

## 4. Absztrakt algebra

### 4.1. feladat. Művelet-e ...

- (a) az összeadás a hárommal osztható egész számok halmazán?
- (b) az összeadás a hárommal nem osztható egész számok halmazán?
- (c) az osztás a pozitív egész számok halmazán?
- (d) az összeadás az  $\{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}^+\}$  halmazon?
- (e)  $x * y = \sqrt{xy}$  a valós számok halmazán?
- (f)  $x * y = \sqrt{xy}$  a komplex számok halmazán?
- (g) a metszés az  $\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}\}$  halmazon?

Ez a feladat interaktív formában megtalálható itt:

[http://www.math.u-szeged.hu/~twaldha/tanitas/regi/dimat2\\_2020tavasz/algebra/algebra1-muveletek.html](http://www.math.u-szeged.hu/~twaldha/tanitas/regi/dimat2_2020tavasz/algebra/algebra1-muveletek.html)

### 4.2. feladat. Művelet-e ...

- (a) a szorzás a hárommal osztható egész számok halmazán?
- (b) a szorzás a hárommal nem osztható egész számok halmazán?
- (c) az összeadás a  $[0, 1]$  intervallumon?
- (d) a szorzás a  $[0, 1]$  intervallumon?
- (e) a szorzás az  $\{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}^+\}$  halmazon?
- (f) az egyesítés az  $\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}\}$  halmazon?

Ez a feladat interaktív formában megtalálható itt:

[http://www.math.u-szeged.hu/~twaldha/tanitas/regi/dimat2\\_2020tavasz/algebra/algebra1-muveletek.html](http://www.math.u-szeged.hu/~twaldha/tanitas/regi/dimat2_2020tavasz/algebra/algebra1-muveletek.html)

### 4.3. feladat. Vizsgáljuk meg a tanult műveleti tulajdonságok (kommutativitás, asszociativitás, zéruselem, egységelem, inverzek, kancellativitás) szempontjából az alábbi műveleteket. (Írjuk fel a művelet táblázatot, ha nincs megadva!)

- (a) az  $A = \{a, b, c, d\}$  halmazon a lenti táblázattal definiált  $*$  művelet
- (b) az  $A = \{a, b, c, d\}$  halmazon a lenti táblázattal definiált  $\circ$  művelet
- (c) a  $\mathbb{Z}_5$  halmazon a szorzás művelete
- (d) a  $\mathcal{P}(\{u, v\})$  halmazon az egyesítés művelete

$*$	$a$	$b$	$c$	$d$
$a$	$a$	$b$	$c$	$d$
$b$	$b$	$a$	$c$	$d$
$c$	$c$	$c$	$c$	$c$
$d$	$d$	$d$	$c$	$c$

$\circ$	$a$	$b$	$c$	$d$
$a$	$c$	$a$	$b$	$b$
$b$	$a$	$b$	$c$	$d$
$c$	$b$	$c$	$b$	$a$
$d$	$b$	$d$	$c$	$a$

Ez a feladat interaktív formában megtalálható itt:

[http://www.math.u-szeged.hu/~twaldha/tanitas/regi/dimat2\\_2020tavasz/algebra/algebra1-muveletek.html](http://www.math.u-szeged.hu/~twaldha/tanitas/regi/dimat2_2020tavasz/algebra/algebra1-muveletek.html)

### 4.4. feladat. Vizsgáljuk meg a tanult műveleti tulajdonságok (kommutativitás, asszociativitás, zéruselem, egységelem, inverzek, kancellativitás) szempontjából az alábbi műveleteket. (Ha nincs megadva a művelet táblázat, akkor írjuk fel!)

- (a) az  $\{1, -1, i, -i\}$  halmazon a szorzás művelete
- (b) az  $\{\text{igaz}, \text{hamis}\}$  halmazon az implikáció művelete
- (c) az  $\{1, 2, 3\}$  halmazon az  $x \sqcap y = \min\{x, y\}$  művelet
- (d) az  $A = \{u, v, w\}$  halmazon a lenti táblázattal definiált  $\diamond$  művelet

$\diamond$	$u$	$v$	$w$
$u$	$v$	$w$	$u$
$v$	$w$	$u$	$v$
$w$	$u$	$v$	$w$

Ez a feladat interaktív formában megtalálható itt:

[http://www.math.u-szeged.hu/~twaldha/tanitas/regi/dimat2\\_2020tavasz/algebra/algebra1-muveletek.html](http://www.math.u-szeged.hu/~twaldha/tanitas/regi/dimat2_2020tavasz/algebra/algebra1-muveletek.html)

4.5. feladat. Vizsgáljuk meg a tanult műveleti tulajdonságok (kommutativitás, asszociativitás, zéruselem, egységelem, inverzek, kancellativitás) szempontjából az alábbi műveleteket.

