely ortogonális vektorrendszer, és ugyanazt a síkot feszíti ki $\mathbb{R}^3$-ben, mint az u_1, u_2 vektorrendszer. Ahhoz, hogy a vektorrendszer normált legyen, le kell osztanunk a vektorokat a hosszukkal. A vektorok hossza: $||v_1|| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{6}$ és $||v_2|| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{5}$, így a megfelelő ortonormált vektorrendszer:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right), \quad \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}, 0\right).$$

1.4.5. Feladat. Hajtsuk végre a Gram-Schmidt-ortogonalizációt a következő lineárisan független $\mathbb{R}^n$-beli vektorrendszereken! (Normáljunk is!)

(a) $n = 2,\ (4, 4), (0, 4)$;
(b) $n = 3,\ (2, 3, -1), (-4, 14, 6)$;
(c) $n = 3,\ (1, 0, 0), (2, 3, 0), (1, 6, 1)$;
(d) $n = 3,\ (1, 6, 1), (1, 0, 0), (2, 3, 0)$;
(e) $n = 3,\ (1, 0, -1), (0, 2, 0), (0, 4, 1)$;
(f) $n = 4,\ (1, 1, -1, 1), (0, 3, 0, 1), (0, -3, 0, 7)$.

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.4.5)

Kidolgozott feladat. Legyen a $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ szimmetrikus lineáris transzformáció mátrixa a standard bázisban

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 3 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Határozzuk meg az $\mathbb{R}^3$ egy φ sajátvektoraiból álló ortonormált bázisát.

Megoldás. Először meghatározzuk φ sajátértékeit. Az $|A - \lambda E|$ determinánst az utolsó oszlopa szerint kifejtve kapjuk, hogy a karakterisztikus polinom:

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 3 & 0 \\ 3 & -5-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)[(3-\lambda)(-5-\lambda)-3\cdot 3] = (4-\lambda)(\lambda-4)(\lambda+6).$$

A karakterisztikus polinom valós gyökei, azaz a φ sajátértékei a $\lambda_1 = 4$ és a $\lambda_2 = -6$ skalárok. Meghatározzuk a $\lambda_1 = 4$ sajátértékhez tartozó sajátalteret. Az $(A-\lambda_1 E)^T x^T = 0^T$ homogén lineáris egyenletrendszer megoldásai alkotják a $\lambda_1 = 4$-hez tartozó sajátalteret. Azaz az A mátrix főátlójából kivonjuk a λ_1-et, és transzponáljuk, így kapjuk a homogén lineáris egyenletrendszer együtthatómátrixát, amit lépcsős alakra hozunk:

$$(A-\lambda_1 E)^T = \begin{pmatrix} 3-4 & 3 & 0 \\ 3 & -5-4 & 0 \\ 0 & 0 & 4-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 3 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

A $-x_1 + 3x_2 = 0$ egyenletből, $x_1 = 3x_2$, azaz x_1 kötött ismeretlen, x_2 és x_3 pedig szabad. A megoldástér egy bázisát úgy kapjuk, hogy a szabad változókba behelyettesítjük a 0 és 1 értékeket úgy, hogy mindig egy szabad változó kapjon 1 értéket. Az így kapott $(3,1,0)$ és $(0,0,1)$ vektorok alkotják a $\lambda_1 = 4$-hez tartozó sajátaltér egy bázisát.
A $\lambda_2 = -6$-hoz tartozó sajátaltér hasonlóképpen számítható, egy bázisa az $(1,-3,0)$ vektor.
A $(3,1,0)$, $(0,0,1)$, $(1,-3,0)$ vektorrendszer a φ lineáris transzformáció sajátvektoraiból álló bázist alkot $\mathbb{R}^3$-ben, és ez a vektorrendszer ortogonális is. (Ha a vektorrendszer nem lenne ortogonális, Gram-Schmidt ortogonalizációval kellene átalakítani.) Ahhoz, hogy ortonormált bázist alkosson a vektorok hosszával kell leosztani, így kapjuk a $\left(\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}, 0\right)$, $(0,0,1)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{3}{\sqrt{10}}, 0\right)$ ortonormált bázist, mely a φ lineáris transzformáció sajátvektoraiból áll.

1.4.6. Feladat. Legyen a $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineáris transzformáció mátrixa a standard bázisban A. Adjunk meg az $\mathbb{R}^3$ euklideszi térnek egy, a φ sajátvektoraiból álló ortonormált bázisát.

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

(b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.4.6)

1.5. Polinomok

Kidolgozott feladat. Határozzuk meg az $f = \overline{2}x^4 + \overline{2}x^2 + x + \overline{1},\ g = \overline{2}x^3 + \overline{2}x^2 + \overline{2}x \in \mathbb{Z}_3[x]$ polinomok legnagyobb közös osztóját euklideszi algoritmus segítségével a $\mathbb{Z}_3[x]$ polinomgyűrűben.

Megoldás. Az euklideszi algoritmus első lépéseként f-et elosztjuk maradékosan g-vel, majd mindig az utolsó osztót osztjuk az utolsó maradékkal addig, amíg $\overline{0}$ maradékot nem kapunk.

$$
\begin{array}{rl}
- & (\overline{2}x^4 + \overline{2}x^2 + x + \overline{1}) \quad : \quad (\overline{2}x^3 + \overline{2}x^2 + \overline{2}x) \quad = \quad x + \overline{2} \\
 & \overline{2}x^4 + \overline{2}x^3 + \overline{2}x^2 \\
\hline
- & x^3 + x + \overline{1} \\
 & x^3 + x^2 + x \\
\hline
 & \overline{2}x^2 + \overline{1}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rl}
- & (\overline{2}x^3 + \overline{2}x^2 + \overline{2}x) \quad : \quad (\overline{2}x^2 + \overline{1}) \quad = \quad x + \overline{1} \\
 & \overline{2}x^3 + x \\
\hline
- & \overline{2}x^2 + x \\
 & \overline{2}x^2 + \overline{1} \\
\hline
 & x + \overline{2}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rl}
- & (\overline{2}x^2 + \overline{1}) \quad : \quad (x + \overline{2}) \quad = \quad \overline{2}x + \overline{2} \\
 & \overline{2}x^2 + x \\
\hline
- & \overline{2}x + \overline{1} \\
 & \overline{2}x + \overline{1} \\
\hline
 & \overline{0}
\end{array}
$$

A legnagyobb közös osztó az utolsó nemnulla maradék, azaz $\mathrm{lnko}(f, g) \sim x + \overline{2}$.

1.5.1. Feladat. Határozzuk meg az f és a g polinomok legnagyobb közös osztóját euklideszi algoritmus segítségével a megadott polinomgyűrűkben.

(a) $f = 2x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 2x - 1,\ g = 2x^3 - x^2 - 4x - 1, \quad \mathbb{Q}[x]$;
(b) $f = -x^4 - 4x^3 + 34x^2 + 76x - 105,\ g = x^4 + 6x^3 - 6x^2 + 6x - 7, \quad \mathbb{Q}[x]$;
(c) $f = x^8 - \overline{1},\ g = x^6 - \overline{1}, \quad \mathbb{Z}_{13}[x]$;
(d) $f = \overline{4}x^4 + \overline{2}x^3 + x^2 + x + \overline{2},\ g = \overline{2}x^4 + \overline{3}x^2 + \overline{1}, \quad \mathbb{Z}_5[x]$.

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.5.1)

Kidolgozott feladat. Adjuk meg az $f = x^4 - 2x^3 + x^2 - 8x - 12$ és $g = x^3 - 7x^2 + 7x + 15$ racionális együtthatós polinomok közös gyökeit, majd ennek felhasználásával f és g összes gyökét.

Megoldás. Egy szám akkor és csak akkor közös gyöke két polinomnak, ha gyöke a polinomok legnagyobb közös osztójának. Tehát először meghatározzuk $\mathrm{lnko}(f, g)$-t, az előző feladathoz hasonlóan.

$$
\begin{array}{rl}
- & (x^4 - 2x^3 + x^2 - 8x - 12) \quad : \quad (x^3 - 7x^2 + 7x + 15) \quad = \quad x + 5 \\
 & x^4 - 7x^3 + 7x^2 + 15x \\
\hline
- & 5x^3 - 6x^2 - 23x - 12 \\
 & 5x^3 - 35x^2 + 35x + 75 \\
\hline
 & 29x^2 - 58x - 87
\end{array}
$$

Ha úgy egyszerűbb számunkra a számolás, minden osztásnál megengedett, hogy az azt megelőző maradék helyett annak tetszőleges asszociáltjával (azaz ebben a feladatban bármely racionális számszorosával) osszunk. Itt $(29x^2 - 58x - 87) \cdot \frac{1}{29} = x^2 - 2x - 3$, vagyis $29x^2 - 58x - 87 \sim x^2 - 2x - 3$, úgyhogy a következő osztásban számolhatunk $x^2 - 2x - 3$-mal:

$$
\begin{array}{rl}
- & (x^3 - 7x^2 + 7x + 15) \quad : \quad (x^2 - 2x - 3) \quad = \quad x - 5 \\
 & x^3 - 2x^2 - 3x \\
\hline
- & -5x^2 + 10x + 15 \\
 & -5x^2 + 10x + 15 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

Azt kaptuk, hogy $\text{lnko}(f, g) \sim x^2 - 2x - 3$, így a közös gyökök meghatározásához az $x^2 - 2x - 3 = 0$ egyenletet kell megoldanunk. Ennek a megoldásai, azaz f és g közös gyökei: $x_1 = -1$ és $x_2 = 3$. A további gyökök meghatározásához szorzattá tudjuk alakítani f-et és g-t a legnagyobb közös osztójuk segítségével. A g polinommal egyszerűbb a dolgunk, hiszen az euklideszi algoritmus utolsó osztása az volt, hogy $g = (x^2 - 2x - 3)(x - 5) + 0$. Így:

$$x^3 - 7x^2 + 7x + 15 = 0$$

$$(x^2 - 2x - 3)(x - 5) = 0$$

$$
\begin{array}{ccc}
x^2 - 2x - 3 = 0 & \text{vagy} & x - 5 = 0 \\
x_1 = -1, \quad x_2 = 3 & & x_3 = 5
\end{array}
$$

Tehát g gyökei: $x_1 = -1$, $x_2 = 3$ és $x_3 = 5$.
Az f polinom szorzattá alakításához még egy osztást el kell végeznünk:

$$
\begin{array}{rl}
- & (x^4 - 2x^3 + x^2 - 8x - 12) \quad : \quad (x^2 - 2x - 3) \quad = \quad x^2 + 4 \\
 & x^4 - 2x^3 - 3x^2 \\
\hline
- & 4x^2 - 8x - 12 \\
 & 4x^2 - 8x - 12 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

Ez alapján:

$$x^4 - 2x^3 + x^2 - 8x - 12 = 0$$

$$(x^2 - 2x - 3)(x^2 + 4) = 0$$

$$
\begin{array}{ccc}
x^2 - 2x - 3 = 0 & \text{vagy} & x^2 + 4 = 0 \\
x_1 = -1, \quad x_2 = 3 & & x^2 = -4 \\
 & & \text{nincs megoldása}
\end{array}
$$

Azt kaptuk, hogy f-nek két racionális gyöke van: $x_1 = -1$ és $x_2 = 3$.

1.5.2. Feladat. Határozzuk meg az $f = x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12$ és a $g = x^4 + x^3 - x^2 - 4x - 12$ racionális együtthatós polinomok közös gyökeit, majd ennek felhasználásával f és g összes gyökét.

