

Diszkrét matematika 2 (MBNXK112)
2021 tavaszi félév

Tudnivalók az első dolgozatról

A dolgozat a Coospace-en március 22-én (hétfő) 11:00 és 11:30 között indítható, és 90 perc alatt kell befejezni. A feladatokat „hagyományosan”, papíron kell megoldani, a végeredményeket be kell írni a tesztben a megfelelő válaszmezőkbe, a teljes megoldásokat pedig beszkenelve/lefotózva el kell küldeni a gyakorlatvezetőnek legkésőbb 13:15-ig (mindenkinek a saját gyakorlatvezetője fogja megmondani, hogy hova kell küldeni a dolgozatot). **Egy-egy feladatra csak akkor jár a pont, ha a végeredmény helyes, és a papíron megfelelő levezetéssel, számolással alá van támasztva.** A gép csak akkor fogadja el a választ, ha pontosan megegyezik a megoldókulccsal, ezért (is) nagyon figyeljen az alábbiakra:

1. Mindig alaposan olvassa el a feladat szövegét, hogy pontosan arra a kérdésre, és pontosan úgy válaszoljon, ahogyan kell. A legtöbb esetben minden válaszmezőbe egy nemnegatív egész számot kell írni. Az ettől való eltérést a feladat szövege mindig jelzi (pl. ha szöveget vagy pedig több számot is kell valahova írni). Ha egy feladaton belül több válaszmező is van, akkor lehet részpontoszámot kapni, ha ezek közül némelyikbe helyes választ ír.
2. Ellenőrizze a megoldásait (lehet számológéppel is), hogy biztosan ne legyen számolási hiba, mert akkor nem fog pontot kapni, hiába van lényegében jó levezetés a papíron.
3. Számológépet csak az ellenőrzéshez használjon: a megoldás ne a számológép nyomogatására épüljön. Próbálgatással talált megoldásért nem jár pont.
4. A sajátján kívül semmilyen természetes vagy mesterséges intelligencia (pl. más személy vagy computeralgebrai rendszer) segítségét ne vegye igénybe.

Dolgozatírás közben a Discordon az **#előadás-chat** csatornában lehet kérdezni, ha bármilyen kérdés, probléma felmerül.

A dolgozatban előforduló feladattípusok

1. feladat. Határozzuk meg mindazon x egész számok halmazát, amelyekre teljesülnek az alábbi feltételek.

- (a) $144 \mid 108x$
- (b) $88 \mid x$ és $66 \mid x$
- (c) $x \mid 112$ és $x \mid 84$

2. feladat. Határozzuk meg euklideszi algoritmussal 368 és 161 legnagyobb közös osztóját és fejezzük ki $\text{lnc}(368, 161) = 368u + 161v$ alakban (alkalmas u, v egész számokkal), majd adjuk meg 368 és 161 legkisebb közös többszörösét is.

3. feladat. Adjuk meg a $21x - 15y = 12$ diofantoszi egyenlet általános megoldását.

4. feladat. Soroljuk fel az $\{x \in \mathbb{Z} : (\exists y \in \mathbb{Z})(7x - 3y = 13) \text{ és } 10 \leq x \leq 30\}$ halmaz elemeit.

5. feladat. Kukutyinban 20 és 45 petákos érmék vannak forgalomban. Hogyan lehet ezekre felváltani 245 petákos? (Az összes megoldást adjuk meg.)

6. feladat. Gombóc Artúrt születésnapja alkalmából Föld körüli útra fizették be a barátai, és az útra ellátták 15 láda csokoládéval. Minden ládában pont annyi csoki volt, ahány éves Gombóc Artúr. Naponta 54 csokoládét evett meg, így még egy hétig sem tartott ki az ellátmány, és az utolsó napra már csak 39 csoki maradt (mármint az utolsó olyan napra, amelyekre még jutott egyáltalán csoki). Hány éves Gombóc Artúr?

7. feladat. Mennyi lehet m értéke, ha $187 \equiv 5 \pmod{m}$ és $311 \equiv 3 \pmod{m}$?

8. feladat. Oldjuk meg a $29x \equiv 17 \pmod{73}$ lineáris kongruenciát.

9. feladat. Melyik az a 4-re végződő háromjegyű szám, amely 63-mal osztva 1-et ad maradékkal?