- (a) az egész számok halmazán értelmezett  $a \bullet b = a + b + 23$  művelet
- (b) az egész számok halmazán értelmezett  $a \otimes b = b + 2$  művelet
- (c) a valós számok halmazán értelmezett  $a \star b = 12 - 3a - 3b + a \cdot b$  művelet

Ez a feladat interaktív formában megtalálható itt:

[http://www.math.u-szeged.hu/~twaldha/tanitas/regi/dimat2\\_2020tavasz/algebra/algebra1-muveletek.html](http://www.math.u-szeged.hu/~twaldha/tanitas/regi/dimat2_2020tavasz/algebra/algebra1-muveletek.html)

4.6. feladat. Vizsgáljuk meg a tanult műveleti tulajdonságok (kommutativitás, asszociativitás, zéruselem, egységelem, inverzek, kancellativitás) szempontjából az alábbi műveleteket.

- (a) az egész számok halmazán értelmezett  $a \oplus b = a$  művelet
- (b) a komplex számok halmazán a kivonás művelete
- (c) a valós számok halmazán értelmezett  $a \triangle b = ab - 2(a + b) + 6$  művelet

Ez a feladat interaktív formában megtalálható itt:

[http://www.math.u-szeged.hu/~twaldha/tanitas/regi/dimat2\\_2020tavasz/algebra/algebra1-muveletek.html](http://www.math.u-szeged.hu/~twaldha/tanitas/regi/dimat2_2020tavasz/algebra/algebra1-muveletek.html)

4.7. feladat. Milyen algebrai struktúrák az alábbiak?

- (a)  $(\mathbb{N}; +)$
- (b)  $(\mathbb{Z}; +)$
- (c)  $(\mathbb{Z}; \cdot)$
- (d)  $(\mathbb{Z} \setminus \{0\}; \cdot)$
- (e)  $(\mathbb{Z}_5; +)$
- (f)  $(\mathbb{Z}_5; \cdot)$
- (g)  $(\mathbb{Z}_5 \setminus \{\bar{0}\}; \cdot)$
- (h)  $(\mathbb{Z}_5 \setminus \{\bar{0}\}; +)$
- (i)  $(\mathbb{R}^{2 \times 2}; +)$
- (j)  $(\mathbb{R}^{2 \times 2}; \cdot)$
- (k)  $(\mathbb{R}^{2 \times 2} \setminus \{0\}; \cdot)$
- (l)  $\text{GL}_2(\mathbb{R}) := (\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \mid \det(A) \neq 0\}; \cdot)$

Ez a feladat interaktív formában megtalálható itt:

[http://www.math.u-szeged.hu/~twaldha/tanitas/regi/dimat2\\_2020tavasz/algebra/algebra2-strukturak.html](http://www.math.u-szeged.hu/~twaldha/tanitas/regi/dimat2_2020tavasz/algebra/algebra2-strukturak.html)

4.8. feladat. Milyen algebrai struktúrák az alábbiak?

- (a)  $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}; +)$
- (b)  $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}; \cdot)$
- (c)  $(\mathbb{Q}^+; +)$
- (d)  $(\mathbb{Q}^+; \cdot)$
- (e)  $(\mathbb{Z}^-; +)$
- (f)  $(\mathbb{Z}_6 \setminus \{\bar{0}\}; \cdot)$
- (g)  $(\mathbb{N}; \cdot)$

Ez a feladat interaktív formában megtalálható itt:

[http://www.math.u-szeged.hu/~twaldha/tanitas/regi/dimat2\\_2020tavasz/algebra/algebra2-strukturak.html](http://www.math.u-szeged.hu/~twaldha/tanitas/regi/dimat2_2020tavasz/algebra/algebra2-strukturak.html)

4.9. feladat. Milyen algebrai struktúrák az alábbiak?

- (a)  $(\{a, b, c, d\}; \circ)$ , ahol  $\circ$  a lenti táblázattal definiált művelet
- (b)  $(\mathcal{P}(\{u, v\}); \cup)$
- (c)  $(\{1, -1, i, -i\}; \cdot)$
- (d)  $(\{u, v, w\}; \diamond)$ , ahol  $\diamond$  a lenti táblázattal definiált művelet
- (e)  $(\{a, b, c, d\}; *)$ , ahol  $*$  a lenti táblázattal definiált művelet
- (f)  $(\{\text{igaz}, \text{hamis}\}; \rightarrow)$