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.5.2)

Kidolgozott feladat. Határozzuk meg azokat az $u, v \in \mathbb{Z}_2[x]$ polinomokat, amelyek megoldásai a következő $\mathbb{Z}_2[x]$-beli diofantoszi egyenletnek.

$$(x^4 + x^2)u + (x^4 + x^3 + x + \overline{1})v = x^3 + x$$

Megoldás. Jelöljük x^4+x^2-t a-val és $x^4+x^3+x+\overline{1}$-t b-vel. Kiszámoljuk $\operatorname{lnko}(a,b)$-t az euklideszi algoritmus alkalmazásával.

$$\begin{array}{rl}
- & (x^4 + x^2) \quad : \quad (x^4 + x^3 + x + \overline{1}) \quad = \quad \overline{1} \\
 & x^4 + x^3 + x + \overline{1} \\ \hline
 & x^3 + x^2 + x + \overline{1}
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
- & (x^4 + x^3 + x + \overline{1}) \quad : \quad (x^3 + x^2 + x + \overline{1}) \quad = \quad x \\
 & x^4 + x^3 + x^2 + x \\ \hline
 & x^2 + \overline{1}
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
- & (x^3 + x^2 + x + \overline{1}) \quad : \quad (x^2 + \overline{1}) \quad = \quad x + \overline{1} \\
 & x^3 + x \\ \hline
- & x^2 + \overline{1} \\
 & x^2 + \overline{1} \\ \hline
 & \overline{0}
\end{array}$$

A polinomosztásokat a következő egyenletekkel írhatjuk le:

1. $a = b \cdot \overline{1} + (x^3 + x^2 + x + \overline{1})$
2. $b = (x^3 + x^2 + x + \overline{1})x + (x^2 + \overline{1})$
3. $x^3 + x^2 + x + \overline{1} = (x^2 + \overline{1})(x + \overline{1}) + \overline{0}$

Azt kaptuk, hogy $\operatorname{lnko}(a, b) \sim x^2 + \overline{1}$. Most $x^2 + \overline{1}$-et kifejezzük $x^2 + \overline{1} = ac + bd$ alakban. Ehhez az euklideszi algoritmus minden osztásánál kifejezzük a maradékot, és az így kapott kifejezést behelyettesítjük a következő egyenletbe, míg az utolsó nemnulla maradékos osztásból kijön a kívánt $ac + bd$ alak:

1. $x^3 + x^2 + x + \overline{1} = a + b$
2. $x^2 + \overline{1} = b + (x^3 + x^2 + x + \overline{1})x = b + (a + b)x = ax + b(x + \overline{1})$

Az utolsó egyenletet átrendezve, a kapott összefüggés már majdnem ugyanúgy néz ki, mint az eredeti egyenlet, amit meg akarunk oldani:

$$ax + b(x + \overline{1}) = x^2 + \overline{1}$$

$$(x^4 + x^2)x + (x^4 + x^3 + x + \overline{1})(x + \overline{1}) = x^2 + \overline{1}$$

Annyi a különbség, hogy az egyenlet jobb oldalán más polinom áll. Most derül ki, hogy az eredeti egyenletnek van-e egyáltalán megoldása: ha az eddigi számolásunkkal megkapott egyenletet meg tudjuk szorozni egy polinommal úgy, hogy ennek a jobb oldalán is x^3+x szerepeljen, akkor van megoldás (méghozzá végtelen sok), ha nem lehet így szorozni, akkor nincs megoldás. Látjuk, hogy most lehetséges az ilyen átalakítás, szorozzuk meg az egyenletet x-szel.

$$(x^4+x^2)x^2+(x^4+x^3+x+\overline{1})(x^2+x)=x^3+x$$

És az így kapott összefüggésből könnyedén leolvashatjuk az eredeti egyenlet egy megoldását: $u_0=x^2$, $v_0=x^2+x$. Ebből az összes megoldást a tanult képlettel tudjuk leírni:

$$u=x^2+\frac{x^4+x^3+x+\overline{1}}{x^2+\overline{1}}\cdot t,\quad v=x^2+x+\frac{x^4+x^2}{x^2+\overline{1}}\cdot t,\qquad \text{ahol } t\in\mathbb{Z}_2[x].$$

Könnyen látszik, hogy $\frac{x^4+x^2}{x^2+\overline{1}}=x^2$, az $\frac{x^4+x^3+x+\overline{1}}{x^2+\overline{1}}$ polinomot pedig egy polinomosztás segítségével kapjuk meg:

$$\begin{array}{rl}
- & (x^4+x^3+x+\overline{1}) \quad : \quad (x^2+\overline{1}) \quad = \quad x^2+x+\overline{1} \\
 & x^4+x^2 \\ \hline
- & \quad x^3+x^2+x+\overline{1} \\
 & \quad x^3+x \\ \hline
- & \qquad x^2+\overline{1} \\
 & \qquad x^2+\overline{1} \\ \hline
 & \qquad\quad \overline{0}
\end{array}$$

Tehát az egyenlet megoldásai:

$$u=x^2+(x^2+x+\overline{1})t,\quad v=x^2+x+x^2t,\qquad \text{ahol } t\in\mathbb{Z}_2[x].$$

1.5.3. Feladat. Oldjuk meg az u,v ismeretlen polinomokra az alábbi egyenleteket a megadott polinomgyűrűben.

(a) $(x^2-2x-3)u+(x^2+2x-15)v=x^2-3x,\quad \mathbb{R}[x]$;
(b) $(x^5+x^4+x^3+\overline{1})u+(x^4+\overline{1})v=x^2+\overline{1},\quad \mathbb{Z}_2[x]$;
(c) $(x^4+x^3+x+\overline{1})u+(x^3+\overline{2}x^2+\overline{2}x+\overline{1})v=x^2+x,\quad \mathbb{Z}_5[x]$;
(d) $(x^5+x+\overline{2})u+(x^4+\overline{2}x^2+\overline{2}x+\overline{1})v=x^3+x^2+\overline{2},\quad \mathbb{Z}_3[x]$.

(⇝ eredmény: 2.5.3)

Kidolgozott feladat. Határozzuk meg, hogy hányszoros gyöke az

$$f = 3x^5 - 18x^4 + 35x^3 - 18x^2 - 12x + 8$$

polinomnak a 2 szám az $\mathbb{R}[x]$ polinomgyűrűben, majd ennek segítségével alakítsuk szorzattá az f polinomot.
Megoldás. A Horner-módszert alkalmazzuk (az első sorban még részleteztük a számolást):

	3	-18	35	-18	-12	8
		$2 \cdot 3 - 18 =$	$2 \cdot (-12) + 35 =$	$2 \cdot 11 - 18 =$	$2 \cdot 4 - 12 =$	$2 \cdot (-4) + 8 =$
2	3	-12	11	4	-4	0
2	3	-6	-1	2	0	
2	3	0	-1	0		
2	3	6	11			

Három sor végén kaptunk 0-t, tehát 2 háromszoros gyöke f-nek. Ezek szerint f-ből kiemelhetjük az $(x-2)^3$ polinomot, ami után egy másodfokú tényező marad, aminek az együtthatóit az utolsó 0-ra végződő sorból tudjuk leolvasni (3, 0, -1):

$$f = (x - 2)^3(3x^2 - 1).$$

1.5.4. Feladat. Határozzuk meg, hogy hányszoros gyöke az f polinomnak a c szám a megadott polinomgyűrűben, majd ennek segítségével alakítsuk szorzattá az f polinomot.

(a) $f = x^5 - 6x^4 + 11x^3 - 11x^2 + 12x + 9, \quad c = 3, \quad \mathbb{Q}[x];$
(b) $f = x^5 - 8x^4 + 16x^3 + 18x^2 - 81x + 54, \quad c = 3, \quad \mathbb{R}[x];$
(c) $f = x^5 - 3ix^4 - 5x^3 + 7ix^2 + 6x - 2i, \quad c = i, \quad \mathbb{C}[x];$
(d) $f = x^4 + \overline{2}x^3 + x + \overline{2}, \quad c = \overline{2}, \quad \mathbb{Z}_3[x].$

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.5.4)

Kidolgozott feladat. Adjuk meg az $f = x^4 - 4$ polinom komplex gyökeit, és irreducibilis felbontását a $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$ és $\mathbb{Q}$ testek felett.
Megoldás.

$$x^4 - 4 = 0$$

$$x = \sqrt[4]{4}$$

A 4 komplex szám negyedik gyökeit egyszerűen meghatározhatjuk, ha ismerünk egyet a negyedik gyökei közül, és azt megszorozzuk a negyedik egységgyökökkel. Az egyik negyedik gyöke $\sqrt{2}$ természetesen, a negyedik egységgyökök pedig: $1, i, -1, -i$. Így f komplex gyökei: $x_1 = \sqrt{2}$, $x_2 = \sqrt{2}i$, $x_3 = -\sqrt{2}$ és $x_4 = -\sqrt{2}i$.
Másképp, 4 negyedik gyökeit úgy is kiszámolhatjuk, hogy alkalmazzuk a tanult képletet a $4(\cos 0 + i \sin 0)$ trigonometrikus alakjára:

$$x_1 = \sqrt[4]{4}\left(\cos\frac{0}{4} + i\sin\frac{0}{4}\right) = \sqrt{2}(\cos 0 + i\sin 0) = \sqrt{2}(1 + i\cdot 0) = \sqrt{2},$$

$$x_2 = \sqrt[4]{4}\left(\cos\frac{0+2\pi}{4} + i\sin\frac{0+2\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{2}(0 + i\cdot 1) = \sqrt{2}i,$$

$$x_3 = \sqrt[4]{4}\left(\cos\frac{0+2\cdot 2\pi}{4} + i\sin\frac{0+2\cdot 2\pi}{4}\right) = \sqrt{2}(\cos\pi + i\sin\pi) = \sqrt{2}(-1 + i\cdot 0) = -\sqrt{2},$$

$$x_4 = \sqrt[4]{4}\left(\cos\frac{0+3\cdot 2\pi}{4} + i\sin\frac{0+3\cdot 2\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = \sqrt{2}(0+i\cdot(-1)) = -\sqrt{2}i.$$

Bármelyik módszert is alkalmaztuk, azt kapjuk, hogy f irreducibilis felbontása $\mathbb{C}$ felett:

$$(x-\sqrt{2})(x-\sqrt{2}i)(x+\sqrt{2})(x+\sqrt{2}i).$$

Az $\mathbb{R}$ feletti irreducibilis felbontást úgy kapjuk meg a $\mathbb{C}$ felettiből, hogy összeszorozzuk azokat a tényezőket, amelyekben a gyökök egymás konjugáltjai. Esetünkben ez egyszerűen annyit jelent, hogy az $x-\sqrt{2}i$ és $x+\sqrt{2}i$ tényezőket szorozzuk össze: $(x-\sqrt{2}i)(x+\sqrt{2}i) = x^2+2$.
Tehát f irreducibilis felbontása $\mathbb{R}$ felett: $(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x^2+2)$.
Ahhoz, hogy minden együttható racionális legyen, az $x-\sqrt{2}$ és $x+\sqrt{2}$ tényezőket is össze kell szorozni: $(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2}) = x^2-2$.
Így f irreducibilis felbontása $\mathbb{Q}$ felett: $(x^2-2)(x^2+2)$.

1.5.5. Feladat. Adjuk meg a következő polinomok komplex gyökeit.

(a) x^4+16;
(b) x^3-8;
(c) x^4-i;
(d) x^6-64;
(e) x^3+8i;
(f) $x^4+1+\sqrt{3}i$.

(⇝ eredmény: 2.5.5)

1.5.6. Feladat. Adjuk meg a következő polinomok irreducibilis felbontását a $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ és $\mathbb{C}$ testek felett.

(a) x^5+x^3-6x;
(b) x^3-8;
(c) x^5+8x^2;
(d) x^4-25;
(e) x^6-27;
(f) $x^6-2x^4-8x^2$.

(⇝ eredmény: 2.5.6)

Kidolgozott feladat. Adjuk meg az $f = x^5 - 4x^4 + 2x^3 + 14x^2 - 23x + 10$ polinom racionális gyökeit, és irreducibilis felbontását a $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ és $\mathbb{C}$ testek felett.

Megoldás. Ötöd- vagy magasabb fokú egyenletnek nem létezik megoldóképlete, de a racionális gyökökre szükséges feltételt ad a Rolle-tétel (racionális gyökteszt). Ezt alkalmazva: ha a $\frac{p}{q}$ racionális szám gyöke f-nek, akkor $p \mid 10$ és $q \mid 1$. Tehát p lehetséges értékei $\pm1, \pm2, \pm5, \pm10$, q lehetséges értékei ±1, és így f lehetséges racionális gyökei $\pm1, \pm2, \pm5, \pm10$. Ezeket a számokat kell behelyettesíteni f-be, hogy eldöntsük, valóban gyökök-e.

Könnyen észrevehetjük, hogy $f(1) = 0$, tehát máris találtunk egy gyököt. Mi most szeretnénk rögtön megnézni azt is, hogy vajon 1 többszörös gyök-e, ezért a Horner-módszert alkalmazzuk:

	1	-4	2	14	-23	10
1	1	-3	-1	13	-10	0
1	1	-2	-3	10	0	
1	1	-1	-4	6		

Azt kaptuk, hogy 1 kétszeres gyök. A többi lehetséges gyöknél elég az $(x-1)^2$ tényező kiemelése utáni polinomot vizsgálni:

	1	-2	-3	10
~~-1~~	~~1~~	~~-3~~	~~0~~	~~10~~
~~2~~	~~1~~	~~0~~	~~-3~~	~~4~~
-2	1	-4	5	0

Találtunk még egy gyököt: -2-őt. Folytathatjuk akár annak a vizsgálatával, hogy -2 többszörös gyök-e, vagy a további négy lehetséges gyök ellenőrzésével. Viszont, ha most f-ből kiemeljük $(x-1)^2(x+2)$-őt, akkor már csak az $x^2 - 4x + 5$ másodfokú polinom marad, és másodfokú polinom gyökeit már könnyen meg tudjuk mondani.

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-20}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{4 \pm 2i}{2} = 2 \pm i$$

Tehát azt kaptuk, hogy f-nek nincs több racionális gyöke (sőt több valós gyöke sincs).
Így f irreducibilis felbontása $\mathbb{Q}$ és egyben $\mathbb{R}$ felett is: $(x-1)^2(x+2)(x^2-4x+5)$.
Irreducibilis felbontása $\mathbb{C}$ felett: $(x-1)^2(x+2)(x-2-i)(x-2+i)$.

1.5.7. Feladat. Határozzuk meg az alábbi $f \in \mathbb{Q}[x]$ polinomok racionális gyökeit és irreducibilis felbontásukat $\mathbb{Q}[x]$-ben.

(a) $f = x^3 - x^2 - x - 2$;
(b) $f = 2x^5 - x^4 - 2x^3 + x^2 - 4x + 2$;
(c) $f = 4x^4 + 6x^3 + 2x^2 - 8x - 4$.

