

Diszkrét matematika 2 (MBNXXK112)
2021 tavaszi félév

Tudnivalók a második dolgozatról

A dolgozat a Coospace-en május 17-én (hétfő) 11:00 és 11:30 között indítható, és 90 perc alatt kell befejezni. A feladatok egy részénél csak a tesztben kell bejelölni a helyes választ, más részét pedig „hagyományosan”, papíron kell megoldani, és a végeredményeket be kell írni a tesztben a megfelelő válaszmezőkbe. A teljes megoldásokat beszkenelve/lefotózva el kell küldeni a gyakorlatvezető által kihirdetett módon legkésőbb 13:15-ig. **A feladat szövege mindig jelzi majd, hogy kell-e indoklást írni. Ha nem, akkor csak a tesztbe beírt válaszok lesznek (automatikusan) értékelve. Ha a feladat kér indoklást, akkor a pont csak abban az esetben jár, ha a tesztbe beírt végeredmény helyes, és a papíron megfelelő levezetéssel, számolással alá van támasztva.** A gép csak akkor fogadja el a választ, ha pontosan megegyezik a megoldókulccsal, ezért (is) nagyon figyeljen az alábbiakra:

1. Mindig alaposan olvassa el a feladat szövegét, hogy pontosan arra a kérdésre, és pontosan úgy válaszoljon, ahogyan kell. A legtöbb esetben minden válaszmezőbe egy nemnegatív egész számot kell írni. Az ettől való eltérést a feladat szövege mindig jelzi (pl. ha szöveget vagy pedig több számot is kell valahova írni). Ha egy feladaton belül több válaszmező is van, akkor lehet részpontszámot kapni, ha ezek közül némelyikbe helyes választ ír.
2. Ellenőrizze a megoldásait (lehet számológéppel is), hogy biztosan ne legyen számolási hiba, mert akkor nem fog pontot kapni, hiába van lényegében jó levezetés a papíron.
3. Számológépet csak az ellenőrzéshez használjon: a megoldás ne a számológép nyomogatására épüljön. Próbálgatással talált megoldásért nem jár pont.
4. A sajátján kívül semmilyen természetes vagy mesterséges intelligencia (pl. más személy vagy computeralgebrai rendszer) segítségét ne vegye igénybe.

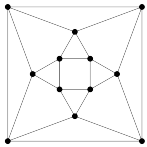
Dolgozatírás közben a Discordon az **#előadás-chat** csatornában lehet kérdezni, ha bármilyen kérdés, probléma felmerül.

A dolgozatban előforduló feladattípusok

1. feladat. Mit ad 29-cel osztva maradékul 6^{418} ?

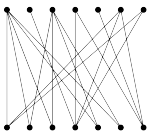
2. feladat. Van-e olyan egyszerű gráf, amelyben a csúcsok fokszámai 2, 2, 2, 2, 4, 4? Ha van, akkor adjuk meg izomorfia erejéig az összes ilyen gráfot.

3. feladat. Keressünk (zárt vagy nyílt) Euler-vonalat, illetve Hamilton-utat és Hamilton-kört az alábbi gráfban. Páros-e ez a gráf?



4. feladat. Egy erdő 5 fájában összesen 16 él van. Hány csúcsa van az erdőnek?

5. feladat. Keressünk (a magyar módszerrel) maximális elemszámú párosítást az alábbi gráfban. Igazoljuk a párosítás optimális voltát egy megfelelő lefogó csúcshalmaz megadásával.



6. feladat. Vizsgáljuk meg a tanult műveleti tulajdonságok szempontjából (az asszociativitást kivéve) az $A = \{a, b, c, d\}$ halmazon az alábbi táblázattal definiált $\circ$ műveletet.

$\circ$	a	b	c	d
a	c	a	b	b
b	a	b	c	d
c	b	c	b	a
d	b	d	c	a

7. feladat. Írjuk fel az $\{1, 2, 3\}$ halmazon az $x \sqcap y = \min\{x, y\}$ művelet művelet táblázatát, és vizsgáljuk meg a tanult műveleti tulajdonságok szempontjából. Milyen algebrai struktúra $(\{1, 2, 3\}; \sqcap)$?

8. feladat. Vizsgáljuk meg a tanult műveleti tulajdonságok szempontjából a valós számok halmazán értelmezett $a \triangle b = ab - 2(a + b) + 6$ műveletet. Milyen algebrai struktúra $(\mathbb{R}; \triangle)$?

9. feladat. Milyen algebrai struktúrák az alábbiak?