$\diamond$	$u$	$v$	$w$
$u$	$v$	$w$	$u$
$v$	$w$	$u$	$v$
$w$	$u$	$v$	$w$

$\circ$	$a$	$b$	$c$	$d$
$a$	$c$	$a$	$b$	$b$
$b$	$a$	$b$	$c$	$d$
$c$	$b$	$c$	$b$	$a$
$d$	$b$	$d$	$c$	$a$

$*$	$a$	$b$	$c$	$d$
$a$	$a$	$b$	$c$	$d$
$b$	$b$	$a$	$c$	$d$
$c$	$c$	$c$	$c$	$c$
$d$	$d$	$d$	$c$	$c$

Ez a feladat interaktív formában megtalálható itt:

[http://www.math.u-szeged.hu/~twaldha/tanitas/regi/dimat2\\_2020tavasz/algebra/algebra2-strukturak.html](http://www.math.u-szeged.hu/~twaldha/tanitas/regi/dimat2_2020tavasz/algebra/algebra2-strukturak.html)

#### 4.10. feladat.

- (a) Milyen algebrai struktúra  $(\mathbb{C}; \diamond)$ , ahol  $a \diamond b = a - b$ ?
- (b) Milyen algebrai struktúra  $(\mathbb{Z}; \bullet)$ , ahol  $a \bullet b = a + b + 23$ ?
- (c) Milyen algebrai struktúra  $(\mathbb{Z}; \otimes)$ , ahol  $a \otimes b = b + 2$ ?
- (d) Milyen algebrai struktúra  $(\mathbb{Z}; \oplus)$ , ahol  $a \oplus b = a$ ?
- (e) Milyen algebrai struktúra  $(\mathbb{Q}; \star)$ , ahol  $a \star b = 12 - 3a - 3b + a \cdot b$ ?
- (f) Milyen algebrai struktúra  $(\mathbb{Q} \setminus \{3\}; \star)$ , ahol  $a \star b = 12 - 3a - 3b + a \cdot b$ ?

Ez a feladat interaktív formában megtalálható itt:

[http://www.math.u-szeged.hu/~twaldha/tanitas/regi/dimat2\\_2020tavasz/algebra/algebra2-strukturak.html](http://www.math.u-szeged.hu/~twaldha/tanitas/regi/dimat2_2020tavasz/algebra/algebra2-strukturak.html)

#### 4.11. feladat.

- (a) Milyen algebrai struktúra  $(\mathbb{R}; \triangle)$ , ahol  $a \triangle b = ab - 2(a + b) + 6$ ?
- (b) Milyen algebrai struktúra  $(\mathbb{R} \setminus \{2\}; \triangle)$ , ahol  $a \triangle b = ab - 2(a + b) + 6$ ?

4.12. feladat. Gyűrűt, illetve testet alkotnak-e az alábbi halmazok a szokásos összeadással és szorzással?

- (a)  $\mathbb{Q}$
- (b)  $\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_5, \mathbb{Z}_6$
- (c)  $\mathbb{R}^{2 \times 3}$

4.13. feladat. Gyűrűt, illetve testet alkotnak-e az alábbi halmazok a szokásos összeadással és szorzással?

- (a)  $\mathbb{C}$
- (b)  $\mathbb{R}$
- (c)  $\mathbb{Z}$
- (d)  $\mathbb{N}$
- (e)  $\mathbb{Z}_{10}$
- (f)  $\mathbb{Z}_{11}$
- (g)  $\mathbb{Z}_{12}$
- (h)  $\mathbb{Z}_{13}$
- (i)  $\mathbb{R}^{2 \times 2}$

4.14. feladat. Gyűrűt, illetve testet alkot-e  $\mathcal{P}(U)$  (az  $U$  halmaz hatványhalmaza) a szimmetrikus differencia (mint összeadás) és a metszés (mint szorzás) műveletével?

4.15. feladat. Adjunk meg izomorfizmust az  $\mathbb{A}$  és  $\mathbb{B}$  grupoidok között.

- (a)  $\mathbb{A} = (\{\text{igaz, hamis}\}; \leftrightarrow)$ ,  $\mathbb{B} = (\mathbb{Z}_2; +)$
- (b)  $\mathbb{A} = (\{1, -1, i, -i\}; \cdot)$ ,  $\mathbb{B} = (\mathbb{Z}_4; +)$

A feladatban szereplő grupoidok művelet táblázatai interaktív formában megtalálhatóak ebben a „színezőben”:

[http://www.math.u-szeged.hu/~twaldha/tanitas/dimat2\\_2023tavasz/szinezoo.html](http://www.math.u-szeged.hu/~twaldha/tanitas/dimat2_2023tavasz/szinezoo.html)

4.16. feladat. Adjunk meg izomorfizmust az  $\mathbb{A}$  és  $\mathbb{B}$  grupoidok között.