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.5.7)

1.5.8. Feladat. Igazoljuk, hogy az alábbi $f \in \mathbb{Q}[x]$ polinomok irreducibilisek.

(a) $f = 2x^{100} - 3x^{73} + 69x - 12$;
(b) $f = 41x^{41} - 30x^{30} + 20x^{20} - 10$;
(c) $f = 5x^4 + 22x - 11$.

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.5.8)

1.6. Véges testek

Kidolgozott feladat. Bizonyítsuk, hogy a $\mathbb{Z}_3$ test feletti $f = x^3 + x^2 + 2x + 1$ polinom esetén $\mathbb{Z}_3[x]/\langle f\rangle$ testet alkot. Határozzuk meg az így kapott test elemszámát, karakterisztikáját, prímtestét.

Megoldás. T test és $T[x]$ feletti f polinom esetén $T[x]/\langle f\rangle$ pontosan akkor alkot testet, ha f irreducibilis $T[x]$-ben. Most $T = \mathbb{Z}_3$ és $f = x^3 + x^2 + 2x + 1$. Mivel f harmadfokú, így pontosan akkor irreducibilis, ha nincs gyöke. Miután $f(0) = 1$, $f(1) = 2$ és $f(2) = 2$, így f-nek nincs gyöke, tehát f irreducibilis és így $\mathbb{Z}_3[x]/\langle f\rangle$ test.

Mivel f harmadfokú, minden modulo f maradékosztálynak van ax^2+bx+c alakú reprezentánsa, ahol $a, b, c \in \{0, 1, 2\}$ (és minden ilyen alakú reprezentáns meg is jelenik elemként). Így összesen $3^3 = 27$ eleme van a $\mathbb{Z}_3[x]/\langle f\rangle$ testnek (hiszen a, b, c mindegyike 3-féle lehet).

A $\mathbb{Z}_3[x]/\langle f\rangle$ test karakterisztikája 3, hiszen $\mathbb{Z}_3[x]/\langle f\rangle$-ben $\overline{1} = \overline{1}$, $\overline{1}+\overline{1} = \overline{2}$, és csak $\overline{1}+\overline{1}+\overline{1} = \overline{0}$.

A $\mathbb{Z}_3[x]/\langle f\rangle$ test prímteste $\mathbb{Z}_3$, mert a $\{\overline{0}, \overline{1}\}$ által generált test (azaz $\mathbb{Z}_3[x]/\langle f\rangle$ legszűkebb résztteste) $\mathbb{Z}_3$.

1.6.1. Feladat. Döntsük el, hogy a megadott T test, és ezen test feletti f polinom esetén $T[x]/\langle f\rangle$ testet alkot-e. Ha igen, határozzuk meg az így kapott test elemszámát, karakterisztikáját, prímtestét.

(a) $T = \mathbb{Z}_2,\ f = x^2 + x + 1;$
(b) $T = \mathbb{Z}_2,\ f = x^2 + 1;$
(c) $T = \mathbb{Z}_3,\ f = x^2 + 1;$
(d) $T = \mathbb{Z}_3,\ f = x^3 + 2x^2 + 2;$
(e) $T = \mathbb{Z}_3,\ f = x^3 + 2x + 1;$
(f) $T = \mathbb{Z}_2,\ f = x^4 + x^3 + 1;$
(g) $T = \mathbb{Z}_2,\ f = x^4 + x^2 + 1.$

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.6.1)

Kidolgozott feladat. Adjuk meg a $\mathbb{Z}_3[x]/\langle x^3 + x^2 + 2x + 1\rangle$ test alábbi elemét: $\left(\overline{x^2 + 2x + 2} + \overline{x^2 + 2}\right) \cdot \overline{x^2 + 2x + 1}$.

Megoldás. Legyen $f = x^3 + x^2 + 2x + 1$. Maradékosztályok összeadásánál – mint ahogy kifejezések esetén általában – a megegyező hatványkitevős tagokat vonjuk össze, és figyelünk arra, hogy $\mathbb{Z}_3$ felett vagyunk:

$$\overline{x^2 + 2x + 2} + \overline{x^2 + 2} = \overline{2x^2 + 2x + 4} = \overline{2x^2 + 2x + 1}.$$

Tehát a következőt kell kiszámolnunk: $\overline{2x^2 + 2x + 1} \cdot \overline{x^2 + 2x + 1}$.

Maradékosztályok szorzásánál – mint ahogy kifejezések esetén általában – minden tagot minden taggal szorzunk, majd összevonunk (és persze figyelünk arra, hogy $\mathbb{Z}_3$ felett vagyunk):

$$\overline{2x^2 + 2x + 1} \cdot \overline{x^2 + 2x + 1} = \overline{2x^2} \cdot \overline{x^2} + \overline{2x^2} \cdot \overline{2x} + \overline{2x^2} \cdot \overline{1} + \overline{2x} \cdot \overline{x^2} + \overline{2x} \cdot \overline{2x} + \overline{2x} \cdot \overline{1} + \overline{1} \cdot \overline{x^2} + \overline{1} \cdot \overline{2x} + \overline{1} \cdot \overline{1}$$

$$= \overline{2x^4 + 6x^3 + 7x^2 + 4x + 1} = \overline{2x^4 + x^2 + x + 1}.$$

Azt látjuk, hogy a kapott polinom magasabb fokú, mint f, amely szerinti maradékosztályokat tekintünk. Ahogy korábban is, itt is a lehető „legkisebb" reprezentánst szeretnénk megkapni (mint ahogy pl. $\mathbb{Z}_5$-ben is a $\overline{14}$ helyett $\overline{4}$-el számolunk), ezért meg kell nézzük $\overline{2x^4 + x^2 + x + 1}$ milyen maradékot ad f-el osztva. Ezt egy ($\mathbb{Z}_3$ feletti) polinomosztás segítségével kaphatjuk meg.

$$\begin{array}{rl} - & (2x^4 + x^2 + x + 1) \quad : \quad (x^3 + x^2 + 2x + 1) \quad = \quad 2x + 1 \\ & 2x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x \\ \hline - & x^3 + 2x + 1 \\ & x^3 + x^2 + 2x + 1 \\ \hline & 2x^2 \end{array}$$

Tehát $\left(\overline{x^2 + 2x + 2} + \overline{x^2 + 2}\right) \cdot \overline{x^2 + 2x + 1} = \overline{2x^2}$.

Kidolgozott feladat. Adjuk meg a $\mathbb{Z}_3[x]/\langle x^3 + x^2 + 2x + 1\rangle$ test $\overline{x^2 + 1}^{-1}$ elemét.
Megoldás. Legyen $f = x^3 + x^2 + 2x + 1$. Azon u polinomot (pontosabban maradékosztályt) keressük, melynek az $\overline{x^2 + 1}$ maradékosztállyal vett szorzata $\overline{1}$. Miután $\overline{f} = \overline{0}$, a következő diofantoszi egyenletet írhatjuk fel: $(x^2 + 1) \cdot u + f \cdot v = 1$. Ennek megoldását az $\mathrm{lnko}(x^2 + 1, f) = \mathrm{lnko}(x^2 + 1, x^3 + x^2 + 2x + 1)$ számolásával kezdjük.

$$\begin{array}{rl} - & (x^3 + x^2 + 2x + 1) \quad : \quad (x^2 + 1) \quad = \quad x + 1 \\ & x^3 + x \\ \hline - & x^2 + x + 1 \\ & x^2 + 1 \\ \hline & x \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} - & (x^2 + 1) \quad : \quad (x) \quad = \quad x \\ & x^2 \\ \hline & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} - & (x) \quad : \quad (1) \quad = \quad x \\ & x \\ \hline & 0 \end{array}$$

Tehát $\mathrm{lnko}(x^2 + 1, x^3 + x^2 + 2x + 1) = 1$. Ekkor a polinomosztások segítségével ki tudjuk fejezni az lnko-t:

$$\left.\begin{array}{l} f = (x + 1)(x^2 + 1) + x \\ (x^2 + 1) = x \cdot (x) + 1 \end{array}\right\} 1 = (x^2 + 1) - x \cdot (x) = (x^2 + 1) - \big(f - (x + 1)(x^2 + 1)\big)\,(x) =$$
$$(x^2 + 1)(x^2 + x + 1) - f(x).$$

Ezek szerint egy partikuláris megoldása a diofantoszi egyenletnek: $u_0 = x^2 + x + 1$ és $v_0 = -x = 2x$. Tehát azt kaptuk, hogy $\overline{u} = \overline{x^2 + 1}^{-1} = \overline{x^2 + x + 1}$.
Ellenőrzés: $(x^2 + 1) \cdot (x^2 + x + 1) = x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1$, ami $f = x^3 + x^2 + 2x + 1$-el leosztva 1-et ad maradékul, ami azt jelenti, hogy $\overline{x^2 + 1} \cdot \overline{x^2 + x + 1} = \overline{1}$.

1.6.2. Feladat. Adjuk meg a $\mathbb{Z}_3[x]/\langle x^3 + x^2 + 2\rangle$ test alábbi elemeit:

(a) $\overline{x + 2} + \overline{x^2 + 2x + 1}$;
(b) $\overline{x^2 + 2x + 1} \cdot \overline{x + 2}$;
(c) $\overline{x^2 + 2x + 1} \cdot \overline{x^2 + 2}$;
(d) $\overline{x + 2}^{-1}$.

(⇝ eredmény: 2.6.2)

1.6.3. Feladat. Végezzük el a műveleteket a megadott K véges testekben.

(a) $K = \mathbb{Z}_{17}$; $\quad 16 \cdot 10, \quad 3^{-1}$;
(b) $K = \mathbb{Z}_{19}$; $\quad 17 \cdot 9, \quad 6^{-1}$;
(c) $K = \mathbb{Z}_2[x]/\langle x^4 + x^3 + 1\rangle$; $\quad \overline{x^3+x+1} \cdot \overline{x^2+1}, \quad \overline{x^3+x^2}^{-1}$;
(d) $K = \mathbb{Z}_3[x]/\langle x^3 + 2x^2 + x + 1\rangle$; $\quad \overline{x^2+2x+1} \cdot \overline{x^2+2}, \quad \overline{x^2+2x+1}^{-1}$;
(e) $K = \mathbb{Z}_3[x]/\langle x^3 + x^2 + 2x + 1\rangle$; $\quad \overline{x^2+x+1} \cdot \overline{x^2+2x}, \quad \overline{x^2+x+1}^{-1}$.

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.6.3)

Kidolgozott feladat. Határozzuk meg a $K = \mathbb{Z}_3[x]/\langle x^2 + 2x + 2\rangle$ testben az $\alpha = \overline{2x+1}$ elem (multiplikatív) rendjét. Döntsük el, hogy primitív-e az adott elem a K testben.
Megoldás. Tudjuk, hogy tetszőleges m-elemű K test α eleme esetén $o(\alpha) \mid m-1$. Mivel a $K = \mathbb{Z}_3[x]/\langle x^2 + 2x + 2\rangle$ testnek $m = 3^2 = 9$ eleme van, ez azt jelenti, hogy $o(\alpha) \mid 9 - 1 = 8$. Ezek szerint α rendje csak az $1, 2, 4, 8$ számok egyike lehet. Most megnézzük α hanyadik hatványa $\overline{1}$.
$\alpha^1 = \overline{2x+1} \neq \overline{1}$;
$\alpha^2 = \overline{2x+1}^2 = \overline{2x+1} \cdot \overline{2x+1} = \overline{4x^2+4x+1} = \overline{x^2+x+1}$, melynek egy kisebb fokú reprezentánsa $\overline{2x+2} \neq \overline{1}$;
α^3-t nem kell kiszámolnunk, hiszen a fentiek szerint α rendje nem lehet 3;
$\alpha^4 = (\alpha^2)^2 = \overline{2x+2}^2 = \overline{2x+2} \cdot \overline{2x+2} = \overline{4x^2+8x+4} = \overline{x^2+2x+1}$, melynek egy kisebb fokú reprezentánsa $\overline{2} \neq \overline{1}$.
Megint csak a fentiek szerint $5, 6, 7$ közül egyik sem lehet α rendje. Továbbá, mivel az $1, 2, 4, 8$ számok közül se az 1, se a 2, se a 4 nem az α rendje, csak a 8 lehet az. Valóban, $\alpha^8 = (\alpha^4)^2 = \overline{2}^2 = \overline{2} \cdot \overline{2} = \overline{4} = \overline{1}$. Tehát $o(\alpha) = 8$.
Mivel $o(\alpha) = |K| - 1 = m - 1$, így α primitív elem.

1.6.4. Feladat. Határozzuk meg a K testben az α elem (multiplikatív) rendjét. Döntsük el, hogy primitív-e az adott elem a K testben.

(a) $K = \mathbb{Z}_5$, $\alpha = 2$;
(b) $K = \mathbb{Z}_7$, $\alpha = 4$;
(c) $K = \mathbb{Z}_2[x]/\langle x^2 + x + 1\rangle$, $\alpha = \overline{x+1}$;
(d) $K = \mathbb{Z}_2[x]/\langle x^3 + x + 1\rangle$, $\alpha = \overline{x^2+1}$;
(e) $K = \mathbb{Z}_3[x]/\langle x^2 + 2x + 2\rangle$, $\alpha = \overline{x+1}$;
(f) $K = \mathbb{Z}_3[x]/\langle x^2 + x + 2\rangle$, $\alpha = \overline{x+1}$.

