

# 1. Kombinatorika

**1.1. feladat.** Az előző három feladatban az összeszámlálási problémák mind a hat alapesete megjelent (ismétléses és ismétlés nélküli kombináció, variáció és permutáció). Melyik feladatnál melyik alapeset lépett fel?

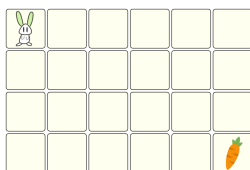
**1.2. feladat.** Hányféle sorrendben lehet leírni a TETTETTETEK szó betűit?

**1.3. feladat.** Hányféleképpen helyezhetünk el tizenegy embert három szobában, ha a szobák hat-, négy- és egyszemélyesek?

**1.4. feladat.** Öt diák vizsgázik. Hányféle eredménye lehet a vizsgának, ha tudjuk, hogy egy diák sem bukott meg, és a vizsgaértékelés ötfokozatú?

**1.5. feladat.** Egy bizottságnak 7 tagja van, elnököt és elnökhelyettest választanak. Hányféleképpen lehet ezt megtenni, ha a tagok egyike sem vállalhat egynél több feladatot?

**1.6. feladat.** Hányféle útvonalon juthat el a nyúl a répához, ha csak jobbra és lefelé ugorhat?



**1.7. feladat.** Az ötös lottón 90 számból 5 számot húznak ki. Hányféle 3-talalatos szelvény lehetséges egy héten? (Egy szelvényen 1-től 90-ig szerepelnek a számok, melyek közül a fogadó ötöt jelöl meg.)

**1.8. feladat.** Egy négytagú társaság a következőképpen akar feljutni egy tetőteraszra: ketten lifttel mennek egyszerre, ketten pedig egymás után mászva a villámhárítón jutnak fel. Hányféle sorrendben érkezhetnek meg a teraszra, ha feltesszük, hogy a lifttel utazó két személy egyszerre érkezik, de ezt leszámítva nincs egyidejű érkezés?

☑ **1.9. feladat.** Az ajándékboltban ötféle mesekönyv, háromféle csokoládé és hatféle játék kapható. Hányféleképpen vásárolhat egy szülő gyermekének 4 különböző ajándékot úgy, hogy pontosan 2 mesekönyv legyen köztük?

**1.10. feladat.** Hányféle sorrendben haladhat át a forgóajtón egy 8 házaspárból álló társaság, ha a házastársak közvetlenül egymás után mennek?

☑ **1.11. feladat.** Öt házaspár foglal helyet egy kerek asztalnál. Hányféleképpen helyezkedhetnek el, ha a házastársak egymás mellett akarnak ülni? (Két elhelyezkedést akkor és csak akkor tekintünk azonosnak, ha mindenkinek ugyanaz a bal, illetve jobb oldali szomszédja.)

**1.12. feladat.** Öt házaspár foglal helyet egy kör alakú asztalnál. Hányféleképpen helyezkedhetnek el, ha a házastársak egymás mellett akarnak ülni, de sem két férfi, sem két nő nem ülhet egymás mellé?

☑ **1.13. feladat.** Hat óvodás és öt iskolás gyerek közül szeretnénk úgy kiválasztani négy gyereket, hogy legalább két óvodás legyen közöttük. Hányféleképpen tehetjük ezt meg?

**1.14. feladat.** Hús láda áruból 15 láda első osztályú, a többi másodosztályú. Hányféleképpen választhatunk ki 5 ládat úgy, hogy legfeljebb 2 másodosztályú legyen közöttük?

**1.15. feladat.** Egy csomag francia kártya 52 lapból áll, 4-féle színből 13-13 lapot tartalmaz.

(a) Hányféleképpen húzhatunk a pakliból négy olyan lapot, amelyek közül pontosan két lap színe egyezik meg?

(b) Hányféleképpen húzhatunk ki négy olyan lapot, amelyek között pontosan két szín fordul elő?

**1.16. feladat.** Van 2 sárga, 3 fehér és 1 lila golyónk. Hányféleképpen állíthatunk össze ezekből egy 5 golyóból álló sorozatot?