- (a)  $\mathbb{A} = (\{\text{igaz, hamis}\}; \wedge)$ ,  $\mathbb{B} = (\mathbb{Z}_2; \cdot)$
- (b)  $\mathbb{A} = (\{-1, 1\}; \cdot)$ ,  $\mathbb{B} = (\mathbb{Z}_2; +)$
- (c)  $\mathbb{A} = (\{a, b, c, d\}; *)$ ,  $\mathbb{B} = (\mathbb{Z}_4; \cdot)$   
(lásd a művelet táblázatot jobbra)

*	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	c	d
c	c	c	c	c
d	d	d	c	c

A feladatban szereplő grupoidok művelet táblázatai interaktív formában megtalálhatóak ebben a „színezőben”:

[http://www.math.u-szeged.hu/~twaldha/tanitas/dimat2\\_2023tavasz/szinezoo.html](http://www.math.u-szeged.hu/~twaldha/tanitas/dimat2_2023tavasz/szinezoo.html)

4.17. feladat. Izomorf-e az  $\mathbb{A}$  grupoid  $\mathbb{B}$  és  $\mathbb{C}$  közül valamelyikkel? Ha igen, akkor adjunk meg egy izomorfizmust; ha nem, akkor indokoljuk meg, hogy miért nem.

(a)  $\mathbb{A} = (\{\text{igaz, hamis}\}; \rightarrow)$ ,  $\mathbb{B} = (\{0, 1\}; \circ)$   $\mathbb{C} = (\{0, 1\}; *)$

$\circ$	0	1
0	1	1
1	0	1

$*$	0	1
0	0	0
1	0	1

(b)  $\mathbb{A} = (\mathcal{P}(\{1, 2\}); \cup)$ ,  $\mathbb{B} = (\{0, 1, 2, 3\}; \oplus)$ ,  $\mathbb{C} = (\{0, 1, 2, 3\}; *)$

$\oplus$	0	1	2	3
0	0	1	3	1
1	1	1	1	1
2	3	1	2	0
3	1	1	0	3

$*$	0	1	2	3
0	0	1	0	1
1	1	1	1	1
2	0	1	2	3
3	1	1	3	3

A feladatban szereplő grupoidok műveletábrázatai interaktív formában megtalálhatóak ebben a „színezőben”:

[http://www.math.u-szeged.hu/~twaldha/tanitas/dimat2\\_2023tavasz/szinezoo.html](http://www.math.u-szeged.hu/~twaldha/tanitas/dimat2_2023tavasz/szinezoo.html)

4.18. feladat. Izomorf-e az  $\mathbb{A}$  grupoid  $\mathbb{B}$  és  $\mathbb{C}$  közül valamelyikkel? Ha igen, akkor adjunk meg egy izomorfizmust; ha nem, akkor indokoljuk meg, hogy miért nem.

(a)  $\mathbb{A} = (\{1, 2, 3\}; \min)$ ,  $\mathbb{B} = (\{0, 1, 2\}; \oplus)$ ,  $\mathbb{C} = (\{0, 1, 2\}; *)$

$\oplus$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	1	1
2	2	1	2

$*$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	0

(b)  $\mathbb{A} = (\{\text{igaz, hamis}\}; \vee)$ ,  $\mathbb{B} = (\{0, 1\}; \diamond)$ ,  $\mathbb{C} = (\{0, 1\}; \otimes)$

$\diamond$	0	1
0	1	0
1	0	0

$\otimes$	0	1
0	0	1
1	1	1

(c)  $\mathbb{A} = (\{-1, 0, 1\}; \cdot)$ ,  $\mathbb{B} = (\{0, 1, 2\}; \otimes)$ ,  $\mathbb{C} = (\{0, 1, 2\}; \circ)$

$\otimes$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	0	2
2	2	2	2

$\circ$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	0

(d)  $\mathbb{A} = (\mathbb{Z}_5^*; \cdot)$ ,  $\mathbb{B} = (\{0, 1, 2, 3\}; \diamond)$ ,  $\mathbb{C} = (\{0, 1, 2, 3\}; \oplus)$

$\diamond$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

$\oplus$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	0	3	2
2	2	3	0	1
3	3	2	1	0

A feladatban szereplő grupoidok műveletábrázatai interaktív formában megtalálhatóak ebben a „színezőben”:

[http://www.math.u-szeged.hu/~twaldha/tanitas/dimat2\\_2023tavasz/szinezoo.html](http://www.math.u-szeged.hu/~twaldha/tanitas/dimat2_2023tavasz/szinezoo.html)

4.19. feladat. Határozzuk meg az  $(\{a, b, c, d\}; *)$  grupoidban az alábbi részgrupoidokat.

