2. Számelmélet

2.1. feladat. Határozzuk meg mindazon x egész számok halmazát, amelyekre teljesülnek az alábbi feltételek.

(a) $28 \mid 36x$

(b) $140 \mid x$ és $84 \mid x$

(c) $144 \mid 108x$

(d) $x \mid 112$ és $x \mid 84$

2.2. feladat. Határozzuk meg mindazon x egész számok halmazát, amelyekre teljesülnek az alábbi feltételek.

(a) $105 \mid 45x$

(b) $88 \mid x$ és $66 \mid x$

(c) $x \mid 126$ és $x \mid 54$

(d) $75 \mid x$ és $60 \mid x$

(e) $x \mid 132$ és $x \mid 99$

2.3. feladat. Melyik az a legkisebb pozitív egész, amelynek pontosan 12 darab pozitív osztója van?

2.4. feladat. Határozzuk meg euklideszi algoritmussal az alábbi a, b egész számok legnagyobb közös osztóját, és fejezzük ki $\mathrm{lnko}(a, b) = au + bv$ alakban (alkalmas u, v egész számokkal), majd adjuk meg a és b legkisebb közös többszörösét is.

(a) $a = 36$, $b = 28$

(b) $a = 78$, $b = 30$

(c) $a = -1253$, $b = -3241$

2.5. feladat. Határozzuk meg euklideszi algoritmussal az alábbi a, b egész számok legnagyobb közös osztóját, és fejezzük ki $\mathrm{lnko}(a, b) = au + bv$ alakban (alkalmas u, v egész számokkal), majd adjuk meg a és b legkisebb közös többszörösét is.

(a) $a = 48$, $b = 34$

(b) $a = 368$, $b = 161$

(c) $a = 539$, $b = 1001$

(d) $a = -1183$, $b = 1573$

2.6. feladat. Melyek azok a z komplex számok, amelyekre $z^{100} = 1$ és $z^{76} = 1$ egyszerre teljesül?

2.7. feladat. Oldjuk meg az alábbi diofantoszi egyenleteket.

(a) $72x + 60y = 24$

(b) $21x - 15y = 12$

2.8. feladat. Oldjuk meg az alábbi diofantoszi egyenleteket.

(a) $48x + 34y = 20$

(b) $78x + 30y = 12$

(c) $18x + 21y = 9$

(d) $21x + 36y = 12$

(e) $6x - 10y = 22$

(f) $237x + 571y = 13$

(g) $197x + 418y = 17$

(h) $2021x + 1739y = 4750$

2.9. feladat. Határozzuk meg az $\{x \in \mathbb{Z} : (\exists y \in \mathbb{Z})(11x - 8y = 3) \text{ és } 10 \le x \le 30\}$ halmaz elemszámát.

2.10. feladat. Határozzuk meg a következő halmazok elemszámát.

(a) $\{x \in \mathbb{Z} : (\exists y \in \mathbb{Z})(75x - 27y = 15) \text{ és } 30 \le x \le 60\}$

(b) $\{x \in \mathbb{Z} : (\exists y \in \mathbb{Z})(7x - 3y = 13) \text{ és } 10 \le x \le 30\}$

(c) $\{y \in \mathbb{Z} : (\exists x \in \mathbb{Z})(7x - 19y = 10) \text{ és } 15 \le y \le 35)\}$

(d) $\{y \in \mathbb{Z} : (\exists x \in \mathbb{Z})(13x - 20y = 7) \text{ és } 20 \le y \le 40)\}$

2.11. feladat. Kukutyinban 20 és 45 petákos érmék vannak forgalomban. Hogyan lehet ezekre felváltani 245 petákot? (Az összes megoldást adjuk meg.)

2.12. feladat. Az alábbi linken elérhető játékban egy nyúl ugrál a számegyenesen a 0-ból indulva. Kétféle ugrásra képes, amelyek hossza a, illetve b egység.
http://www.math.u-szeged.hu/~twaldha/tanitas/dimat2_2021tavasz/nyul-szamegyenes.html

(a) Ha $a = 36$ és $b = 28$, akkor az $1, 2, 3, 4$ számoknál lévő répák közül melyeket tudja megenni?

(b) Ha $a = 36$ és $b = 28$, akkor hogyan jut el a lehető legkevesebb ugrással 12-be?