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.6.4)

Kidolgozott feladat. Határozzuk meg az $\overline{x+1} \in \mathbb{Z}_2[x]/\langle x^4+x+1\rangle$ elem minimálpolinomját.
Megoldás. Legyen $f = x^4+x+1$ és $\alpha = \overline{x+1}$. Keressük azt a $\mathbb{Z}_2$ feletti legkisebb fokszámú g főpolinomot, melyre $g(\alpha) = \overline{0}$. Elkezdjük α-t hatványozgatni, egészen addig, amíg elő nem tudjuk állítani a hatványok segítségével a $\overline{0}$-t, amelyből leolvasható a minimálpolinom. Az egyes hatványokat „lekódoljuk": egy $\overline{ax^3+bx^2+cx+d}$ elemhez a $dcba \in \mathbb{Z}_2^4$ vektort rendeljük, és ezen vektorok segítségével keressük a minimálpolinomot. A cél a $\overline{0} = 0000$ előállítása a kapott vektorokból $\mathbb{Z}_2$ feletti nemtriviális lineáris kombináció segítségével. Azaz lineárisan függő vektorrendszert szeretnénk α hatványaiból előálllítani. A 0-dik hatványt is figyelembe vesszük.
$\alpha^0 = \overline{1} = 1000$; ebből önmagában még nem tudjuk kihozni a 0000-t nemtriviális lineáris kombináció segítségével, így tovább számolunk;
$\alpha^1 = \overline{x+1} = 1100$; ebből és az előzőből együtt még nem áll elő a 0000 nemtriviális lineáris kombináció segítségével, így tovább számolunk;
$\alpha^2 = \overline{x+1}^2 = \overline{x^2+2x+1} = \overline{x^2+1} = 1010$; ebből és az előzőekből együtt még nem tudjuk kihozni a 0000-t nemtriviális lineáris kombináció segítségével, azaz az $\alpha^0, \alpha^1, \alpha^2$ vektorrendszer lineárisan független, így tovább számolunk;
$\alpha^3 = \overline{x+1}^3 = \overline{x^3+3x^2+3x+1} = \overline{x^3+x^2+x+1} = 1111$; ebből és az előzőekből együtt még nem tudjuk előállítani a 0000-t nemtriviális lineáris kombináció segítségével, így tovább számolunk;
$\alpha^4 = \overline{x+1}^4 = \overline{x^4+4x^3+6x^2+4x+1} = \overline{x^4+1}$, ennek egy reprezentánsa $\overline{x}$, ami átírva 0100. Mostmár elő tudjuk állítani a 0000 vektort, a következőképpen:

$$1 \cdot 1000 + 1 \cdot 1100 + 0 \cdot 1010 + 0 \cdot 1111 + 1 \cdot 0100 = 0000.$$

Tehát összességében a 0000 (azaz $\overline{0}$) előáll úgy, hogy 1-szer vesszük α^0-t, 1-szer α^1-t, 0-szor α^2-t, 0-szor α^3-t és 1-szer α^4-t. Tehát $1 \cdot \alpha^0 + 1 \cdot \alpha^1 + 0 \cdot \alpha^2 + 0 \cdot \alpha^3 + 1 \cdot \alpha^4 = \overline{1} + \alpha^1 + \alpha^4 = \overline{0}$. Ebből azonnal adódik a minimálpolinom: $g = (1 + x^1 + x^4 =)\ x^4 + x + 1$, hiszen $g(\alpha) = \overline{0}$, és ez a legkisebb fokszámú főpolinom ezzel a tulajdonsággal.
Felmerülhet a kérdés, hogy általában α hatványozását meddig kell folytatni, van-e valami korlát, amikor már biztosan lineárisan függő az α hatványokból álló vektorrendszer. A mi esetünkben $\mathbb{Z}_2^4$-ben, egy 4-dimenziós vektortérben minden legalább 5-elemű vektorrendszer lineárisan függő. Mivel α^4 kiszámolásával már 5 vektort kaptunk (hiszen α^0-tól indultunk), a vektorrendszer mindenképp lineárisan függő, ami azt jelenti, hogy a $\overline{0}$ biztosan előállítható ezen α-hatványok nemtriviális lineáris kombinációjaként. Általában tehát a dimenzió, azaz a vektorok komponenseinek száma, felső korlátot ad arra, hogy mekkora kitevőig kell maximum hatványoznunk.

1.6.5. Feladat. Határozzuk meg az $\alpha \in K$ elem minimálpolinomját.

(a) $K = \mathbb{Z}_3[x]/\langle x^2+2x+2\rangle,\ \alpha = \overline{x+1}$;
(b) $K = \mathbb{Z}_2[x]/\langle x^3+x^2+1\rangle,\ \alpha = \overline{x+1}$;
(c) $K = \mathbb{Z}_2[x]/\langle x^4+x^3+1\rangle,\ \alpha = \overline{x^2+1}$.

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.6.5)

1.7. Kódolás

Kidolgozott feladat. Tekintsük a $C = \{11001, 01111, 00000, 10110\} \subseteq \mathbb{Z}_2^5$ kódot. Mennyi a minimális távolsága? Hány hibajelző, hány hibajavító? Mennyi az információs rátája? Döntsük el, hogy lineáris-e.
Megoldás. A C-beli szavak Hamming-távolsága:

$d(11001, 01111) = 3$ $\quad$ $d(11001, 10110) = 4$ $\quad$ $d(01111, 10110) = 3$
$d(11001, 00000) = 3$ $\quad$ $d(01111, 00000) = 4$ $\quad$ $d(00000, 10110) = 3$

Tehát C minimális távolsága: $d(C) = 3$.
Ez alapján a C kód $3 - 1 = 2$-hibajelző és $\lfloor \frac{3-1}{2} \rfloor = 1$-hibajavító.
Információs rátája: $\frac{\log_2 4}{5} = \frac{2}{5}$.
Nézzük, hogy C zárt-e az összeadásra:

$11001 + 01111 = 10110 \in C$ $\quad$ $11001 + 10110 = 01111 \in C$ $\quad$ $01111 + 10110 = 11001 \in C$
$11001 + 00000 = 11001 \in C$ $\quad$ $01111 + 00000 = 01111 \in C$ $\quad$ $00000 + 10110 = 10110 \in C$

Azt látjuk, hogy bármely két C-beli szó összege is C-beli, tehát a kód zárt az összeadásra. Azt, hogy C zárt-e a skalárral való szorzásra, nagyon egyszerű leellenőrizni $\mathbb{Z}_2$ feletti kód esetén, hiszen csak két skalárunk van. Az 1-gyel való szorzással ugyanazokat a szavakat kapjuk, a 0-val való szorzással pedig 00000-t, ami eleme C-nek. (Azaz a skalárral való szorzásnál most csak azt kellett ellenőrizni, hogy a nullvektor eleme a halmaznak.) Tehát a C kód lineáris.

1.7.1. Feladat. Határozzuk meg a $C \subseteq K^n$ blokk-kód minimális távolságát, továbbá azt, hogy hány hibajelző, illetve hibajavító. Döntsük el, hogy a C kód lineáris-e.

(a) $C = \{000, 011, 101, 110\} \subseteq \mathbb{Z}_2^3$;
(b) $C = \{0102, 1010, 0021, 2200\} \subseteq \mathbb{Z}_3^4$;
(c) $C = \{0000, 0101, 1100, 1001\} \subseteq \mathbb{Z}_2^4$.

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.7.1)

Kidolgozott feladat. Igazoljuk, hogy

$$C = \{0000, 0112, 0110, 0220, 0111, 0001, 0002, 0222, 0221\} \subseteq \mathbb{Z}_3^4$$

lineáris kód. Adjunk meg egy C-vel ekvivalens D szisztematikus lineáris kódót. Adjuk meg D generátor- és ellenőrző mátrixát.
Megoldás. Észrevehetjük, hogy minden C-beli szó első szimbóluma 0, a második szimbólum megegyezik a harmadikkal, és a negyedik helyen minden lehetséges szimbólum szerepel. Pontosabban: $C = \{abcd \in \mathbb{Z}_3^4 \mid a = 0, b = c\}$.
Így ha $u = u_1u_2u_3u_4, v = v_1v_2v_3v_4 \in C$, akkor $u + v = x_1x_2x_3x_4$-re a következők teljesülnek: $x_1 = u_1 + u_2 = 0 + 0 = 0$ és $x_2 = u_2 + v_2 = u_3 + v_3 = x_3$. Azaz $u + v$ is rendelkezik a C-t definiáló tulajdonságokkal, tehát eleme C-nek. Ezzel beláttuk, hogy C zárt az összeadásra. Ha $u = u_1u_2u_3u_4 \in C$ és $k \in \mathbb{Z}_3$, akkor $ku = x_1x_2x_3x_4$-re teljesül, hogy $x_1 = k \cdot u_1 = k \cdot 0 = 0$, $x_2 = k \cdot u_2 = k \cdot u_3 = x_3$. Tehát ku benne van C-ben tetszőleges $k \in \mathbb{Z}_3$ és $u \in C$ esetén, C zárt a skalárral való szorzásra. Igazoltuk, hogy C lineáris kód.

Tudjuk, hogy a K alaptest feletti C lineáris kód dimenziója $\log_{|K|}|C|$, tehát ez a kód $\log_3 9 = 2$ dimenziós, a generátormátrixai 2 sorból állnak. Ahhoz, hogy a C-vel ekvivalens D kód szisztematikus legyen, D generátormátrixának $G = (E_2 H)$ alakúnak kell lennie, azaz a 2×2-es egységmátrixszal kell kezdődnie. Vagyis D-nek olyan bázisát kell megadni, ahol az első bázisvektor 10-val kezdődik, a második bázisvektor pedig 01-gyel. Ilyen ekvivalens kódot készíthetünk például úgy, hogy C minden szavában felcseréljük az első és utolsó szimbólumot:

$$D = \{0000, 2110, 0110, 0220, 1110, 1000, 2000, 2220, 1220\}.$$

Az $1000, 0110$ vektorok lineárisan függetlenek ebben a 2 dimenziós vektortérben, tehát D egy bázisát alkotják. Így D egy generátormátrixa:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Látjuk, hogy D valóban szisztematikus kód.
A tanultak alapján képezzük ebből a G generátormátrixból D egy P ellenőrzőmátrixát: az egységmátrixot követő H részmátrixot szorozzuk -1-gyel, azaz $-1 = 2$-vel $\mathbb{Z}_3$-ban, ez lesz P első két sora. Ez alatt a 2×2-es egységmátrix alkotja P harmadik és negyedik sorát.

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1.7.2. Feladat. Igazoljuk, hogy C lineáris kód. Határozzuk meg C információs rátáját. Adjunk meg egy C-vel ekvivalens D szisztematikus lineáris kódót. Adjuk meg D generátor- és ellenőrző mátrixát is.

(a) $C = \{0000, 0011, 1101, 1110\} \subseteq \mathbb{Z}_2^4$;
(b) $C = \{00000, 11110, 11011, 00101\} \subseteq \mathbb{Z}_2^5$;
(c) $C = \{0000, 1201, 2110, 2102, 1220, 0011, 2121, 1212, 0022\} \subseteq \mathbb{Z}_3^4$.

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.7.2)

Kidolgozott feladat. A $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ mátrix egy $\mathbb{Z}_3$ feletti szisztematikus lineáris kód generátormátrixa. Döntsük el, hogy $v = 22202$ kódszó-e, és ha nem, akkor adjuk meg a v-hez legközelebbi kódszót.
Megoldás. A korábbiakhoz hasonlóan elkészítjük a kód egy ellenőrzőmátrixát:

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Kiszámoljuk a vP szorzatot:

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Az eredmény nem 000, tehát $v \notin C$.
A v-hez legközelebbi kódszó keresésénél is ennek a szorzásnak a segítségével tudjuk kitalálni, melyik szimbólumokon kell változtatni v-ben. Azt kell megmondanunk, hogy 021, a hiba, amit a szorzás eredményeként kaptunk, hogyan áll elő P lehető legkevesebb sorának lineáris kombinációjaként. Látjuk, hogy 021 megegyezik P második sorának a 2-szeresével. Ezzel azt találtuk ki, hogy a 02000 szóval szorozva P-t ugyanúgy 021 lesz az eredmény. Valóban:

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Most már csak le kell vonni v-ből 02000-t (azaz változtatni kell a második szimbólumon v-ben), és így megkapjuk a v-hez legközelebbi kódszót:

$$22202 - 02000 = 20202$$

1.7.3. Feladat. G egy szisztematikus lineáris kód generátormátrixa. Döntsük el, hogy v kódszó-e, ha nem, akkor adjuk meg a v-hez legközelebbi kódszót.

(a) $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_2^{2\times 5}, \quad v = 11111;$

(b) $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_3^{2\times 6}, \quad v = 211112;$

(c) $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_3^{3\times 6}, \quad v = 202010.$

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.7.3)

Kidolgozott feladat. Adjuk meg a $\mathbb{Z}_5$ feletti 6-hosszú Hamming-kód egy ellenőrzőmátrixát és egy generátormátrixát.