(a)  $[c, d] = ?$

(b)  $[a, b] = ?$

(c)  $[a, d] = ?$

$*$	$a$	$b$	$c$	$d$
$a$	$a$	$b$	$c$	$b$
$b$	$b$	$b$	$b$	$b$
$c$	$c$	$b$	$c$	$a$
$d$	$d$	$b$	$b$	$a$

**4.20. feladat.** Határozzuk meg az  $(\{a, b, c, d\}; *)$  grupoidban az alábbi részgrupoidokat.

- (a)  $[a] = ?$   
 (b)  $[d] = ?$

*	a	b	c	d
a	a	b	c	b
b	b	b	b	b
c	c	b	c	a
d	d	b	b	a

**4.21. feladat.** Határozzuk meg az  $(\{a, b, c, d\}; *)$  grupoidban a  $[b]$  részgrupoidot.

*	a	b	c	d
a	a	c	b	d
b	b	c	b	a
c	c	a	c	a
d	d	c	a	d

**4.22. feladat.** Határozzuk meg az  $(\{a, b, c, d\}; *)$  grupoidban az alábbi részgrupoidokat.

- (a)  $[a] = ?$   
 (b)  $[b, c] = ?$   
 (c)  $[a, d] = ?$   
 (d)  $[c, d] = ?$

*	a	b	c	d
a	a	c	b	d
b	b	c	b	a
c	c	a	c	a
d	d	c	a	d

**4.23. feladat.** Határozzuk meg az  $(\mathbb{N}; +)$  félcsoporthban az alábbi részfélcsoportokat.

- (a)  $[2, 9] = ?$  (b)  $[4, 10] = ?$

**4.24. feladat.** Határozzuk meg az  $(\mathbb{N}; +)$  félcsoporthban az alábbi részfélcsoportokat.

- (a)  $[2, 5] = ?$  (b)  $[3, 5] = ?$

**4.25. feladat.** Határozzuk meg az  $(\mathbb{N}; \cdot)$  félcsoporthban az alábbi részfélcsoportokat.

- (a)  $[2, 9] = ?$  (b)  $[4, 10] = ?$

**4.26. feladat.** Határozzuk meg az  $(\mathbb{N}; \cdot)$  félcsoporthban az alábbi részfélcsoportokat.

- (a)  $[2, 5] = ?$  (b)  $[3, 5] = ?$

**4.27. feladat.** Részcsoportot alkot-e a  $H$  halmaz a  $G$  csoportban?

- (a)  $G = (\mathbb{Z}; +), H = \mathbb{N}_0$  (e)  $G = (\mathbb{C} \setminus \{0\}; \cdot), H = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$   
 (b)  $G = (\mathbb{Z}; +), H = \{a \in \mathbb{Z} : 4 \nmid a\}$  (f)  $G = (\mathbb{Z}_{21}; +), H = \mathbb{Z}_{21}^*$   
 (c)  $G = (\mathbb{Q} \setminus \{0\}; \cdot), H = \mathbb{Q}^-$  (g)  $G = (\mathbb{Z}_{15}^*; \cdot), H = \{\overline{1}, \overline{4}, \overline{11}, \overline{14}\}$   
 (d)  $G = (\mathbb{C}; +), H = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$  (h)  $G = (\mathbb{Z}_{21}^*; \cdot), H = \{\overline{1}, \overline{8}, \overline{13}, \overline{20}\}$

**4.28. feladat.** Részcsoportot alkot-e a  $H$  halmaz a  $G$  csoportban?

- (a)  $G = (\mathbb{Z}; +), H = \{a \in \mathbb{Z} : 4 \nmid a\}$  (e)  $G = (\mathbb{C} \setminus \{0\}; \cdot), H = \{ib : b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$   
 (b)  $G = (\mathbb{Q}; +), H = \mathbb{Q}^+$  (f)  $G = (\mathbb{Z}_{10}; +), H = \mathbb{Z}_{10} \setminus \{\overline{0}\}$   
 (c)  $G = (\mathbb{Q} \setminus \{0\}; \cdot), H = \mathbb{Q}^+$  (g)  $G = (\mathbb{Z}_{15}; +), H = \{\overline{0}, \overline{3}, \overline{6}, \overline{9}, \overline{12}\}$   
 (d)  $G = (\mathbb{C}; +), H = \{ib : b \in \mathbb{R}\}$  (h)  $G = (\mathbb{Z}_{15}; +), H = \{\overline{1}, \overline{4}, \overline{11}, \overline{14}\}$