2.13. feladat. Az előző feladatbeli nyúl $a = 26$ és $b = 38$ esetén hogyan tud eljutni a lehető legkevesebb ugrással 1000-be úgy, hogy mindig csak előre (jobbra) haladhat? És ha szabad visszafelé (balra) is ugrania?

2.14. feladat. Hogyan lehet egy 21 centiméteres és egy 25 centiméteres mérőrúd segítségével kimérni 2 centimétert?

2.15. feladat. Gombóc Artúrt születésnapja alkalmából Föld körüli útra fizették be a barátai, és az útra ellátták 15 láda csokoládéval. Minden ládában pont annyi csoki volt, ahány éves Gombóc Artúr. Naponta 54 csokoládét evett meg, így még egy hétig sem tartott ki az ellátmány, és az utolsó napra már csak 39 csoki maradt (mármint az utolsó olyan napra, amelyikre még jutott egyáltalán csoki). Hány éves Gombóc Artúr?

2.16. feladat. Kati néni az utolsó tanítási napon megajándékozta a 2.d osztály 30 nebulóját: mindenki választhatott, hogy csokit vagy rágót kér. A csoki 69 Ft-tal drágább, mint a rágó, ezért Kati néni örült, hogy a gyerekek több mint fele rágót kért. Így is 2094 forintja bánja az ajándékozást. Mennyibe került a rágó, illetve a csoki, és melyiket hány gyerek választotta?

2.17. feladat. Háromféle bélyeget vásároltunk. Az első alkalommal az egyes fajtákból rendre 3, 5 és 7 darabot, a második alkalommal 11, 13 és 9 darabot. A számla első alkalommal 110 Ft, a második alkalommal 250 Ft volt. Milyen címletű bélyegeket vásároltunk?

2.18. feladat. Valaki a következőket mondta: „A barátnőm 22. születésnapjára 22 szál virágból álló csokrot vettem 2000 forintért. A csokor fréziából, nárciszból és rózsából állt, amelyekből egy szál 50 forintba, 70 forintba, illetve 130 forintba került” Hány szál virágot tartalmazott az egyes fajtákból a csokor, ha azt is tudjuk, hogy mindegyikből legalább két szál volt, és semelyik kettőből sem volt ugyanannyi?

2.19. feladat. Egy 5 m hosszú kerítés szegélyének elkészítéséhez 15 cm, 20 cm és 93 cm hosszúságú lécek állnak rendelkezésünkre. Az egyes lécfajták felszegeléséhez rendre 2, 3 és 9 szög kell. Mennyire van szükségünk a lécekből, ha 50 szegünk van, és ezeket mind fel is akarjuk használni?

2.20. feladat. Mennyi lehet m értéke, ha $187 \equiv 5 \pmod{m}$ és $311 \equiv 3 \pmod{m}$?

2.21. feladat. Számítsuk ki az alábbi hatványok maradékát a megadott modulus szerint.

(a) $699^{1001} \equiv ? \pmod{7}$

(b) $2^{102} \equiv ? \pmod{7}$

(c) $3^{201} \equiv ? \pmod{7}$

(d) $3423^{3423} \equiv ? \pmod{20}$

2.22. feladat. Számítsuk ki az alábbi hatványok maradékát a megadott modulus szerint.

(a) $1992^{1991} \equiv ? \pmod{10}$

(b) $2616^{2021} \equiv ? \pmod{13}$

(c) $1522^{2023} \equiv ? \pmod{15}$

(d) $1841^{1814} \equiv ? \pmod{18}$

(e) $2022^{2022} \equiv ? \pmod{20}$

2.23. feladat. Bizonyítsuk be (kongruenciák segítségével), hogy $7 \mid 2^{n+2} + 3^{2n+1}$ minden n természetes számra.

2.24. feladat. Bizonyítsuk be (kongruenciák segítségével), hogy $27 \mid 2^{5n+1} + 5^{n+2}$ minden n természetes számra.

2.25. feladat. Oldjuk meg az alábbi kongruenciákat.

(a) $3x \equiv 4 \pmod{5}$

(b) $10x \equiv 26 \pmod{28}$

(c) $9x \equiv 15 \pmod{12}$

(d) $29x \equiv 17 \pmod{73}$

2.26. feladat. Oldjuk meg az alábbi kongruenciákat.