Megoldás. Írjuk le a Hamming-kód hossza és az alaptest közötti összefüggést:

$$6 = \frac{5^r - 1}{5 - 1}$$

$$24 = 5^r - 1$$

$$r = 2$$

Tehát ennek a kódnak az ellenőrzőmátrixa egy olyan 6×2-es mátrix, melynek sorai páronként lineárisan függetlenek. Ilyen mátrixot tudunk kapni úgy, hogy felsoroljuk $\mathbb{Z}_5^2$ összes olyan vektorát, melynek első nemnulla komponense 1. Az 10 és 01 vektorokat a felsorolás végére hagyjuk (vagyis az ellenőrzőmátrix utolsó soraiba), mert a P ellenőrzőmátrixból akkor tudjuk egyszerűen elkészíteni a G generátormátrixot, ha P alsó sorai az egységmátrixot alkotják:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Most alkalmazzuk a szokásos összefüggést, csak a fordított irányban, mint a korábbi feladatokban. Tehát vegyük az egységmátrix fölötti H részmátrix -1-szeresét (figyeljünk arra, hogy a $\mathbb{Z}_5$ test felett vagyunk):

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad -H = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 3 \\ 4 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Ez a $-H$ mátrix kerül a generátormátrix utolsó oszlopaiba, az első oszlopokból álló részmátrix pedig a megfelelő méretű (azaz itt 4×4-es) egységmátrix:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

1.7.4. Feladat. Adjuk meg a K test feletti n-hosszú Hamming-kód egy lehetséges P ellenőrző mátrixát, G generátormátrixát, valamint információs rátáját.

(a) $K = \mathbb{Z}_2, \quad n = 3;$
(b) $K = \mathbb{Z}_2, \quad n = 5;$
(c) $K = \mathbb{Z}_2, \quad n = 7;$
(d) $K = \mathbb{Z}_3, \quad n = 4.$

(⇝ eredmény: 2.7.4)

Kidolgozott feladat. Hány nemtriviális $\mathbb{Z}_3$ feletti 4-hosszú ciklikus lineáris kód létezik? Adjunk meg ezek közül legalább hármat a generátormátrixukkal.
Megoldás. A C kód akkor és csak akkor nemtriviális 4-hosszú ciklikus lineáris kód $\mathbb{Z}_3$ felett, ha a kód g generátorpolinomja valódi osztója az x^4-1 polinomnak $\mathbb{Z}_3[x]$-ben. Tehát meg kell határoznunk x^4-1 összes valódi osztóját. Ezeket a $\mathbb{Z}_3$ feletti irreducibilis felbontásából tudjuk leolvasni:

$$x^4-1=(x^2-1)(x^2+1)=(x-1)(x+1)(x^2+1)=(x+2)(x+1)(x^2+1)$$

Az utolsó tényezőnek, x^2+1-nek nincs gyöke $\mathbb{Z}_3$ felett (egyszerű behelyettesítésel látható, hogy se 0, se 1, se 2 nem gyöke), és mivel másododfokú, ezért irreducibilis. Tehát meghatároztuk x^4-1 irreducibilis felbontását.
Ebből az összes osztójának a száma ugyanolyan képlettel számolható, mint amivel egy egész szám összes pozitív osztójának a száma: ha $p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdot\dots\cdot p_k^{a_k}$ az n egész szám prímtényezős felbontása, akkor n pozitív osztóinak a száma $(a_1+1)(a_2+1)\cdot\dots\cdot(a_k+1)$. Ha csak a valódi osztókra vagyunk kíváncsiak, ebből 1-et le kell vonjunk, így azt kapjuk, hogy x^4-1-nek összesen $(1+1)(1+1)(1+1)-1=7$ valódi osztója van. Tehát 7 nemtriviális $\mathbb{Z}_3$ feletti 4-hosszú ciklikus lineáris kód létezik.
Például:

- $g=x+2$. A G generátormátrixnak $n-\deg(g)=4-1$ sora van, az első sora g, majd xg és x^2g (lényegében g együtthatóit eggyel hátrébb csúsztatjuk, eléjük 0-kat írunk):

$$G=\begin{pmatrix}2&1&0&0\\0&2&1&0\\0&0&2&1\end{pmatrix}$$

- $g=x^2+1$:

$$G=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\end{pmatrix}$$

- $g=(x+1)(x^2+1)=x^3+x^2+x+1$:

$$G=\begin{pmatrix}1&1&1&1\end{pmatrix}$$

1.7.5. Feladat. Határozzuk meg az összes nemtriviális K test feletti n-hosszú ciklikus lineáris kódot.

(a) $K=\mathbb{Z}_3,\quad n=3;$
(b) $K=\mathbb{Z}_2,\quad n=4.$

(⇝ eredmény: 2.7.5)

Kidolgozott feladat. Tervezzünk $\mathbb{Z}_3$ feletti 6-hosszú 1-hibajavító BCH-kódot!
Megoldás. Első lépésként, mivel 6-hosszú kódot készítünk, kell találnunk egy legalább 6-rendű α elemet valamilyen $\mathbb{Z}_3[x]/\langle f\rangle$ testben. Ha $\deg(f)=1$, akkor $|\mathbb{Z}_3[x]/\langle f\rangle|=3$, túl kicsi elemszámú test. Ha $\deg(f)=2$, akkor $|\mathbb{Z}_3[x]/\langle f\rangle|=3^2$, itt az elemek rendjei $3^2-1=8$ osztói, tehát egy ilyen testben már tudunk találni legalább 6-rendű elemet. Szóval f-nek legalább másodfokú $\mathbb{Z}_3$ felett irreducibilis polinomnak kell lennie. Például x^2+x+2-nek nincs gyöke $\mathbb{Z}_3$ felett és másodfokú, így irreducibilis, az $f=x^2+x+2$ választás megfelelő.

Vizsgáljuk $\mathbb{Z}_3[x]/\langle x^2+x+2\rangle$ elemeinek a rendjét, mondjuk mennyi $\alpha=\overline{x+1}$ rendje?
$\overline{x+1}^1=\overline{x+1}$
$\overline{x+1}^2=\overline{x^2+2x+1}=\overline{2x}$
$\overline{x+1}^4=\overline{2x}^2=\overline{x^2}=\overline{2}$
$\overline{x+1}^8=\overline{2}^2=\overline{1}$
Tehát $\alpha=\overline{x+1}$ jó választás, hisz a rendje 8.

Ezután mivel 1-hibajavító kódot szeretnénk, a kód minimális távolságának 3-nak vagy 4-nek kell lennie, válasszuk 3-at. Ez esetben ki kell számoljuk $\overline{x+1},\dots,\overline{x+1}^{3-1}$ minimálpolinomjait, azaz $\overline{x+1}$ és $\overline{x+1}^2$ minimálpolinomját.

$\alpha=\overline{x+1}$ minimálpolinomja:
$\overline{x+1}^0=\overline{1}=10$
$\overline{x+1}^1=\overline{x+1}=11$
10 és 11 független vektorok, tovább kell számolnunk.
$\overline{x+1}^2=\overline{2x}=02$
Egy 2 dimenziós vektortér bármely 3 vektora lineárisan függő, így 02, 11, 10 is. Ezekből már elő lehet állítani a nullvektort nemtriviális módon: $00=02+11+2\cdot 10=\alpha^2+\alpha+2$. Ez azt jelenti, hogy α minimálpolinomja x^2+x+2.

$\alpha^2=\overline{x+1}^2$ minimálpolinomja:
$(\overline{x+1}^2)^0=\overline{1}=10$
$(\overline{x+1}^2)^1=\overline{2x}=02$
10 és 02 független vektorok, tovább kell számolnunk.
$(\overline{x+1}^2)^2=\overline{2}=20$
Az előzőhöz hasonlóan ez a három vektor már függő, a nullvektort így kapjuk meg belőlük: $00=20+10=(\alpha^2)^2+1$. Azt kaptuk, hogy α^2 minimálpolinomja x^2+1.

Végezetül számoljuk ki α és α^2 minimálpolinomjainak a legkisebb közös többszörösét, ez a polinom lesz a ciklikus BCH kódunk generátorpolinomja. A minimálpolinomok irreducibilis polinomok, így $\mathrm{lnko}(x^2+x+2,x^2+1)=1$. Ebből következik, hogy a kód generátorpolinomja:

$$g=\mathrm{lkkt}(x^2+x+2,x^2+1)=(x^2+x+2)(x^2+1)=x^4+x^3+x+2$$

Ennek a g generátorpolinomnak megfelelő 6-hosszú szó a 210110. Így az alábbi generátormátrix egy $\mathbb{Z}_3$ feletti 6-hosszú 1-hibajavító BCH-kódot generál:

$$G=\begin{pmatrix}2&1&0&1&1&0\\0&2&1&0&1&1\end{pmatrix}$$

1.7.6. Feladat. Tervezzünk a K test α eleme segítségével n-hosszú t-hibajelző BCH-kódot. Adjuk meg a kód generátormátrixát.

(a) $K = \mathbb{Z}_2[x]/\langle x^3 + x + 1\rangle, \quad \alpha = \overline{x+1}, \quad n = 6, \quad t = 2;$
(b) $K = \mathbb{Z}_2[x]/\langle x^4 + x + 1\rangle, \quad \alpha = \overline{x+1}, \quad n = 11, \quad t = 3;$
(c) $K = \mathbb{Z}_3[x]/\langle x^3 + x^2 + 2\rangle, \quad \alpha = \overline{x}, \quad n = 8, \quad t = 2.$

($\rightsquigarrow$ eredmény: 2.7.6)

2. fejezet

Megoldások

2.1. Permutációk

2.1.1. Feladat. Felbontás páronként idegen ciklusok szorzatára:

(a) $\alpha = (1\,7)(2\,4\,3)(5\,6)$;
(b) $\beta = (2\,6\,3\,5\,4)$;
(c) $\gamma = (1\,4)(2\,5)(3\,7)$.

(⇝ vissza a feladathoz: 1.1.1)

2.1.2. Feladat. A permutációk kétsoros alakja:

(a) $\delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 7 & 6 & 2 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$;
(b) $\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 6 & 4 & 5 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;
(c) $\eta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 7 & 1 & 2 & 4 & 6 & 3 \end{pmatrix}$.

(⇝ vissza a feladathoz: 1.1.2)

2.1.3. Feladat. Páronként idegen ciklusok szorzataként:

(a) $(1\,3\,5\,2\,4)$;
(b) $(1\,2\,4\,3\,6)$;
(c) $(1\,5\,6)(2\,3)$;
(d) $(1\,2\,4)(5\,6)$.

(⇝ vissza a feladathoz: 1.1.3)

2.1.4. Feladat. A műveletek eredménye:

(a) $\alpha\beta = (1\,7)(3\,6\,4\,5)$;
(b) $\beta\alpha = (1\,7)(2\,5\,3\,6)$;
(c) $(\beta\alpha)^{-1} = (1\,7)(6\,3\,5\,2)$;
(d) $\beta^2 = (2\,3\,4\,6\,5)$;
(e) $\beta^{2013} = (5\,6\,4\,3\,2)$;
(f) $\alpha^8 = (2\,3\,4)$;
(g) $\varepsilon\eta^{-1}\beta\gamma\delta^{-1} = (1\,3\,6\,7\,4\,5)$.

(⇝ vissza a feladathoz: 1.1.4)

2.1.5. Feladat. A műveletek eredménye:

(a) $(4\,5)$;
(b) $(8\,7)(6\,4\,3\,2\,1)$;
(c) $(1\,3)(2\,4)(5\,8\,7)$;
(d) $(2\,4\,3)$;
(e) id_{S_9};

(f) $(6\,2\,5)(1\,9\,3)$;
(g) $(8\,2\,4\,3\,1)(5\,7)$.

(⇝ vissza a feladathoz: 1.1.5)

2.1.6. Feladat. Permutációegyenletek megoldása:

(a) $\sigma = (1\,4\,3\,2\,6)$
(b) $\sigma = (1\,8\,3\,7\,6\,4)(2\,5)$
(c) $\sigma = (1\,2\,5)(4\,6)$

(⇝ vissza a feladathoz: 1.1.6)

2.1.7. Feladat. A megadott permutációk paritása:
páros: $\alpha, \beta, \varepsilon$
páratlan: γ, δ, η,(a),(b)

(⇝ vissza a feladathoz: 1.1.7)

2.1.8. Feladat. Összeszámlálás:

(a) $|M_\sigma| = 0$: 1 darab;
(b) $|M_\sigma| = 1$: 0 darab;
(c) $|M_\sigma| = 2$: 15 darab;
(d) $|M_\sigma| = 3$: 40 darab;
(e) $|M_\sigma| = 4$: 135 darab;
(f) $|M_\sigma| = 5$: 264 darab;
(g) $|M_\sigma| = 6$: 265 darab.