**4.29. feladat.** Határozzuk meg a  $G$  csoportban a  $B$  halmaz által generált részcsoportot.

- (a)  $G = (\mathbb{Z}; +), B = \{6, 10\}$  (e)  $G = (\mathbb{Z}_{15}; +), B = \{\overline{6}, \overline{10}\}$   
 (b)  $G = (\mathbb{Z}; +), B = \{25, 65\}$  (f)  $G = (\mathbb{Z}_{16}; +), B = \{\overline{25}, \overline{65}\}$   
 (c)  $G = (\mathbb{Z}_{15}; +), B = \{\overline{2}\}$  (g)  $G = (\mathbb{C}; +), B = \{1, i\}$   
 (d)  $G = (\mathbb{Z}_{14}; +), B = \{\overline{6}, \overline{10}\}$  (h)  $G = (\mathbb{Z}_{15}^*; \cdot), B = \{\overline{2}\}$

**4.30. feladat.** Határozzuk meg a  $G$  csoportban a  $B$  halmaz által generált részcsoportot.

- (a)  $G = (\mathbb{Z}; +)$ ,  $B = \{10, 14\}$  (j)  $G = (\mathbb{Z}; +)$ ,  $B = \{2, 9\}$   
 (b)  $G = (\mathbb{Z}_{14}; +)$ ,  $B = \{\overline{10}, \overline{14}\}$  (k)  $G = (\mathbb{Z}; +)$ ,  $B = \{6, 10, 15\}$   
 (c)  $G = (\mathbb{Z}_{15}; +)$ ,  $B = \{\overline{10}, \overline{14}\}$  (l)  $G = (\mathbb{Z}_{14}; +)$ ,  $B = \{\overline{4}\}$   
 (d)  $G = (\mathbb{Z}; +)$ ,  $B = \{30, 42, 105\}$  (m)  $G = (\mathbb{Z}_{15}; +)$ ,  $B = \{\overline{10}\}$   
 (e)  $G = (\mathbb{Z}_{21}; +)$ ,  $B = \{\overline{30}, \overline{42}, \overline{105}\}$  (n)  $G = (\mathbb{Z}_{16}; +)$ ,  $B = \{\overline{5}\}$   
 (f)  $G = (\mathbb{Z}_7^*; \cdot)$ ,  $B = \{\overline{2}\}$  (o)  $G = (\mathbb{Z}_{21}; +)$ ,  $B = \{\overline{3}\}$   
 (g)  $G = (\mathbb{Z}_{21}^*; \cdot)$ ,  $B = \{\overline{8}, \overline{13}\}$  (p)  $G = (\mathbb{C} \setminus \{0\}; \cdot)$ ,  $B = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\}$   
 (h)  $G = (\mathbb{C} \setminus \{0\}; \cdot)$ ,  $B = \{1, i\}$  (q)  $G = (\mathbb{Z}_7^*; \cdot)$ ,  $B = \{\overline{3}\}$   
 (i)  $G = (\mathbb{C}; +)$ ,  $B = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\}$  (r)  $G = (\mathbb{Z}_{15}^*; \cdot)$ ,  $B = \{\overline{4}\}$

■ **4.31. feladat.** Határozzuk meg a  $G$  csoportban az  $a$  elem rendjét.

- (a)  $G = (\mathbb{Z}_{20}; +)$ ,  $a = \overline{5}$  (g)  $G = (\mathbb{R} \setminus \{0\}; \cdot)$ ,  $a = 2$   
 (b)  $G = (\mathbb{Z}_{20}; +)$ ,  $a = \overline{6}$  (h)  $G = (\mathbb{C}; +)$ ,  $a = i$   
 (c)  $G = (\mathbb{Z}_{20}; +)$ ,  $a = \overline{7}$  (i)  $G = (\mathbb{C} \setminus \{0\}; \cdot)$ ,  $a = i$   
 (d)  $G = (\mathbb{Z}_{20}; +)$ ,  $a = \overline{8}$  (j)  $G = (\mathbb{Z}_7^*; \cdot)$ ,  $a = \overline{2}$   
 (e)  $G = (\mathbb{Z}_{21}; +)$ ,  $a = \overline{6}$  (k)  $G = (\mathbb{Z}_7^*; \cdot)$ ,  $a = \overline{3}$   
 (f)  $G = (\mathbb{R}; +)$ ,  $a = 2$  (l)  $G = (\mathbb{Z}_{13}^*; \cdot)$ ,  $a = \overline{5}$

