

### 3. Gráfelmélet

3.1. feladat. Lehetséges-e, hogy egy...

- (a) 5-tagú társaságban mindenkinek pontosan 3 ismerőse van?
- (b) 6-tagú társaságban mindenkinek pontosan 4 ismerőse van?

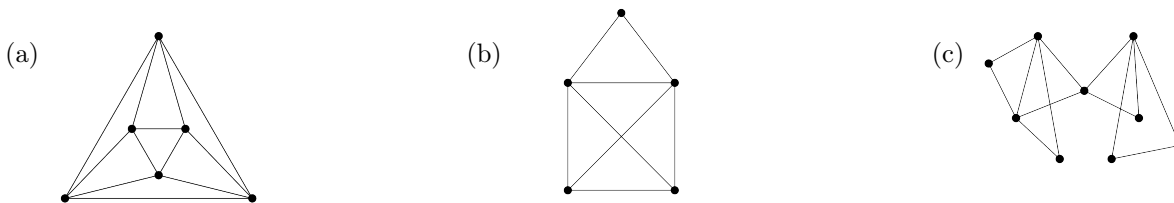
3.2. feladat. A  $G$  egyszerű gráfnak 5 csúcsa van, a csúcsok fokszámait egy kivétellel ismerjük: 3, 3, 4, 4. Mekkora lehet a hiányzó fokszám? Izomorfia erejéig hány ilyen gráf van?

3.3. feladat. Van-e olyan egyszerű gráf, amelyben a csúcsok fokszámai az alábbiak? Ha van, rajzoljunk egy ilyen gráfot, sőt, próbáljuk megadni izomorfia erejéig az összes ilyen gráfot.

- (a) 1, 2, 2, 2, 3
- (b) 2, 2, 2, 2, 4, 4
- (c) 0, 2, 2, 4, 4, 4
- (d) 1, 1, 2, 2, 3, 3
- (e) 2, 2, 3, 3, 5, 5
- (f) 1, 2, 2, 2, 4, 5, 7, 7

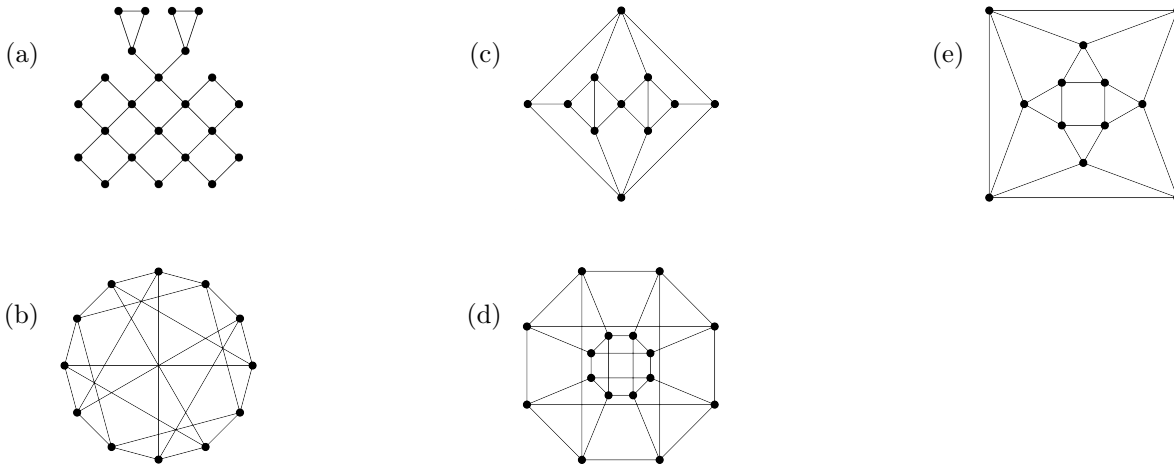
3.4. feladat. Keressünk (zárt vagy nyílt) Euler-vonalat az alábbi gráfokban. A gráfok nagyobb méretben és interaktív formában megtalálhatóak itt:

[http://www.math.u-szeged.hu/~twaldha/tanitas/regi/dimat2\\_2022tavasz/grafok/grafjatek-euler.html](http://www.math.u-szeged.hu/~twaldha/tanitas/regi/dimat2_2022tavasz/grafok/grafjatek-euler.html)