(a) $6x \equiv 4 \pmod{8}$

(b) $13x \equiv -3 \pmod{34}$

(c) $30x \equiv 9 \pmod{51}$

(d) $88x \equiv 42 \pmod{55}$

(e) $5x \equiv 24 \pmod{13}$

(f) $27x \equiv 9 \pmod{93}$

(g) $92x \equiv 20 \pmod{212}$

(h) $160x \equiv 60 \pmod{230}$

2.27. feladat. Az alábbi linken elérhető játékban egy nyúl ugrál egy szabályos 28 oldalú sokszög csúcsain.
http://www.math.u-szeged.hu/~twaldha/tanitas/dimat2_2021tavasz/nyul-sokszog.html
Mekkorákat ugorjon, hogy...

(a) a 10. ugrással a 26-os csúcsba jusson?

(b) a 12. ugrással a 26-os csúcsba jusson?

(c) a 16. ugrással a 20-as csúcsba jusson? (És hogy a 16. ugrással érkezzen *először* a 20-as csúcsba?)

2.28. feladat. Melyik az a 4-re végződő háromjegyű szám, amely 63-mal osztva 1-et ad maradékul?

2.29. feladat. Határozzuk meg azt a legkisebb háromjegyű természetes számot, amelynek 12-szerese 6-ot ad maradékul 30-cal osztva.

2.30. feladat. Oldjuk meg az alábbi lineáris kongruenciarendszereket.

(a) $\left.\begin{aligned} x &\equiv 1 \pmod{14} \\ x &\equiv 7 \pmod{10} \end{aligned}\right\}$

(b) $\left.\begin{aligned} x &\equiv 3 \pmod{5} \\ x &\equiv 1 \pmod{6} \\ x &\equiv 7 \pmod{9} \end{aligned}\right\}$

(c) $\left.\begin{aligned} 10x &\equiv 16 \pmod{9} \\ 6x &\equiv 3 \pmod{21} \\ 3x &\equiv 2 \pmod{5} \end{aligned}\right\}$

2.31. feladat. Oldjuk meg az alábbi lineáris kongruenciarendszereket.

(a) $\left.\begin{aligned} x &\equiv 3 \pmod{2} \\ x &\equiv 6 \pmod{5} \end{aligned}\right\}$

(b) $\left.\begin{aligned} 3x &\equiv 15 \pmod{24} \\ 4x &\equiv 11 \pmod{21} \end{aligned}\right\}$

(c) $\left.\begin{aligned} x &\equiv 5 \pmod{6} \\ x &\equiv 3 \pmod{10} \\ x &\equiv 8 \pmod{45} \end{aligned}\right\}$

(d) $\left.\begin{aligned} 3x &\equiv 1 \pmod{5} \\ 5x &\equiv 3 \pmod{7} \\ 13x &\equiv 4 \pmod{9} \end{aligned}\right\}$

(e) $\left.\begin{aligned} x &\equiv 7 \pmod{8} \\ x &\equiv 6 \pmod{7} \end{aligned}\right\}$

(f) $\left.\begin{aligned} 2x &\equiv 1 \pmod{5} \\ 5x &\equiv -1 \pmod{6} \\ 4x &\equiv 11 \pmod{9} \end{aligned}\right\}$

(g) $\left.\begin{aligned} x &\equiv 3 \pmod{5} \\ x &\equiv 4 \pmod{7} \end{aligned}\right\}$

(h) $\left.\begin{aligned} 5x &\equiv 1 \pmod{6} \\ 7x &\equiv 9 \pmod{10} \end{aligned}\right\}$

(i) $\left.\begin{aligned} 2x &\equiv 18 \pmod{10} \\ 10x &\equiv 40 \pmod{12} \\ 15x &\equiv 9 \pmod{21} \end{aligned}\right\}$

2.32. feladat. Egy labdarúgó mérkőzésre azonos számú férőhellyel rendelkező buszokkal érkeznek a szurkolók, akiket biztonsági okokból kisebb csoportokban engednek be a stadionba. Először 4 busznyi szurkoló érkezett, és 5 fős csoportokban engedték be őket, így az utolsó csoportban csak 3 szurkoló maradt. Máskor 13 busszal érkeztek, és 8-as csoportokban nyertek bebocsátást, és ekkor szintén 3 szurkoló maradt az utoljára beengedett csoportban. Amikor pedig 16 busszal érkeztek szurkolók, és egyszerre 9-et léptettek be, akkor végül 5 szurkoló maradt. Hány személyesek a buszok, ha tudjuk, hogy egy buszba legfeljebb 100-an férnek, és a buszok minden esetben tele voltak?