**4.32. feladat.** Határozzuk meg a  $G$  csoportban az  $a$  elem rendjét.

- (a)  $G = (\mathbb{Z}_{21}; +)$ ,  $a = \overline{6}$  (h)  $G = (\mathbb{Z}_{20}^*; \cdot)$ ,  $a = \overline{7}$   
 (b)  $G = (\mathbb{Z}_{21}; +)$ ,  $a = \overline{7}$  (i)  $G = (\mathbb{Z}_{30}; +)$ ,  $a = \overline{18}$   
 (c)  $G = (\mathbb{Z}_{21}; +)$ ,  $a = \overline{8}$  (j)  $G = (\mathbb{Z}_{30}; +)$ ,  $a = \overline{19}$   
 (d)  $G = (\mathbb{Z}_{21}; +)$ ,  $a = \overline{9}$  (k)  $G = (\mathbb{Z}_{30}; +)$ ,  $a = \overline{20}$   
 (e)  $G = (\mathbb{R}; +)$ ,  $a = -1$  (l)  $G = (\mathbb{Z}_{30}; +)$ ,  $a = \overline{21}$   
 (f)  $G = (\mathbb{R} \setminus \{0\}; \cdot)$ ,  $a = -1$  (m)  $G = (\mathbb{Z}_{30}; +)$ ,  $a = \overline{22}$   
 (g)  $G = (\mathbb{Z}_{21}^*; \cdot)$ ,  $a = \overline{4}$  (n)  $G = (\mathbb{Z}_{15}^*; \cdot)$ ,  $a = \overline{11}$

■ **4.33. feladat.** Kompatibilis osztályozása-e  $\mathcal{C}$  az alábbi grupoidnak? Ha igen, írjuk fel a hozzá tartozó faktoralgebra műveletábrázatát.

(a) $\mathcal{C} = \{\{a, b\}, \{c, d\}, \{e\}\}$	*	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$
(b) $\mathcal{C} = \{\{a\}, \{b, c, d, e\}\}$	$a$	$c$	$b$	$c$	$c$	$e$
(c) $\mathcal{C} = \{\{a, c\}, \{b, e\}, \{d\}\}$	$b$	$a$	$c$	$c$	$e$	$c$
	$c$	$a$	$e$	$c$	$c$	$e$
	$d$	$a$	$d$	$c$	$d$	$d$
	$e$	$a$	$c$	$c$	$e$	$c$

A műveletábrázat interaktív formában megtalálható ebben a „színezőben”:

[http://www.math.u-szeged.hu/~twaldha/tanitas/dimat2\\_2023tavasz/szinez.html](http://www.math.u-szeged.hu/~twaldha/tanitas/dimat2_2023tavasz/szinez.html)

**4.34. feladat.** Kompatibilis osztályozása-e  $\mathcal{C}$  az alábbi grupoidnak? Ha igen, írjuk fel a hozzá tartozó faktoralgebra műveletábrázatát.

(a) $\mathcal{C} = \{\{a, b, c, e\}, \{d\}\}$	*	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$
(b) $\mathcal{C} = \{\{a\}, \{b\}, \{c, d, e\}\}$	$a$	$c$	$b$	$c$	$c$	$e$
(c) $\mathcal{C} = \{\{a, c, d, e\}, \{b\}\}$	$b$	$a$	$c$	$c$	$e$	$c$
(d) $\mathcal{C} = \{\{a\}, \{b, e\}, \{c\}, \{d\}\}$	$c$	$a$	$e$	$c$	$c$	$e$
	$d$	$a$	$d$	$c$	$d$	$d$
	$e$	$a$	$c$	$c$	$e$	$c$

A műveletábrázat interaktív formában megtalálható ebben a „színezőben”:

[http://www.math.u-szeged.hu/~twaldha/tanitas/dimat2\\_2023tavasz/szinez.html](http://www.math.u-szeged.hu/~twaldha/tanitas/dimat2_2023tavasz/szinez.html)

4.35. feladat. Kompatibilis osztályozása-e  $\mathcal{C}$  az alábbi grupoidnak? Ha igen, írjuk fel a hozzá tartozó faktoralgebra művelettáblázatát.

(a) $\mathcal{C} = \{\{a, c\}, \{b\}, \{d\}\}$	*	$a$	$b$	$c$	$d$
(b) $\mathcal{C} = \{\{a, b\}, \{c\}, \{d\}\}$	$a$	$a$	$b$	$c$	$d$
	$b$	$c$	$d$	$a$	$b$
	$c$	$a$	$b$	$c$	$d$
	$d$	$c$	$d$	$a$	$b$

A művelettáblázat interaktív formában megtalálható ebben a „színezőben”:

[http://www.math.u-szeged.hu/~twaldha/tanitas/dimat2\\_2023tavasz/szinezo.html](http://www.math.u-szeged.hu/~twaldha/tanitas/dimat2_2023tavasz/szinezo.html)

4.36. feladat. Kompatibilis osztályozása-e  $\mathcal{C}$  az alábbi grupoidnak? Ha igen, írjuk fel a hozzá tartozó faktoralgebra művelettáblázatát.