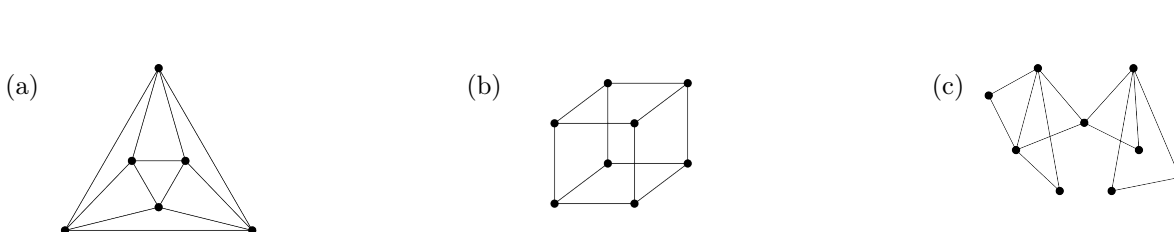
3.5. feladat. Keressünk (zárt vagy nyílt) Euler-vonalat az alábbi gráfokban. A gráfok nagyobb méretben és interaktív formában megtalálhatóak itt:

[http://www.math.u-szeged.hu/~twaldha/tanitas/regi/dimat2\\_2022tavasz/grafok/grafjatek-euler.html](http://www.math.u-szeged.hu/~twaldha/tanitas/regi/dimat2_2022tavasz/grafok/grafjatek-euler.html)



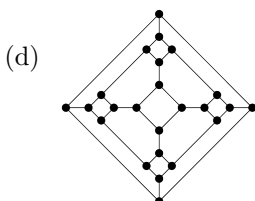
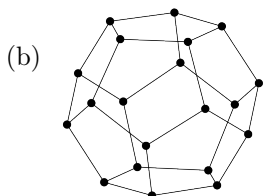
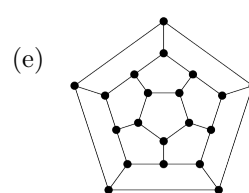
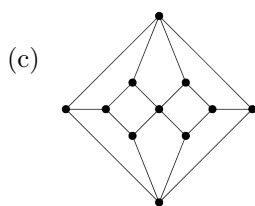
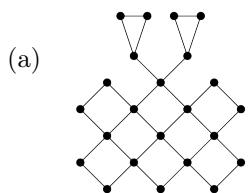
3.6. feladat. Keressünk Hamilton-utat és Hamilton-kört az alábbi gráfokban. A gráfok nagyobb méretben és interaktív formában megtalálhatóak itt:

[http://www.math.u-szeged.hu/~twaldha/tanitas/regi/dimat2\\_2022tavasz/grafok/grafjatek-hamilton.html](http://www.math.u-szeged.hu/~twaldha/tanitas/regi/dimat2_2022tavasz/grafok/grafjatek-hamilton.html)



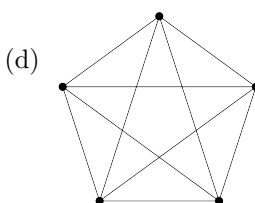
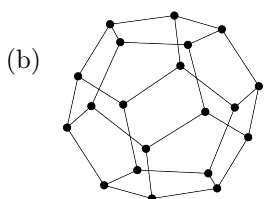
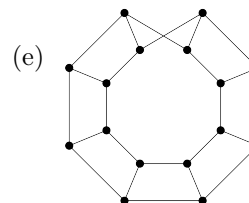
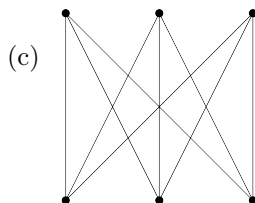
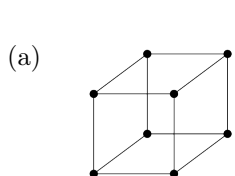
**3.7. feladat.** Keressünk Hamilton-utat és Hamilton-kört az alábbi gráfokban. A gráfok nagyobb méretben és interaktív formában megtalálhatóak itt:

[http://www.math.u-szeged.hu/~twaldha/tanitas/regi/dimat2\\_2022tavasz/grafok/grafjatek-hamilton.html](http://www.math.u-szeged.hu/~twaldha/tanitas/regi/dimat2_2022tavasz/grafok/grafjatek-hamilton.html)



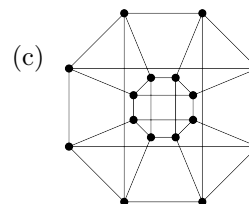
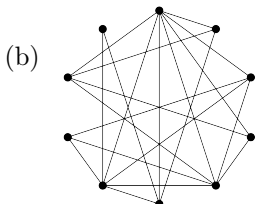
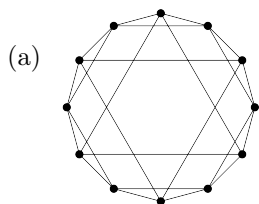
**3.8. feladat.** Síkgráfok-e alábbi gráfok? (Amelyik igen, azt rajzoljuk le metszéspontok nélkül; amelyik nem, abban keressük meg  $K_{3,3}$  vagy  $K_5$  egy felosztását.) A gráfok nagyobb méretben és interaktív formában megtalálhatóak itt:

[http://www.math.u-szeged.hu/~twaldha/tanitas/regi/dimat2\\_2022tavasz/grafok/grafjatek-sik.html](http://www.math.u-szeged.hu/~twaldha/tanitas/regi/dimat2_2022tavasz/grafok/grafjatek-sik.html)



**3.9. feladat.** Síkgráfok-e alábbi gráfok? (Amelyik igen, azt rajzoljuk le metszéspontok nélkül; amelyik nem, abban keressük meg  $K_{3,3}$  vagy  $K_5$  egy felosztását.) A gráfok nagyobb méretben és interaktív formában megtalálhatóak itt:

[http://www.math.u-szeged.hu/~twaldha/tanitas/regi/dimat2\\_2022tavasz/grafok/grafjatek-sik.html](http://www.math.u-szeged.hu/~twaldha/tanitas/regi/dimat2_2022tavasz/grafok/grafjatek-sik.html)



**3.10. feladat.** Izomorfia erejéig...

(a) hány 5-csúcsú fa van?

(b) hány 5-élű fa van?

**3.11. feladat.** Izomorfia erejéig...

(a) hány 3-csúcsú fa van?

(b) hány 4-csúcsú fa van?

(c) hány 6-csúcsú fa van?

(d) hány 3-élű fa van?

(e) hány 4-élű fa van?

(f) hány 6-élű fa van?

(g) hány 3-csúcsú erdő van?

(h) hány 4-csúcsú erdő van?

**3.12. feladat.** Egy 20-csúcú fának 18 darab elsőfokú csúcsa van.

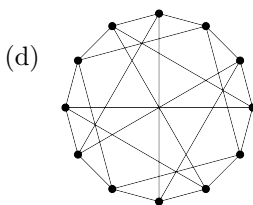
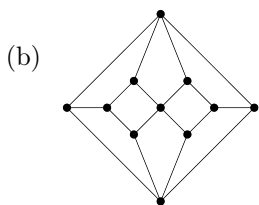
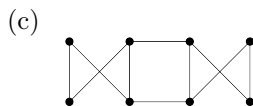
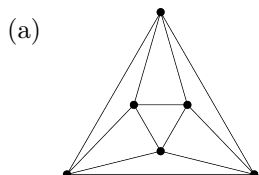
- (a) Mennyi lehet a további két csúcs fokszáma?
- (b) Milyen hosszú lehet a leghosszabb útja?
- (c) Hány ilyen fa van izomorfia erejéig?