2.33. feladat. Bizonyos megfigyelések szerint a varjak mindig azonos létszámú rajokban vándorolnak. Ha 11 varjúraj oly módon száll le egy fára, hogy a fa minden ágára 4 varjú kerül, akkor végül egy varjú egyedül marad. Ha 12 varjúraj száll le egy fa ágaira hetes csoportokban, akkor szintén egy varjú egyedül lesz egy ágon. Míg ha 13 varjúraj kilences csoportokban száll le egy fa ágaira, akkor az utolsó ágon 7 varjú lesz. Hány varjú van egy rajban, ha tudjuk, hogy ez a szám nem több, mint 100?

2.34. feladat. Ha 7 zacskó gumicukrot osztok el 10 gyerek között, akkor a végén 9 szem gumicukor marad meg. Ha 10 zacskót osztok el 14 gyerek között, akkor meg 6 marad. Hány darab gumicukor van egy-egy zacskóban, ha minden zacskóban ugyanannyi, mégpedig 50-nél több, de 150-nél kevesebb darab van?

2.35. feladat. Egy tizenhéttagú kalózcsapat egy zsák aranypént lopott. Amikor megpróbálták egyenlően elosztani, azt tapasztalták, hogy három aranypénz kimaradt. A kimaradt aranyak fölötti vitában egy kalózt megöltek. Ezután újraosztották egyenlő arányban a zsákmányt, s most tíz arany maradt ki. Az e fölötti vitában egy újabb kalózt öltek meg, s ezután már el tudták osztani a lopott aranyat úgy, hogy mindenki ugyanannyit kapott. Legkevesebb hány aranypénzt zsákmányoltak?

2.36. feladat. Ha egy kosár tojást 2, 3, 4, 5, vagy 6-osával ürítünk ki, rendre 1, 2, 3, 4, 5 tojás marad benne. Ha azonban 7-esével vesszük ki a tojásokat, akkor egy sem marad a kosárban. Legalább hány tojás lehet a kosárban?

2.37. feladat. Oldjuk meg a kínai maradéktétel segítségével az alábbi paraméteres kongruenciarendszert.

$$\left.\begin{array}{rcll} x & \equiv & c_1 & \pmod{11} \\ x & \equiv & c_2 & \pmod{6} \end{array}\right\}$$

2.38. feladat. Oldjuk meg a kínai maradéktétel segítségével az alábbi paraméteres kongruenciarendszereket.

(a) $\left.\begin{array}{rcll} x & \equiv & c_1 & \pmod{10} \\ x & \equiv & c_2 & \pmod{7} \end{array}\right\}$

(b) $\left.\begin{array}{rcll} x & \equiv & c_1 & \pmod{3} \\ x & \equiv & c_2 & \pmod{4} \\ x & \equiv & c_3 & \pmod{5} \end{array}\right\}$

2.39. feladat. Teljes maradékrendszert alkotnak-e az alábbi számok a megadott modulus szerint?

(a) $1000, 2000, 3000, 4000, 5000, 6000, 7000$ modulo 7

(b) $2, 8, 14, \ldots, 302$ modulo 51

(c) $3, 18, 33, \ldots, 678$ modulo 46

2.40. feladat. Teljes maradékrendszert alkotnak-e az alábbi számok a megadott modulus szerint?

(a) $10, -1, 25, -13, 28, 38, 12$ modulo 7

(b) $11, 22, 33, \ldots, 154$ modulo 14

(c) $11, 21, 31, \ldots, 911$ modulo 91

(d) $4, 9, 14, \ldots, 239$ modulo 49

2.41. feladat. Végezzük el $\mathbb{Z}_m$-ben a számításokat. A végeredmény $\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{m-1}$ valamelyike legyen.