(⇝ vissza a feladathoz: 1.1.8)

2.1.9. Feladat. Lásd 2.1.8.(g) feladat megoldása.

(⇝ vissza a feladathoz: 1.1.9)

2.1.1. További videók

Páronként idegen ciklusok szorzatára való bontás
Kétsoros írásmódra való váltás
Permutációk szorzása és hatványozása 1.
Permutáiók szorzása és hatványozása 2.
Ciklusok hatványozása
Egyenlet megoldása
Másodfokú egyenlet megoldása
Permutációk paritása
Mozgatott elemek száma szerinti osztályozás

2.2. Rang, alterek

2.2.1. Feladat. Megoldások:

(a) $x_1 = 2,\ x_2 = -3,\ x_3 = -1,$
vektor alakban: $(2, -3, -1)$;

(b) nincs megoldás;

(c) $x_4 = 1,\ x_1 = 2x_2 - x_3, \quad x_2, x_3 \in \mathbb{R},$
vektor alakban: $(2x_2 - x_3,\ x_2,\ x_3,\ 1), \quad x_2, x_3 \in \mathbb{R}$

(d) $x_1 = 17 - 3x_2 + 3x_4,\ x_3 = 4 + x_4, \quad x_2, x_4 \in \mathbb{R},$
vektor alakban: $(17 - 3x_2 + 3x_4,\ x_2,\ 4 + x_4,\ x_4), \quad x_2, x_4 \in \mathbb{R}$

(e) nincs megoldás;

(f) $x_1 = 4 - 7x_4,\ x_3 = 2 - 4x_4, \quad x_2, x_4 \in \mathbb{R},$
vektor alakban: $(4 - 7x_4,\ x_2,\ 2 - 4x_4,\ x_4), \quad x_2, x_4 \in \mathbb{R}$;

(g) $x_1 = \frac{5}{51} + 3x_2,\ x_3 = \frac{7}{17},\ x_4 = \frac{6}{17}, \quad x_2 \in \mathbb{R},$
vektor alakban: $(\frac{5}{51} + 3x_2,\ x_2,\ \frac{7}{17},\ \frac{6}{17}), \quad x_2 \in \mathbb{R}.$

$\rightsquigarrow$ **videók:** **2.1. Feladat (a)**, **2.1. Feladat (b)**, **2.1. Feladat (d)**

($\rightsquigarrow$ vissza a feladathoz: 1.2.1)

2.2.2. Feladat. Rang, lineáris függetlenség

(a) $r = 3$, lineárisan független;
(b) $r = 2$, lineárisan függő;
(c) $r = 3$, lineárisan független;
(d) $r = 2$, lineárisan függő;
(e) $r = 2$, lineárisan függő.

$\rightsquigarrow$ **videó:** **2.2. Feladat (a)(d)**

($\rightsquigarrow$ vissza a feladathoz: 1.2.2)

2.2.3. Feladat. Rang, maximális nemeltűnő aldetermináns:

(a) $r = 2, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$;
(b) $r = 3, \begin{vmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 2 & 4 & 8 \\ 9 & 3 & 1 \end{vmatrix}$;
(c) $r = 1$, tetszőleges nem nulla elemből álló 1×1-es mátrix determinánsa megfelelő.

$\rightsquigarrow$ **videó:** **2.3. Feladat (a)**

($\rightsquigarrow$ vissza a feladathoz: 1.2.3)

2.2.4. Feladat. $r = 3$.

($\rightsquigarrow$ vissza a feladathoz: 1.2.4)

2.2.5. Feladat. Az U alterek elemei:

(a) $U = \{(\overline{0},\overline{0},\overline{0}),(\overline{1},\overline{0},\overline{0}),(\overline{0},\overline{1},\overline{0}),(\overline{1},\overline{1},\overline{0})\}$;
(b) $U = \{(\overline{0},\overline{0},\overline{0}),(\overline{1},\overline{2},\overline{1}),(\overline{2},\overline{1},\overline{2}),(\overline{2},\overline{0},\overline{1}),(\overline{0},\overline{2},\overline{2}),(\overline{1},\overline{1},\overline{0}),(\overline{1},\overline{0},\overline{2}),$
$(\overline{2},\overline{2},\overline{0}),(\overline{0},\overline{1},\overline{1})\}$;
(c) $U = \{(\overline{0},\overline{0},\overline{0}),(\overline{1},\overline{1},\overline{2}),(\overline{2},\overline{2},\overline{1})\}$;
(d) $U = \{(\overline{0},\overline{0},\overline{0},\overline{0}),(\overline{0},\overline{1},\overline{0},\overline{0}),(\overline{0},\overline{2},\overline{0},\overline{0}),(\overline{1},\overline{0},\overline{0},\overline{1}),(\overline{1},\overline{1},\overline{0},\overline{1}),(\overline{1},\overline{2},\overline{0},\overline{1}),$
$(\overline{2},\overline{0},\overline{0},\overline{2}),(\overline{2},\overline{1},\overline{0},\overline{2}),(\overline{2},\overline{2},\overline{0},\overline{2})\}$.

$\rightsquigarrow$ **videó:** $\boxed{\textbf{2.5. Feladat (b)}}$

($\rightsquigarrow$ vissza a feladathoz: 1.2.5)

2.2.6. Feladat. Előállítások és koordinátasorok:

(a) $(\overline{1},\overline{0},\overline{0}) = (\overline{0},\overline{1},\overline{0}) + (\overline{1},\overline{1},\overline{0})$, koordinátasora: $(\overline{0},\overline{1},\overline{1})$;
(b) $(\overline{1},\overline{0},\overline{1}) = (\overline{1},\overline{1},\overline{1}) + (\overline{0},\overline{1},\overline{0})$, koordinátasora: $(\overline{1},\overline{1},\overline{0})$.

$\rightsquigarrow$ **videó:** $\boxed{\textbf{2.6. Feladat (b)}}$

($\rightsquigarrow$ vissza a feladathoz: 1.2.6)

2.2.7. Feladat. Dimenziók és bázisok:

(a) $\dim U = 3$, bázis: $(0,1,2,4),(2,-1,2,2),(1,-1,1,2)$;
(b) $\dim U = 2$, bázis: $(1,2,4,1),(0,0,3,-1)$;
(c) $\dim U = 2$, bázis: $(\overline{1},\overline{4},\overline{2},\overline{3}),(\overline{2},\overline{3},\overline{4},\overline{2})$.

$\rightsquigarrow$ **videó:** $\boxed{\textbf{2.7. Feladat (b)}}$

($\rightsquigarrow$ vissza a feladathoz: 1.2.7)

2.2.8. Feladat. Az U alterek és dimenziójuk:

(a) $U = [(1,0,2),(0,1,0)]$, $\dim U = 2$;
(b) $U = [(\overline{4},\overline{1},\overline{3})]$, $\dim U = 1$;
(c) $U = [(\overline{1},\overline{2},\overline{1},\overline{0}),(\overline{2},\overline{2},\overline{0},\overline{1})]$, $\dim U = 2$;
(d) $U = [(1,-1,0,1)]$, $\dim U = 1$;
(e) $U = [(2,1,3,0),(0,0,0,1)]$, $\dim U = 2$;
(f) $U = [(3,1,0,0),(1,0,1,0),(0,0,0,1)]$, $\dim U = 3$;
(g) $U = [(\overline{0},\overline{1},\overline{0},\overline{0}),(\overline{1},\overline{0},\overline{0},\overline{1})]$, $\dim U = 2$.

($\rightsquigarrow$ vissza a feladathoz: 1.2.8)

2.2.9. Feladat. Az alterek:

(a) $\{(x_1,x_2,x_3)\colon x_1 = x_3\}$;

(b) $\{(x_1, x_2, x_3)\colon x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$;
(c) $\{(x_1, x_2, x_3, x_4)\colon -x_1 + 2x_2 + x_3 = 0,\ -5x_1 + 3x_2 + x_4 = 0\}$;
(d) $\big\{(x_1, x_2, x_3, x_4)\colon x_4 = \overline{2}x_2\big\}$;
(e) $\big\{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)\colon \overline{2}x_2 + \overline{2}x_3 + x_4 = \overline{0},\ \overline{2}x_2 + x_3 + x_5 = \overline{0}\big\}$.

⇝ **videó: 2.9. Feladat (e)**

(⇝ vissza a feladathoz: 1.2.9)

2.2.10. Feladat. Az $U_1 + U_2$ és $U_1 \cap U_2$ alterek dimenziói, bázisai:

(a) $\dim(U_1 + U_2) = 3$, bázis: $(1, 2, 1, 0), (0, 3, 2, 1), (0, 0, 1, 2)$
$\dim(U_1 \cap U_2) = 1$, bázis: $(2, 1, 0, -1)$;
(b) $\dim(U_1 + U_2) = 3$, bázis: $(1, 2, 1, 3), (0, -2, 3, -1), (0, 0, 1, -3)$
$\dim(U_1 \cap U_2) = 1$, bázis: $(0, 2, -3, 1)$;
(c) $\dim(U_1 + U_2) = 4$, bázis: $(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)$
$\dim(U_1 \cap U_2) = 1$, bázis: $(3, -3, 2, 1)$;
(d) $\dim(U_1 + U_2) = 3$, bázis: $(1, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 1), (0, 2, 1, 0)$
$\dim(U_1 \cap U_2) = 1$, bázis: $(-3, 2, 1, -3)$;
(e) $\dim(U_1 + U_2) = 4$, bázis: $(\overline{1}, \overline{0}, \overline{0}, \overline{0}), (\overline{0}, \overline{1}, \overline{0}, \overline{0}), (\overline{0}, \overline{0}, \overline{1}, \overline{0}), (\overline{0}, \overline{0}, \overline{0}, \overline{1})$
$\dim(U_1 \cap U_2) = 1$, bázis: $(\overline{1}, \overline{2}, \overline{2}, \overline{1})$;
(f) $\dim(U_1 + U_2) = 5$, bázis: $(\overline{1}, \overline{0}, \overline{0}, \overline{0}, \overline{0}), (\overline{0}, \overline{1}, \overline{0}, \overline{0}, \overline{0}), (\overline{0}, \overline{0}, \overline{1}, \overline{0}, \overline{0})$,
$(\overline{0}, \overline{0}, \overline{0}, \overline{1}, \overline{0}), (\overline{0}, \overline{0}, \overline{0}, \overline{0}, \overline{1})$
$\dim(U_1 \cap U_2) = 0$;
(g) $\dim(U_1 + U_2) = 3$, bázis: $(\overline{1}, \overline{0}, \overline{1}, \overline{0}), (\overline{0}, \overline{1}, \overline{1}, \overline{0}), (\overline{0}, \overline{0}, \overline{0}, \overline{1})$
$\dim(U_1 \cap U_2) = 1$, bázis: $(\overline{1}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{1})$.

(⇝ vissza a feladathoz: 1.2.10)

2.2.11. Feladat. A V vektortér és U_1, U_2 altereinek megadott dimenziói esetén határozzuk meg az $U_1 + U_2$ és az $U_1 \cap U_2$ alterek dimenziójának összes lehetséges értékét.

(a) $\dim(U_1 + U_2) = 6,\ \dim(U_1 \cap U_2) = 2$,
$\dim(U_1 + U_2) = 5,\ \dim(U_1 \cap U_2) = 3$;
(b) $\dim(U_1 + U_2) = 5,\ \dim(U_1 \cap U_2) = 2$,
$\dim(U_1 + U_2) = 4,\ \dim(U_1 \cap U_2) = 3$;
(c) $\dim(U_1 + U_2) = 7,\ \dim(U_1 \cap U_2) = 0$,
$\dim(U_1 + U_2) = 6,\ \dim(U_1 \cap U_2) = 1$,
$\dim(U_1 + U_2) = 5,\ \dim(U_1 \cap U_2) = 2$.

⇝ **videó: 2.11. Feladat (a)**

(⇝ vissza a feladathoz: 1.2.11)

2.2.1. További videók

Lineáris egyenletrendszerrel megadott altér elemei
Lineáris egyenletrendszerrel megadott altér megadása generátorrendszerrel
Generátorrendszerrel adott alterek összege
Generátorrendszerrel adott alterek metszete

2.3. Lineáris leképezések

2.3.1. Feladat. A sík $\mathbb{R}^2$ vektorterében tekintsük a következő transzformációkat. Döntsük el, hogy lineáris transzformációk-e. Ha igen, akkor adjuk meg a magjukat, képterüket és azok dimenzióját, bázisát.

(a) nem lineáris
(b) $\operatorname{Ker}\varphi = \{(0,0)\}$, $\dim(\operatorname{Ker}\varphi) = 0$, bázisa az üreshalmaz. $\operatorname{Im}\varphi = \mathbb{R}^2$, $\dim(\operatorname{Im}\varphi) = 2$, egy bázisa: $(0,1),(1,0)$.
(c) nem lineáris
(d) $\operatorname{Ker}\varphi = \{(0,b) : b \in \mathbb{R}\}$, $\dim(\operatorname{Ker}\varphi) = 1$, egy bázisa: $(0,2)$. $\operatorname{Im}\varphi = \{(a,0) : a \in \mathbb{R}\}$, $\dim(\operatorname{Im}\varphi) = 1$, egy bázisa: $(1,0)$.
(e) $\operatorname{Ker}\varphi = \{(0,0)\}$, $\dim(\operatorname{Ker}\varphi) = 0$, bázisa az üreshalmaz. $\operatorname{Im}\varphi = \mathbb{R}^2$, $\dim(\operatorname{Im}\varphi) = 2$, egy bázisa: $(0,1),(1,3)$.
(f) $\operatorname{Ker}\varphi = \{(0,0)\}$, $\dim(\operatorname{Ker}\varphi) = 0$, bázisa az üreshalmaz. $\operatorname{Im}\varphi = \mathbb{R}^2$, $\dim(\operatorname{Im}\varphi) = 2$, egy bázisa: $(1,1),(\pi,0)$.
(g) $\operatorname{Ker}\varphi = \{(a,b) : a+b=0\} \subseteq \mathbb{R}^2$, $\dim(\operatorname{Ker}\varphi) = 1$, egy bázisa: $(1,-1)$. $\operatorname{Im}\varphi = \{(a,a) : a \in \mathbb{R}\}$, $\dim(\operatorname{Im}\varphi) = 1$, egy bázisa: $(1,1)$.
(h) $\operatorname{Ker}\varphi = \{(0,0)\}$, $\dim(\operatorname{Ker}\varphi) = 0$, bázisa az üreshalmaz. $\operatorname{Im}\varphi = \mathbb{R}^2$, $\dim(\operatorname{Im}\varphi) = 2$, egy bázisa: $(2,1/2),(-1,2)$.
(i) $\operatorname{Ker}\varphi = \{(0,0)\}$, $\dim(\operatorname{Ker}\varphi) = 0$, bázisa az üreshalmaz. $\operatorname{Im}\varphi = \mathbb{R}^2$, $\dim(\operatorname{Im}\varphi) = 2$, egy bázisa: $(-1,1),(3,3)$.