**3.13. feladat.** Egy erdő 5 fájában összesen 16 él van. Hány csúcsa van az erdőnek?

**3.14. feladat.** Hány fából állhat egy olyan erdő, aminek 10 csúcsa és 7 éle van?

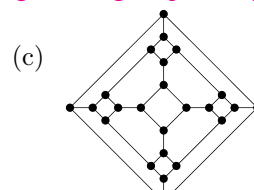
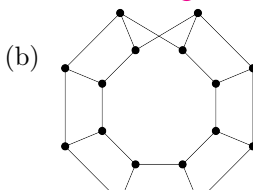
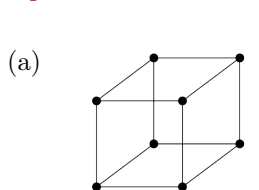
**3.15. feladat.** Párosak-e alábbi gráfok? (Amelyik igen, azt színezzük ki két színnel; amelyik nem, abban keressünk páratlan hosszúságú kört.) A gráfok nagyobb méretben és interaktív formában megtalálhatóak itt:

[http://www.math.u-szeged.hu/~twaldha/tanitas/regi/dimat2\\_2022tavasz/grafok/grafjatek-paros.html](http://www.math.u-szeged.hu/~twaldha/tanitas/regi/dimat2_2022tavasz/grafok/grafjatek-paros.html)



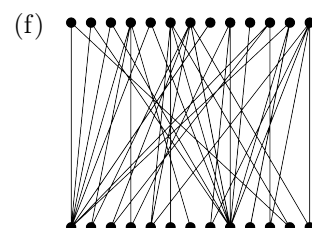
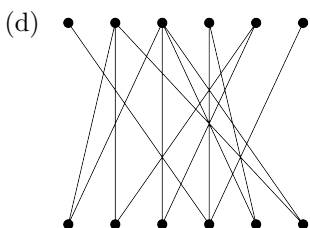
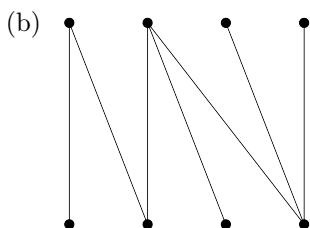
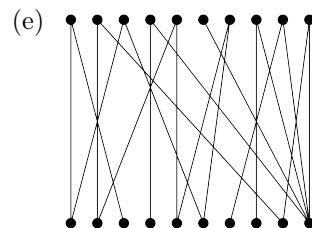
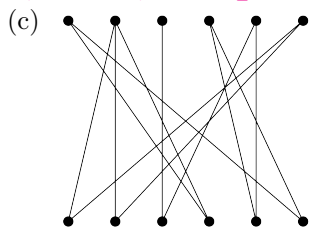
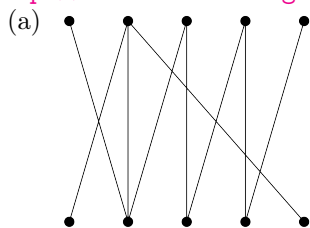
**3.16. feladat.** Párosak-e alábbi gráfok? (Amelyik igen, azt színezzük ki két színnel; amelyik nem, abban keressünk páratlan hosszúságú kört.) A gráfok nagyobb méretben és interaktív formában megtalálhatóak itt:

[http://www.math.u-szeged.hu/~twaldha/tanitas/regi/dimat2\\_2022tavasz/grafok/grafjatek-paros.html](http://www.math.u-szeged.hu/~twaldha/tanitas/regi/dimat2_2022tavasz/grafok/grafjatek-paros.html)



**3.17. feladat.** Keressünk (a magyar módszerrel) maximális elemszámú párosítást az alábbi gráfokban. Igazoljuk a párosítás optimális voltát egy megfelelő lefogó csúcsalmaz megadásával. A gráfok nagyobb méretben és interaktív formában megtalálhatóak itt:

[http://www.math.u-szeged.hu/~twaldha/tanitas/dimat2\\_2023tavasz/parositas](http://www.math.u-szeged.hu/~twaldha/tanitas/dimat2_2023tavasz/parositas)



**3.18. feladat.** Keresünk (a magyar módszerrel) maximális elemszámú párosítást az alábbi gráfokban. Igazoljuk a párosítás optimális voltát egy megfelelő lefogó csúcshalmaz megadásával. A gráfok nagyobb méretben és interaktív formában megtalálhatóak itt:

[http://www.math.u-szeged.hu/~twaldha/tanitas/dimat2\\_2023tavasz/parositas](http://www.math.u-szeged.hu/~twaldha/tanitas/dimat2_2023tavasz/parositas)