☑ **1.17. feladat.** Egy boltban 6-féle CD-t lehet kapni. Hányféleképpen lehet 4 CD-t vásárolni, ha egyféle CD-ből többet is vehetünk?

**1.18. feladat.** Egy üzletben ötféle szaloncukrot lehet kapni: kókuszos, vajkaramellás, zselés, gumicukros és marcipános ízűt. Hányféleképpen lehet tíz szaloncukrot vásárolni, ha minden szaloncukorból van legalább tíz?

**1.19. feladat.** Hányféleképpen választhatunk 30 darabot 100, 200 és 500 forintos bankjegyekből, ha feltételezzük, hogy mindegyikből van legalább 30 darab?

**1.20. feladat.** Mikulás puttonyában 50 szaloncukor van, ezt fogja kiosztani 10 gyerekeknek.

- (a) Hányféleképpen oszthatja ki a szaloncukrokat, ha semmiféle megkötés nincsen, akár kaphatja egy gyerek is mind az ötvenet?
- (b) Hányféleképpen oszthatja ki a szaloncukrokat úgy, hogy minden gyerek legalább kettőt kapjon?

(A szaloncukrok egyformák, de a gyerekek persze nem. A kiosztás sorrendje nem fontos, csak az, hogy ki hány szaloncukrot kap.)

■ **1.21. feladat.** Egy turistacsoport egy város 20 nevezetességét szeretné meglátogatni 4 nap alatt. Hányféleképpen tehetik ezt meg, ha 1 nap alatt akár az összes nevezetesség meglátogatható, és számíts az, hogy egy adott napon milyen sorrendben tekintik meg a látnivalókat?

**1.22. feladat.** Összesen 15 különböző csomagot kell házhoz vitetnünk 3 kézbesítővel. Hányféleképpen osztható szét a munka, ha egy kézbesítő akár 15 csomagot is elbír, és számíts a kézbesítési sorrend is?

**1.23. feladat.** Hányféleképpen helyezhetünk el 24 különböző könyvet egy 7-polcos szekrényben, ha bármelyik polcon elfér mind a 24 könyv?

**1.24. feladat.** Hányféleképpen lehet 5 (egyforma) fehér és 10 (egyforma) zöld golyót úgy sorbarendezni, hogy két fehér ne kerüljön egymás mellé?

■ **1.25. feladat.** Egy állatszelídítő 5 oroszlánt és 4 tigrist szeretne bevezetni egymás után a porondra úgy, hogy 2 tigris nem jöhet egymás után. Hányféleképpen teheti ezt meg? (Az állatszelídítő természetesen meg tudja különböztetni az állatait.)

**1.26. feladat.** Hány olyan (nem feltétlenül értelmes) szó képezhető a KARIKA szó betűiből, ahol 2 magánhangzó nem kerülhet egymás mellé?

**1.27. feladat.** Hányféle olyan „szó” képezhető a KOMBINATORIKA szó betűiből, melyben nem áll egymás mellett két

- (a) mássalhangzó,
- (b) magánhangzó?

**1.28. feladat.** Egy kutatóintézetben 67-en dolgoznak. Angolul 47-en, németül 35-en, franciául 20-an beszélnek, németül és angolul 23-an, angolul és franciául 12-en, németül és franciául 11-en, mindhárom nyelven 5-en beszélnek. Hányan vannak, akik egy nyelvet sem beszélnek?

■ **1.29. feladat.** Egy 50 fős osztályból 25-en járnak matematika, 19-en fizika és 30-an kémia szakkörre. 10-en járnak matematika és fizika, 12-en matematika és kémia, 16-an fizika és kémia szakkörre, valamint 8-an járnak mindhárom szakkörre. Hányan vannak, akik egyik szakkörre sem járnak?

**1.30. feladat.** Hányféleképpen ültetheti le Hófehérke a hét törpét egy padra úgy, hogy Tudor és Morgó ne üljön egymás mellett?

**1.31. feladat.** Az  $a, b, c, d, e, f, g$  betűk permutációi között hány olyan van, amelyben...

- (a) az  $a, b, c$  betűk nem egymás mellett állnak (bármely kettő állhat egymás mellett, de mind a három már nem)?
- (b) az  $a, b, c$  betűk közül semelyik kettő nincs egymás mellett?