$\rightsquigarrow$ **videók:** **3.1. Feladat (a)(b)(d)(i)**, **3.1. Feladat (b)(d)(i) folyt.**

($\rightsquigarrow$ vissza a feladathoz: 1.3.1)

2.3.2. Feladat. Melyek lineárisak az alábbi leképezések közül? Amelyik lineáris, annak határozzuk meg a standard bázisban megadott mátrixát.

(a) Nem lineáris
(b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
(c) $\begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{1} & \overline{2} \\ \overline{2} & \overline{1} & \overline{0} \end{pmatrix}$
(d) Nem lineáris

$\rightsquigarrow$ **videó:** **3.2. Feladat (a)(b)**

($\rightsquigarrow$ vissza a feladathoz: 1.3.2)

2.3.3. Feladat. Határozzuk meg a következő φ lineáris transzformációk mátrixát a megadott $\mathcal{E}$ bázisban. Számítsuk ki a v vektor φ melletti képének koordinátáit ebben a bázisban.

(a) $\begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $(-1,-1)$
(b) $\begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{1} \\ \overline{1} & \overline{1} \end{pmatrix}$, $(\overline{1},\overline{0})$

(c) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ -1/2 & -1 & 2 \\ -1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $(1, 3, 1)$

(d) $\begin{pmatrix} \overline{2} & \overline{2} & \overline{2} \\ \overline{2} & \overline{0} & \overline{0} \\ \overline{2} & \overline{2} & \overline{0} \end{pmatrix}$, $(\overline{0}, \overline{1}, \overline{1})$

⇝ **videó:** **3.3. Feladat (b)**

(⇝ vissza a feladathoz: 1.3.3)

2.3.4. Feladat. Tekintsük a sík $\mathbb{R}^2$ vektorterén értelmezett alábbi ϕ és ψ lineáris transzformációkat. Határozzuk meg a $\varphi + \psi$, a $\varphi\psi$ és a $\psi\varphi - 3\psi$ lineáris transzformációkat.

(a) $\varphi + \psi$ a zérus transzformáció (azaz bármely vektor képe az origó), $\varphi\psi$ az origóra vonatkozó középpontos tükrözés, $\psi\varphi - 3\psi$ a következő (standard bázisban értendő) mátrix által meghatározott transzformáció: $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$.

(b) $\varphi + \psi$ az identikus transzformáció, $\varphi\psi$ a zérus transzformáció, $\psi\varphi - 3\psi$ a következő (standard bázisban értendő) mátrix által meghatározott transzformáció: $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$.

(c) $\varphi + \psi$ $\pi/4$-gyel való forgatás és $\sqrt{2}$-szörös nyújtás, $\varphi\psi$ az origó körüli $\pi/2$ szögű forgatás, $\psi\varphi - 3\psi$ a következő (standard bázisban értendő) mátrix által meghatározott transzformáció: $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

(d) $\varphi + \psi$ és $\varphi\psi$ is az identikus transzformáció, $\psi\varphi - 3\psi$ a következő (standard bázisban értendő) mátrix által meghatározott transzformáció: $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{3\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

⇝ **videó:** **3.4. Feladat (a)**

(⇝ vissza a feladathoz: 1.3.4)

2.3.5. Feladat. Döntse el, hogy az u, illetve v vektor sajátvektora-e az A mátrixnak:

(a) u sajátvektor, v nem;

(b) u és v sajátvektor.

⇝ **videó:** **3.5. Feladat (a)**

(⇝ vissza a feladathoz: 1.3.5)

2.3.6. Feladat. Döntse el, hogy λ sajátértéke-e az A mátrixnak:

(a) igen;

(b) nem.

⇝ **videó:** **3.6. Feladat (b)**

(⇝ vissza a feladathoz: 1.3.6)

2.3.7. Feladat. Legyen a V vektortérben értelmezett lineáris transzformáció mátrixa a standard bázisban A. Határozzuk meg a lineáris transzformációk karakterisztikus polinomját, sajátértékeit, valamint adjunk meg bázist a sajátalterekben.

(a) A karakterisztikus polinom x^2-3x, a sajátértékek és a hozzá tartozó sajátalterek egy bázisa: $0,(1,1)$; $3,(-2,1)$.
(b) A karakterisztikus polinom x^2-2x+3, nincs valós sajátérték
(c) A karakterisztikus polinom x^2-2x+3, a sajátértékek és a hozzá tartozó sajátalterek egy bázisa: $1+\sqrt{2}i,(-i/\sqrt{2},1); 1-\sqrt{2}i,(i/\sqrt{2},1)$
(d) A karakterisztikus polinom $x^2+x+\overline{1}$, a sajátértékek és a hozzá tartozó sajátalterek egy bázisa: $\overline{1},(\overline{1},\overline{1})$.
(e) A karakterisztikus polinom $(x-3)^2(x+1)$, a sajátértékek és a hozzá tartozó sajátalterek egy bázisa: $3,(-1,1,0),(-1,0,1)$; $-1,(0,1,-5)$.
(f) A karakterisztikus polinom $-(x+3)^2(x-9)$, a sajátértékek és a hozzá tartozó sajátalterek egy bázisa:$-3,(0,1,0)$; $9,(2,-1,-2)$.
(g) A karakterisztikus polinom $(\overline{1}-x)(x^2+\overline{2}x+\overline{1})$, a sajátértékek és a hozzá tartozó sajátalterek egy bázisa: $\overline{1},(\overline{1},\overline{1},\overline{2})$; $\overline{2},(\overline{0},\overline{1},\overline{2})$.

⇝ **videók:** **3.7. Feladat (a)**, **3.7. Feladat (e)**

(⇝ vissza a feladathoz: 1.3.7)

2.3.8. Feladat. Határozzuk meg a sík $\mathbb{R}^2$ vektorterében értelmezett következő lineáris transzformációk sajátértékeit, valamint a sajátalterek egy bázisát.

(a) Sajátértéke az 1, bázis a sajátaltérben: $(1,0),(0,1)$.
(b) Sajátértéke a 0, bázis a sajátaltérben: $(1,0),(0,1)$
(c) Sajátértékek és bázisok: $1,(1,0)$, $-1,(0,1)$.
(d) Sajátértékek és bázisok: $1,(0,1)$, $0,(1,0)$.
(e) Nincs (valós) sajátérték.

⇝ **videó:** **3.8. Feladat (c)**

(⇝ vissza a feladathoz: 1.3.8)

2.3.1. További videók

Vektor képe

2.4. Kvadratikus alakok, Euklideszi terek

2.4.1. Feladat. Bilineáris-e l? Ha igen, adjuk meg mátrixát. Ha szimmetrikus, a hozzá tartozó q kvadratikus alakot is adjuk meg.

(a) bilineáris, mátrixa: $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, szimmetrikus, $q = x_2^2$;

(b) nem bilineáris;

(c) bilineáris, mátrixa: $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, nem szimmetrikus;

(d) nem bilineáris;

(e) bilineáris, mátrixa: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, szimmetrikus, $q = x_1^2 + x_2^2$;

(f) bilineáris, mátrixa: $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

$\rightsquigarrow$ **videó:** $\boxed{\textbf{4.1. Feladat (b)(d)(f)}}$

($\rightsquigarrow$ vissza a feladathoz: 1.4.1)

2.4.2. Feladat. Hozzuk kanonikus alakra, határozzuk meg az osztályát.

(a) y_1^2, pozitív szemidefinit;
(b) $-4y_1^2 - 3y_2^2$, negatív definit;
(c) $-4y_1^2 - 3y_2^2$, negatív szemidefinit;
(d) $8y_1^2 + \frac{1}{2}y_2^2$, pozitív szemidefinit;
(e) $y_1^2 + 2y_2^2 + 2y_3^2$, pozitív definit;
(f) $2y_1^2 - 2y_2^2 - \frac{1}{2}y_3^2$, indefinit.

$\rightsquigarrow$ **videó:** $\boxed{\textbf{4.2. Feladat (d)}}$

($\rightsquigarrow$ vissza a feladathoz: 1.4.2)

2.4.3. Feladat. Keressünk olyan S-t, amire SAS^T diagonális.

(a) $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$;

(b) $S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$;

(c) $S = \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{0} \\ \overline{1} & \overline{1} \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_3^{2\times 2}$;

(d) Pl.: $S = \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{0} & \overline{0} \\ \overline{2} & \overline{1} & \overline{0} \\ \overline{3} & \overline{4} & \overline{1} \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_5^{3\times 3}$. (Minden $\begin{pmatrix} \overline{1+2a} & \overline{a} & \overline{4a} \\ \overline{2b} & \overline{b} & \overline{1+4b} \\ \overline{2c} & \overline{c} & \overline{4c} \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_5^{3\times 3}$, $a, b, c \in \mathbb{Z}$ alakú mátrix jó.)

$\rightsquigarrow$ **videók:** **4.3 Feladat (a)**, **4.3 Feladat (d)**

($\rightsquigarrow$ vissza a feladathoz: 1.4.3)

2.4.4. Feladat. Határozzuk meg az u vektor v vektorra vett merőleges vetületét.

(a) $(4, 0)$;
(b) $(4, 4)$;
(c) $(\frac{-7}{5}, \frac{14}{5})$;
(d) $(0, 2, 0)$;
(e) $(0, 0, 0)$;
(f) $(4, 6, -2)$;
(g) $(2, 1, 1, 1)$.

$\rightsquigarrow$ **videók:** **4.4 Feladat (a)**, **4.4 Feladat (f)**

($\rightsquigarrow$ vissza a feladathoz: 1.4.4)

2.4.5. Feladat. Hajtsuk végre a megadott vektorrendszeren a Gram-Schmidt algoritmust. (Ezek a vektorrendszerek már normáltak is.)

(a) $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}), (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$;
(b) $(\frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}, -\frac{1}{\sqrt{14}}), (-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$;
(c) $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$;
(d) $(\frac{1}{\sqrt{38}}, \frac{6}{\sqrt{38}}, \frac{1}{\sqrt{38}}), (\frac{\sqrt{37}}{\sqrt{38}}, -3\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{703}}, -\frac{1}{\sqrt{1406}}), (0, \frac{1}{\sqrt{37}}, \frac{-6}{\sqrt{37}})$;
(e) $(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}), (0, 1, 0), (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$;
(f) $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, 0), (-\frac{1}{2\sqrt{3}}, -\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{3}{2\sqrt{3}})$.

$\rightsquigarrow$ **videó:** **4.5. Feladat (d)**

($\rightsquigarrow$ vissza a feladathoz: 1.4.5)

2.4.6. Feladat. Adjuk meg $\mathbb{R}^3$ egy sajátvektorokból álló ortonormált bázisát.

(a) $(0, 0, 1), (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0), (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$
(a transzformáció sajátértékei: $1, 1, 3$);
(b) $(0, 0, 1), (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0), (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$
(a transzformáció sajátértékei: $3, 3, -1$).

$\rightsquigarrow$ **videó:** **4.6. Feladat (a)**

($\rightsquigarrow$ vissza a feladathoz: 1.4.6)

2.5. Polinomok

2.5.1. Feladat. Az f és a g polinomok legnagyobb közös osztója a megadott polinomgyűrűkben.

(a) $x+1$;
(b) x^2+6x-7;
(c) $x^2-\overline{1}$;
(d) $\overline{2}x^2+\overline{1}$.

(⇝ vissza a feladathoz: 1.5.1)

2.5.2. Feladat. Az $f = x^4+2x^3-7x^2-8x+12$ és a $g = x^4+x^3-x^2-4x-12$ racionális együtthatós polinomok közös gyökei, majd ennek felhasználásával az f és g összes gyöke.

$lnko(f,g) = x^2-4$, közös gyökök: $2,\ -2$, $f=(x-2)(x+2)(x-1)(x+3)$, $g=(x-2)(x+2)(x^2+x+3)$.