(a) $\overline{8} + \overline{10}, \overline{8} - \overline{10}, \overline{8} \cdot \overline{10} \in \mathbb{Z}_{15}$

(b) $\overline{10} + \overline{15}, \overline{10} - \overline{15}, \overline{10} \cdot \overline{15} \in \mathbb{Z}_{18}$

2.42. feladat. Végezzük el $\mathbb{Z}_m$-ben a számításokat. A végeredmény $\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{m-1}$ valamelyike legyen.

(a) $\overline{10} + \overline{15}, \overline{10} - \overline{15}, \overline{10} \cdot \overline{15} \in \mathbb{Z}_{21}$

(b) $\overline{17} + \overline{15}, \overline{9} - \overline{15}, \overline{6} \cdot \overline{7} \in \mathbb{Z}_{21}$

(c) $\overline{23} + \overline{25}, \overline{0} - \overline{21}, \overline{9} \cdot \overline{12} \in \mathbb{Z}_{33}$

2.43. feladat. Oldjuk meg $\mathbb{Z}_m$-ben az alábbi egyenleteket (az összes megoldást keressük meg!)

(a) $\overline{10} \cdot \overline{x} = \overline{8}$ $\quad \mathbb{Z}_{15}$-ben

(b) $\overline{9} \cdot \overline{x} = \overline{6}$ $\quad \mathbb{Z}_{15}$-ben

(c) $\overline{7} \cdot \overline{x} = \overline{6}$ $\quad \mathbb{Z}_{15}$-ben

(d) $\overline{6} \cdot \overline{x} = \overline{4}$ $\quad \mathbb{Z}_{8}$-ban

(e) $\overline{88} \cdot \overline{x} = \overline{42}$ $\quad \mathbb{Z}_{55}$-ben

2.44. feladat. Oldjuk meg $\mathbb{Z}_m$-ben az alábbi egyenleteket (az összes megoldást keressük meg!)

(a) $\overline{9} \cdot \overline{x} = \overline{15}$ $\quad \mathbb{Z}_{12}$-ben

(b) $\overline{5} \cdot \overline{x} = \overline{11}$ $\quad \mathbb{Z}_{13}$-ban

(c) $\overline{28} \cdot \overline{x} = \overline{23}$ $\quad \mathbb{Z}_{40}$-ben

(d) $\overline{28} \cdot \overline{x} = \overline{24}$ $\quad \mathbb{Z}_{40}$-ben

(e) $\overline{3} \cdot \overline{x} = \overline{4}$ $\quad \mathbb{Z}_{5}$-ben

(f) $\overline{10} \cdot \overline{x} = \overline{26}$ $\quad \mathbb{Z}_{28}$-ban

(g) $\overline{25} \cdot \overline{x} = \overline{35}$ $\quad \mathbb{Z}_{90}$-ben

(h) $\overline{30} \cdot \overline{x} = \overline{9}$ $\quad \mathbb{Z}_{51}$-ben

2.45. feladat. Határozzuk meg a megadott maradékosztály multiplikatív inverzét.

(a) $\overline{88}^{-1} \in \mathbb{Z}_{55}$

(b) $\overline{5}^{-1} \in \mathbb{Z}_{13}$

2.46. feladat. Határozzuk meg a megadott maradékosztály multiplikatív inverzét.

(a) $\overline{5}^{-1} \in \mathbb{Z}_{14}$

(b) $\overline{9}^{-1} \in \mathbb{Z}_{12}$

(c) $\overline{3}^{-1} \in \mathbb{Z}_{5}$

(d) $\overline{29}^{-1} \in \mathbb{Z}_{73}$

2.47. feladat. Soroljuk fel $\mathbb{Z}_m^*$ elemeit, és állítsuk az elemeket párba az inverzükkel.

(a) $m = 15$

(b) $m = 9$

2.48. feladat. Soroljuk fel $\mathbb{Z}_m^*$ elemeit, és állítsuk az elemeket párba az inverzükkel.

(a) $m = 7$

(b) $m = 8$

(c) $m = 10$

(d) $m = 11$

2.49. feladat. Határozzuk meg a megadott maradékosztály multiplikatív rendjét és számítsuk ki a hatványait.