(a) $\mathcal{C} = \{\{a, c\}, \{b, d\}\}$	*	$a$	$b$	$c$	$d$
(b) $\mathcal{C} = \{\{a\}, \{c\}, \{b, d\}\}$	$a$	$a$	$b$	$c$	$d$
(c) $\mathcal{C} = \{\{a\}, \{b, c, d\}\}$	$b$	$c$	$d$	$a$	$b$
(d) $\mathcal{C} = \{\{a, b, c, d\}\}$	$c$	$a$	$b$	$c$	$d$
(e) $\mathcal{C} = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}\}$	$d$	$c$	$d$	$a$	$b$

A művelettáblázat interaktív formában megtalálható ebben a „színezőben”:

[http://www.math.u-szeged.hu/~twaldha/tanitas/dimat2\\_2023tavasz/szinezo.html](http://www.math.u-szeged.hu/~twaldha/tanitas/dimat2_2023tavasz/szinezo.html)

★ 4.37. feladat. Definiáljuk a valós számok halmazán a  $\sim$  relációt a következőképpen:  $a \sim b \iff \operatorname{sgn} a = \operatorname{sgn} b$ . Kongruenciája-e  $\sim$  a reláció az alábbi grupoidoknak? Ha igen, írjuk fel a faktorgrupoid művelettáblázatát.

(a)  $(\mathbb{R}; +)$

(b)  $(\mathbb{R}; \cdot)$

★ 4.38. feladat. Tekintsük a természetes számok halmazán a következő osztályozást:

$$\mathcal{C} = \{\{\text{hárommal osztható számok}\}, \{\text{hárommal nem osztható számok}\}\}.$$

Kompatibilis osztályozása-e  $\mathcal{C}$  az alábbi grupoidoknak? Ha igen, írjuk fel a megfelelő faktorgrupoid művelettáblázatát.

(a)  $(\mathbb{N}; +)$

(b)  $(\mathbb{N}; \cdot)$

4.39. feladat. Homomorfizmusok-e az alábbi leképezések?

(a)  $\varphi: (\mathbb{R}^+; \cdot) \rightarrow (\mathbb{R}; +), x \mapsto \log x$

(e)  $\varphi: (\mathbb{R}^{n \times n}; \cdot) \rightarrow (\mathbb{R}; \cdot), M \mapsto \det M$

(b)  $\varphi: (\mathbb{C}; +, \cdot) \rightarrow (\mathbb{C}; +, \cdot), z \mapsto \bar{z}$

(f)  $\varphi: (C[0, 1]; +) \rightarrow (\mathbb{R}; +), f \mapsto \int_0^1 f(x) dx$

(c)  $\varphi: (\mathbb{C}; +) \rightarrow (\mathbb{R}; +), z \mapsto \operatorname{Re} z$

(g)  $\varphi: (\mathbb{Z}; +, \cdot) \rightarrow (\mathbb{Z}; +, \cdot), x \mapsto 2x$

(d)  $\varphi: (\mathbb{C}; \cdot) \rightarrow (\mathbb{R}; \cdot), z \mapsto \operatorname{Re} z$

(h)  $\varphi: (\mathbb{R}; +) \rightarrow (\mathbb{R}; +), x \mapsto x^2$

4.40. feladat. Homomorfizmusok-e az alábbi leképezések?

(a)  $\varphi: (\mathbb{R}^+; +, \cdot) \rightarrow (\mathbb{R}^+; +, \cdot), x \mapsto 1/x$

(b)  $\varphi: (\mathbb{Z}_2; +, \cdot) \rightarrow (\mathbb{Z}_2; +, \cdot), x \mapsto x^2$

(c)  $\varphi: (\mathbb{Z}_3; +, \cdot) \rightarrow (\mathbb{Z}_3; +, \cdot), x \mapsto x^2$

(d)  $\varphi: (\mathcal{P}(U); \cap) \rightarrow (\mathcal{P}(U); \cup), H \mapsto \overline{H}$ , ahol  $U$  nemüres halmaz

(e)  $(\mathcal{P}(\mathbb{N}); \cup, \cap) \rightarrow (\mathcal{P}(\mathbb{N}); \cup, \cap), H \mapsto \{1, 2, 3\} \cup H$

(f)  $(K; +, \cdot) \rightarrow (\mathbb{R}; +, \cdot), \{a_n\} \mapsto \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ , ahol  $K$  a konvergens valós számsorozatok halmaza