(⇝ vissza a feladathoz: 1.5.2)

2.5.3. Feladat. Az egyenletek megoldása.

(a) Egy megoldás: $u_0 = -\frac{1}{4}x$, $v_0 = \frac{1}{4}x$,
általános: $u = -\frac{1}{4}x + (x+5)t$, $v = \frac{1}{4}x - (x+1)t$, $t \in \mathbb{R}[x]$;
(b) Egy megoldás: $u_0 = x$, $v_0 = x^2+x+1$,
általános: $u = x+(x^2+1)t$, $v = x^2+x+1+(x^3+x^2+1)t$, $t \in \mathbb{Z}_2[x]$;
(c) Egy megoldás: $u_0 = 3x$, $v_0 = 2x^2+3x$,
általános: $u = 3x+(3x^2+3x+3)t$, $v = 2x^2+3x+(2x^3+2)t$, $t \in \mathbb{Z}_5[x]$;
(d) Egy megoldás: $u_0 = 1$, $v_0 = 2x$,
általános: $u = 1+(x+2)t$, $v = 2x+(2x^2+x+2)t$, $t \in \mathbb{Z}_3[x]$.

⇝ **videó: 5.3 Feladat (a)**

(⇝ vissza a feladathoz: 1.5.3)

2.5.4. Feladat. Hányszoros gyöke az f polinomnak a c szám, majd ennek segítségével az f polinom szorzattá alakítása.

(a) kétszeres; $(x-3)^2(x^3+2x+1)$;
(b) háromszoros; $(x-3)^3(x^2+x-2)$;
(c) háromszoros; $(x-i)^3(x^2-2)$;
(d) háromszoros; $(x-\overline{2})^3(x+\overline{2})$.

(⇝ vissza a feladathoz: 1.5.4)

2.5.5. Feladat. A polinomok komplex gyökei:

(a) $\sqrt{2}+\sqrt{2}i,\ -\sqrt{2}+\sqrt{2}i,\ -\sqrt{2}-\sqrt{2}i,\ \sqrt{2}-\sqrt{2}i$;
(b) $2, -1+\sqrt{3}i,\ -1-\sqrt{3}i$;
(c) $\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8},\ \cos\frac{5\pi}{8}+i\sin\frac{5\pi}{8},\ \cos\frac{9\pi}{8}+i\sin\frac{9\pi}{8},\ \cos\frac{13\pi}{8}+i\sin\frac{13\pi}{8}$;
(d) $2,\ 1+\sqrt{3}i,\ -1+\sqrt{3}i,\ -2,\ -1-\sqrt{3}i,\ 1-\sqrt{3}i$;

(e) $2i,\ -\sqrt{3}-i,\ \sqrt{3}-i$;
(f) $\sqrt[4]{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right),\ \sqrt[4]{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right),\ \sqrt[4]{2}\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right),\ \sqrt[4]{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)$.

($\rightsquigarrow$ vissza a feladathoz: 1.5.5)

2.5.6. Feladat. A polinomok irreducibilis felbontása a $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ és $\mathbb{C}$ testek felett.

(a) $x(x^2+3)(x^2-2)$ ($\mathbb{Q}$ felett), $x(x^2+3)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$ ($\mathbb{R}$ felett), $x(x-i\sqrt{3})(x+i\sqrt{3})(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$ ($\mathbb{C}$ felett);
(b) $(x-2)(x^2+2x+4)$ ($\mathbb{Q}$ és $\mathbb{R}$ felett), $(x-2)(x+1-i\sqrt{3})(x+1+i\sqrt{3})$;
(c) $x^2(x+2)(x^2-2x+4)$ ($\mathbb{Q}$ és $\mathbb{R}$ felett), $x^2(x+2)(x-1+i\sqrt{3})(x-1-i\sqrt{3})$;
(d) $(x^2+5)(x^2-5)$ ($\mathbb{Q}$ felett), $(x^2+5)(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})$ ($\mathbb{R}$ felett),
$(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})(x-i\sqrt{5})(x+i\sqrt{5})$ ($\mathbb{C}$ felett);
(e) $(x^2-3)(x^4+3x^2+9)$ ($\mathbb{Q}$ felett),
$(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})(x^2-\sqrt{3}x+3)(x^2+\sqrt{3}x+3)$ ($\mathbb{R}$ felett),
$(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})(x-\frac{\sqrt{3}-3i}{2})(x-\frac{\sqrt{3}+3i}{2})(x+\frac{\sqrt{3}-3i}{2})(x+\frac{\sqrt{3}+3i}{2})$;
(f) $x^2(x+2)(x-2)(x^2+2)$ ($\mathbb{Q}$ és $\mathbb{R}$ felett), $x^2(x+2)(x-2)(x-i\sqrt{2})(x+i\sqrt{2})$.

($\rightsquigarrow$ vissza a feladathoz: 1.5.6)

2.5.7. Feladat. A polinomok racionális gyökei és irreducibilis felbontásuk $\mathbb{Q}[x]$-ben.

(a) Rac. gyök: 2, irred. felbont.: $(x-2)(x^2+x+1)$;
(b) Rac. gyök: 1/2, irred. felbont.: $2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x^2+1)(x^2-2)$;
(c) Rac. gyök: $1, -1/2$, irred. felbont.: $4(x-1)\left(x+\frac{1}{2}\right)(x^2+2x+2)$.

$\rightsquigarrow$ **videó:** **5.7 Feladat (a)**
($\rightsquigarrow$ vissza a feladathoz: 1.5.7)

2.5.8. Feladat. Az $f \in \mathbb{Q}[x]$ polinomok irreducibilisek.

(a) Schönemann-Eisenstein tétel, $p = 3$;
(b) Schönemann-Eisenstein tétel, $p = 2$ vagy $p = 5$;
(c) Schönemann-Eisenstein tétel, $p = 11$.

($\rightsquigarrow$ vissza a feladathoz: 1.5.8)

2.5.1. További videók

Polinomok legnagyobb közös osztója
Polinomok közös gyökei
Polinomok többszörös gyökei, irreducibilis felbontás
Polinomok irreducibilis felbontása

2.6. Véges testek

2.6.1. Feladat. $T[x]/\langle f\rangle$ testet alkot-e. Ha igen, akkor a test elemszáma, karakterisztikája, prímteste.

(a) igen (4 elem, $char = 2$, $\mathbb{Z}_2$);
(b) nem (1 gyöke f-nek);
(c) igen (9 elem, $char = 3$, $\mathbb{Z}_3$);
(d) nem (2 gyöke f-nek);
(e) igen (27 elem, $char = 3$, $\mathbb{Z}_3$);
(f) igen (16 elem, $char = 2$, $\mathbb{Z}_2$);
(g) nem ($x^2 + x + 1$ négyzete f).

($\rightsquigarrow$ vissza a feladathoz: 1.6.1)

2.6.2. Feladat. A $\mathbb{Z}_3[x]/\langle x^3 + x^2 + \overline{2}\rangle$ test keresett elemei:

(a) $\overline{x^2}$;
(b) $\overline{2x}$;
(c) $\overline{2x^2 + 2x}$;
(d) $\overline{2x^2 + x + 1}$.

($\rightsquigarrow$ vissza a feladathoz: 1.6.2)

2.6.3. Feladat. A műveletek eredménye.

(a) szorzat: 7, inverz: 6;
(b) szorzat: 1, inverz: 16;
(c) Szorzat: $\overline{x^3 + x^2}$, inverz: $\overline{x}$;
(d) Szorzat: $\overline{2x^2 + 2}$, inverz: $\overline{2x}$;
(e) Szorzat: $\overline{2x^2 + 1}$, inverz: $\overline{x^2 + 1}$.

($\rightsquigarrow$ vissza a feladathoz: 1.6.3)

2.6.4. Feladat. Az α elem rendje. Primitív-e az adott elem a K testben.

(a) Primitív elem (rend: 4);
(b) Nem primitív elem (rend: 3);
(c) Primitív elem (rend: 3);
(d) Primitív elem (rend: 7);
(e) Nem primitív elem (rend: 4);
(f) Primitív elem (rend: 8).

($\rightsquigarrow$ vissza a feladathoz: 1.6.4)

2.6.5. Feladat. Határozzuk meg az $\alpha \in K$ elem minimálpolinomját.

(a) $y^2 + 1$;
(b) $y^3 + y + 1$;
(c) $y^4 + y^3 + y^2 + y + 1$.

($\rightsquigarrow$ vissza a feladathoz: 1.6.5)

2.6.1. További videók

Számolás $\mathbb{Z}_p$-ben, elem rendje
Véges test elemszáma, karakterisztikája, prímteste
Számolás véges testben
Elem rendje véges testben
Minimálpolinom 1.
Minimálpolinom 2.

2.7. Kódolás

2.7.1. Feladat. Meghatározzuk a C minimális távolságát, hány hibajelző ill. -javító. Lineáris-e?

(a) 2 a minimális távolság, vagyis 1-hibajelző és 0-hibajavító. Lineáris;
(b) 3 a minimális távolság, vagyis 2-hibajelző és 1-hibajavító. Nem lineáris (nincs benne a nullvektor);
(c) 2 a minimális távolság, vagyis 1-hibajelző és 0-hibajavító. Lineáris.

(⇝ vissza a feladathoz: 1.7.1)

2.7.2. Feladat. Igazoljuk, hogy lineáris. Megadjuk az információs rátáját, a hozzá tartozó szisztematikus kódot és annak ellenőrző- és generátormátrixát.

(a) A linearitás igazolása: zárt az összeadásra (bármely két vektor összege eleme C-nek); $\mathbb{Z}_2$ felett a skalárral szorzást nem kell ellenőrizni; Információs ráta: $\frac{\log_2 4}{4} = \frac{1}{2}$. $D = \{0000, 1011, 0110, 1101\}$,

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \; P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Információs ráta: $\frac{\log_2 4}{5} = \frac{2}{5}$. $D = \{00000, 10111, 01111, 11000\}$,

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Információs ráta: $\frac{\log_3 9}{4} = \frac{1}{2}$.
$D = \{0000, 1021, 2012, 0101, 0202, 1122, 2211, 1220, 2110\}$,

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(⇝ vissza a feladathoz: 1.7.2)

2.7.3. Feladat. Kódszó-e v, ha nem, megadjuk a legközelebbi kódszót.

(a) Nem, mert $vP = 100$, ahol P az ellenőrzőmátrix. Legközelebbi szó: 11011.
(b) Nem, mert $vP = 0020$ lesz a P ellenőrzőmátrix. Legközelebbi szó: 211122.
(c) Nem, mert $vP = 012$ lesz a P ellenőrzőmátrix. Legközelebbi szó: 212010.

(⇝ vissza a feladathoz: 1.7.3)

2.7.4. Feladat. Hamming-kód ellenőrző- és generátormátrixa, információs rátája.

(a) $n = 3$ és $|K| = 2$ miatt $r = 2$, információs ráta $\frac{1}{3}$.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) $n = 5$ és $|K| = 2$-höz r nem egész, így ilyen Hamming-kód NINCS.
(c) $n = 7$ és $|K| = 2$ miatt $r = 3$, információs ráta $\frac{4}{7}$.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(d) $n = 4$ és $|K| = 3$ miatt $r = 2$, információs ráta $\frac{1}{2}$.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

(⇝ vissza a feladathoz: 1.7.4)

2.7.5. Feladat. Meghatározzuk az összes n-hosszú ciklikus lineáris kódot.

(a) $x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1) = (x+2)(x^2+x+1)$, vagyis három ilyen kód van.
$g_1 = x + 2$-re a kód generátormátrixa: $G_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$,
$g_2 = x^2 + x + 1$-re a kód generátormátrixa: $G_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,
$g_3 = 1$-re a kód generátormátrixa: $G_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $(C_3 = \mathbb{Z}_3^3.)$

(b) $x^4 + 1 = (x+1)^4$ miatt négy ilyen kód van.
$g_1 = 1$-re a kód generátormátrixa: $G_1 = E_4$ $(C_1 = \mathbb{Z}_2^4)$.
$g_2 = x + 1$-re a kód generátormátrixa: $G_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,
$g_3 = x^2 + 1$-re a kód generátormátrixa: $G_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,
$g_4 = x^3 + x^2 + x + 1$-re a kód generátormátrixa: $G_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(⇝ vissza a feladathoz: 1.7.5)

2.7.6. Feladat. Megadjuk a BCH-kód generátormátrixát.

(a) α (és α^2) minimálpolinomja $x^3 + x^2 + 1$, így

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

(b) α (és α^2) minimálpolinomja $g_1 = g_2 = x^4 + x + 1$,
α^3 minimálpolinomja $g_3 = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ $(\mathrm{lnko}(g_1, g_3) = 1)$, így $\mathrm{lkkt}(g_1, g_3) = g_1 g_3 = x^8 + x^7 + x^6 + x^4 + 1$

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

(c) α minimálpolinomja $g_1 = x^3 + x^2 + 2$,
α^2 miniálpolinomja pedig $g_2 = x^3 + 2x^2 + 2x + 2$ ($\text{lnko}(g_1, g_2) = 1$), így $\text{lkkt}(g_1, g_2) = g_1 g_2 = x^6 + x^4 + x + 1$

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

($\rightsquigarrow$ vissza a feladathoz: 1.7.6)

2.7.1. További videók

Információs ráta, minimális távolság, hibajelzés, hibajavítás, linearitás
Szisztematikus kód megadása
Dekódolás, legközelebbi kódszó keresése
Hamming-kód tervezése
Ciklikus kód keresése
Ciklikus Hamming-kód tervezése
BCH-kód tervezése 1.
BCH-kód tervezése 2.