**1.32. feladat.** Egy cukrászdában 14-féle süteményt árulnak: 3-féle pitét, 6-féle rétest és 5-féle tortaszeletet.

- (a) Hányféleképpen vásárolhatunk 4 különböző süteményt úgy, hogy legyen köztük pite is és rétes is?
- (b) Hányféleképpen vásárolhatunk 4 különböző süteményt úgy, hogy legyen köztük pite, rétes és tortaszelet is?

■ **1.33. feladat.** Hány olyan háromjegyű szám van, amely nem osztható se 2-vel, se 3-mal, se 5-tel?

**1.34. feladat.** Hány olyan háromjegyű szám van, amely...

- (a) nem osztható se 5-tel, se 7-tel?
- (b) nem osztható se 4-gyel, se 5-tel, se 6-tal?
- (c) nem osztható se 6-tal, se 7-tel, és 2-esre végződik?
- (d) nem osztható se 6-tal, se 7-tel, és nem 2-esre végződik?

1.35. feladat. Hány olyan 7-betűs „szó” készíthető az A, B, C, D betűkből, amelyben mind a négy betű szerepel?

1.36. feladat. Hány olyan 8-karakteres jelszó létezik, amely kisbetűkből, számjegyekből és szimbólumokból áll, és mindháromból legalább egyet valóban tartalmaz is? (Kisbetűből 26, számjegyből 10, szimbólumból pedig 32 áll rendelkezésre.)

1.37. feladat. Határozzuk meg az  $\{a, b, c, d, e, f\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$  leképezések számát. Hány szürjektív és hány injektív van ezek között?

1.38. feladat. Határozzuk meg az  $\{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{a, b, c, d, e, f\}$  leképezések számát. Hány szürjektív és hány injektív van ezek között?

1.39. feladat. Hányféleképpen festhetünk ki  $n$  szobát 2-féle színnel, ha minden színt legalább egyszer felhasználunk?

1.40. feladat. Hányféleképpen festhetünk ki  $n$  szobát 3-féle színnel, ha minden színt legalább egyszer felhasználunk?

1.41. feladat. Állapítsuk meg minél kevesebb számolással (ránézésre) az alábbi összegek értékét.

(a)  $\binom{6}{0} \cdot 3^6 + \binom{6}{1} \cdot 3^5 \cdot 7 + \binom{6}{2} \cdot 3^4 \cdot 7^2 + \binom{6}{3} \cdot 3^3 \cdot 7^3 + \binom{6}{4} \cdot 3^2 \cdot 7^4 + \binom{6}{5} \cdot 3^1 \cdot 7^5 + \binom{6}{6} \cdot 7^6$

(b)  $\binom{5}{0} - \binom{5}{1} \cdot 3 + \binom{5}{2} \cdot 3^2 - \binom{5}{3} \cdot 3^3 + \binom{5}{4} \cdot 3^4 - \binom{5}{5} \cdot 3^5$

Bónusz feladat: adjunk kombinatorikai értelmezést az (a) részre (az előző feladathoz hasonlóan).

1.42. feladat. Mi a  $\left(3x^2 + \frac{2}{x}\right)^6$  kifejezésben a konstans tag a hatványozás elvégzése és a rendezés után?

1.43. feladat. Számítsuk ki az alábbi tagok együtthatóját a  $\left(3x^3 + \frac{2}{x^2}\right)^5$  hatvány kifejtésében.

(a)  $x^{-5}$

(c)  $x^3$

(b)  $x^0$

(d)  $x^5$

1.44. feladat. Számítsuk ki  $x^{19}$  együtthatóját az  $(1 + x^3 - x^4)^{12}$  hatvány kifejtésében.

1.45. feladat. Számítsuk ki  $x^{18}$  és  $x^{31}$  együtthatóját az  $(1 + x^3 - x^4)^{12}$  hatvány kifejtésében.

1.46. feladat. Számítsuk ki az alábbi tagok együtthatóját a  $\left(2x^2 - x + \frac{1}{x}\right)^{12}$  hatvány kifejtésében.

(a)  $x^0$

(c)  $x^2$

(b)  $x^1$

(d)  $x^{-1}$