- | | |
|---|---|
| (a) $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}; \cdot)$ | (e) $(\mathcal{P}(\{u, v\}); \cup)$ |
| (b) $(\mathbb{Q}^+; +)$ | (f) $(\mathbb{R}; +, \cdot)$ |
| (c) $(\mathbb{Z}_6 \setminus \{\bar{0}\}; \cdot)$ | (g) $(\mathbb{R}^{2 \times 2}; +, \cdot)$ |
| (d) $(\mathbb{N}; \cdot)$ | (h) $(\mathbb{Z}_{10}; +, \cdot)$ |

10. feladat. Izomorf-e az $\mathbb{A}$ grupoid $\mathbb{B}$ és $\mathbb{C}$ közül valamelyikkel? Ha igen, akkor adjunk meg egy izomorfizmust; ha nem, akkor indokoljuk meg, hogy miért nem. $\mathbb{A} = (\{-1, 0, 1\}; \cdot)$, $\mathbb{B} = (\{0, 1, 2\}; \otimes)$, $\mathbb{C} = (\{0, 1, 2\}; \circ)$

$\otimes$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	0	2
2	2	2	2

$\circ$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	0

11. feladat. Határozzuk meg az $(\{a, b, c, d\}; *)$ grupoidban a $[b, c]$ részgrupoidot.

$*$	a	b	c	d
a	a	c	b	d
b	b	c	b	a
c	c	a	c	a
d	d	c	a	d

12. feladat. Határozzuk meg az $(\mathbb{N}; +)$, illetve az $(\mathbb{N}; \cdot)$ félcsoporthban a $[2, 9]$ részfélcsoporthot.

13. feladat. Kompatibilis osztályozása-e $\mathcal{C} = \{\{a\}, \{c\}, \{b, d\}\}$ az alábbi grupoidnak? Ha igen, írjuk fel a hozzá tartozó faktoralgebra művelettáblázatát.

$*$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	c	d	a	b
c	a	b	c	d
d	c	d	a	b

14. feladat. Homomorfizmusok-e az alábbi leképezések?

- (a) $\varphi: (\mathbb{R}; *) \rightarrow (\mathbb{R}^+; \circ), x \mapsto 3^x$, ahol $x * y = \frac{x+y}{2}$ és $x \circ y = \sqrt{xy}$
- (b) $\varphi: (\mathbb{R}^+; +, \cdot) \rightarrow (\mathbb{R}^+; +, \cdot), x \mapsto 1/x$
- (c) $\varphi: (\mathbb{Z}_2; +, \cdot) \rightarrow (\mathbb{Z}_2; +, \cdot), x \mapsto x^2$
- (d) $\varphi: (\mathcal{P}(\mathbb{N}); \cup, \cap) \rightarrow (\mathcal{P}(\mathbb{N}); \cup, \cap), H \mapsto \{1, 2, 3\} \cup H$

15. feladat. Részcsoportot alkot-e a H halmaz a G csoportban?

- (a) $G = (\mathbb{C}; +)$, $H = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$
- (b) $G = (\mathbb{C} \setminus \{0\}; \cdot)$, $H = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$
- (c) $G = (\mathbb{Z}_{10}; +)$, $H = \mathbb{Z}_{10}^*$
- (d) $G = (\mathbb{Z}_{15}; +)$, $H = \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}, \bar{12}\}$
- (e) $G = (\mathbb{Z}_{15}^*; \cdot)$, $H = \{\bar{1}, \bar{4}, \bar{11}, \bar{14}\}$

16. feladat. Határozzuk meg a G csoportban a B halmaz által generált részcsoportot.

- (a) $G = (\mathbb{Z}; +)$, $B = \{25, 65\}$
- (b) $G = (\mathbb{Z}_{14}; +)$, $B = \{\bar{6}, \bar{10}\}$
- (c) $G = (\mathbb{C}; +)$, $B = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\}$
- (d) $G = (\mathbb{C} \setminus \{0\}; \cdot)$, $B = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\}$
- (e) $G = (\mathbb{Z}_{21}^*; \cdot)$, $B = \{\bar{8}, \bar{13}\}$

17. feladat. Határozzuk meg a G csoportban az a elem rendjét.

- (a) $G = (\mathbb{Z}_{30}; +)$, $a = \bar{18}$
- (b) $G = (\mathbb{C}; +)$, $a = i$
- (c) $G = (\mathbb{C} \setminus \{0\}; \cdot)$, $a = i$
- (d) $G = (\mathbb{Z}_{21}^*; \cdot)$, $a = \bar{4}$