(a) $\mathbb{Z}_7$-ben $o(\overline{2}) = ?$, $\overline{2}^{102} = ?$, $\overline{2}^{2021} = ?$

(b) $\mathbb{Z}_{10}$-ben $o(\overline{3}) = ?$, $\overline{3}^{402} = ?$, $\overline{3}^{2021} = ?$

2.50. feladat. Határozzuk meg a megadott maradékosztály multiplikatív rendjét és számítsuk ki a hatványait.

(a) $\mathbb{Z}_{11}$-ben $o(\overline{4}) = ?$, $\overline{4}^{200} = ?$, $\overline{4}^{2023} = ?$

(b) $\mathbb{Z}_{15}$-ben $o(\overline{13}) = ?$, $\overline{13}^{-102} = ?$, $\overline{13}^{2023} = ?$

(c) $\mathbb{Z}_{10}$-ben $o(\overline{2}) = ?$, $\overline{2}^{402} = ?$, $\overline{2}^{2021} = ?$

(d) $\mathbb{Z}_{25}$-ben $o(\overline{21}) = ?$, $\overline{21}^{153} = ?$, $\overline{21}^{2024} = ?$

(e) $\mathbb{Z}_{18}$-ban $o(\overline{5}) = ?$, $\overline{5}^{908} = ?$, $\overline{5}^{-1} = ?$

(f) $\mathbb{Z}_{25}$-ben $o(\overline{6}) = ?$, $\overline{6}^{912} = ?$, $\overline{6}^{-67} = ?$

2.51. feladat. Számítsuk ki az Euler-féle φ függvény alábbi értékeit.

(a) $\varphi(1000) = ?$

(b) $\varphi(360) = ?$

(c) $\varphi(2021) = ?$

2.52. feladat. Számítsuk ki az Euler-féle φ függvény alábbi értékeit.

(a) $\varphi(60) = ?$

(b) $\varphi(88) = ?$

(c) $\varphi(20) = ?$

(d) $\varphi(30) = ?$

(e) $\varphi(75) = ?$

(f) $\varphi(128) = ?$

2.53. feladat. Oldjuk meg az egyenletet a természetes számok halmazán.

(a) $\varphi(x) = 4$

(b) $\varphi(x) = 5$

(c) $\varphi(x) = 6$

(d) $2\varphi(x) = x$

(e) $\varphi(x) = x - 8$

(f) $\varphi(x) = x - 10$

(g) $\varphi(x^2) = 2x$

(h) $\varphi(x^2) = x\varphi(x)$

2.54. feladat. Határozzuk meg a hatvány maradékát a megadott modulus szerint.

(a) $63^{42} \equiv ? \pmod{50}$

(b) $123^{765} \equiv ? \pmod{11}$

2.55. feladat. Határozzuk meg a hatvány maradékát a megadott modulus szerint.

(a) $111^{50} \equiv ? \pmod{52}$

(b) $3^{65} \equiv ? \pmod{128}$

(c) $19^{81} \equiv ? \pmod{75}$

(d) $42^{62} \equiv ? \pmod{25}$

2.56. feladat. Határozzuk meg a hatvány maradékát a megadott modulus szerint.

(a) $6^{418} \equiv ? \pmod{29}$

(b) $4447^{2018} \equiv ? \pmod{44}$

2.57. feladat. Határozzuk meg a hatvány maradékát a megadott modulus szerint.

(a) $557^{517} \equiv ? \pmod{53}$

(b) $15^{159} \equiv ? \pmod{34}$

(c) $20^{449} \equiv ? \pmod{31}$

(d) $3^{298} \equiv ? \pmod{25}$

2.58. feladat. Mi az utolsó két számjegye az 1997^{1998} számnak?

2.59. feladat. Milyen nap lesz $\underbrace{11\ldots11}_{99}$ nap múlva?

2.60. feladat. Mit ad maradékul 87-tel osztva $13^{(321^{50})}$?

2.61. feladat. Határozzuk meg a hatványok maradékát a megadott modulus szerint. (Az emeletes hatványokat $a^{(b^c)}$ zárójelezéssel értelmezzük.)

(a) $91^{441^{222}} \equiv ? \pmod{88}$

(b) $80^{111^{50}} \equiv ? \pmod{53}$

(c) $95^{81^{99}} \equiv ? \pmod{46}$

2.62. feladat. Milyen nap lesz $711^{185^{937}}$ nap múlva?

2.63. feladat. Mit ad maradékul *googolplex* 21-gyel osztva?