10. feladat. Határozzuk meg azt a legkisebb háromjegyű természetes számot, amelynek 12-szerese 6-ot ad maradékkal 30-cal osztva.

11. feladat. Oldjuk meg az alábbi lineáris kongruenciarendszereket.

$$\begin{array}{ll} \left. \begin{array}{l} x \equiv 5 \pmod{6} \\ x \equiv 3 \pmod{10} \\ x \equiv -2 \pmod{15} \end{array} \right\} & \left. \begin{array}{l} 10x \equiv 16 \pmod{9} \\ 6x \equiv 3 \pmod{21} \\ 3x \equiv 2 \pmod{5} \end{array} \right\} \end{array} \quad \text{(b)}$$

12. feladat. Egy labdarúgó mérkőzésre azonos számú férőhellyel rendelkező buszokkal érkeznek a szurkolók, akiket biztonsági okokból kisebb csoportokban engednek be a stadionba. Először 4 busznyai szurkoló érkezett, és 5 fős csoportokban engedték be őket, így az utolsó csoportban csak 3 szurkoló maradt. Mászor 13 busszal érkeztek, és 8-as csoportokban nyertek bebocsátást, és ekkor szintén 3 szurkoló maradt az utoljára beengedett csoportban. Amikor pedig 16 busszal érkeztek szurkolók, és egyszerre 9-et léptettek be, akkor végül 5 szurkoló maradt. Hány személyesek a buszok, ha tudjuk, hogy egy buszba legfeljebb 100-an férnek, és a buszok minden esetben tele voltak?

13. feladat. Bizonyos megfigyelések szerint a varjak mindig azonos létszámú rajokban vándorolnak. Ha 11 varjúraj oly módon száll le egy fára, hogy a fa minden ágára 4 varjú kerül, akkor végül egy varjú egyedül marad. Ha 12 varjúraj száll le egy fa ágaira hetes csoportokban, akkor szintén egy varjú egyedül lesz egy ágon. Míg ha 13 varjúraj kilences csoportokban száll le egy fa ágaira, akkor az utolsó ágon 7 varjú lesz. Hány varjú van egy rajban, ha tudjuk, hogy ez a szám nem több, mint 100?

14. feladat. Az ötös lottón 90 számból 5 számot húznak ki. Hányféle 3-találatos szelvény lehetséges egy héten? (Egy szelvényen 1-től 90-ig szerepelnek a számok, melyek közül a fogadó ötöt jelöl meg.)

15. feladat. Hús láda áruból 15 láda első osztályú, a többi másodosztályú. Hányféleképpen választhatunk ki 5 ládát úgy, hogy legfeljebb 2 másodosztályú legyen köztük?

16. feladat. Egy csomag francia kártya 52 lapból áll, 4-féle színből 13-13 lapot tartalmaz.

(a) Hányféleképpen húzhatunk ki egy csomag francia kártyából négy olyan lapot, amelyek közül pontosan két lap színe egyezik meg?

(b) Hányféleképpen húzhatunk ki négy olyan lapot, amelyek között pontosan két szín fordul elő?

17. feladat. Hányféleképpen választhatunk 30 darabot 100, 200 és 500 forintos bankjegyekből, ha feltételezzük, hogy mindegyikből van legalább 30 darab?

18. feladat. Hányféleképpen helyezhetünk el 24 különböző könyvet egy 7-polcos szekrényben, ha bármelyik polcon elfér mind a 24 könyv?

19. feladat. Egy állatszelídítő 5 oroszlánt és 4 tigrist szeretne bevezetni egymás után a porondra úgy, hogy 2 tigris nem jöhet egymás után. Hányféleképpen teheti ezt meg? (Az állatszelídítő természetesen meg tudja különböztetni az állatait.)

20. feladat. Hányféle olyan „szó” képezhető a KOMBINATORIKA szó betűiből, melyben nem áll egymás mellett két

(a) mássalhangzó,

(b) magánhangzó?

21. feladat. Egy 50 fős osztályból 25-en járnak matematika, 19-en fizika és 30-an kémia szakkörre. 10-en járnak matematika és fizika, 12-en matematika és kémia, 16-an fizika és kémia szakkörre, valamint 8-an járnak mindhárom szakkörre. Hányan vannak, akik egyik szakkörre sem járnak?

22. feladat. Hány olyan háromjegyű szám van, amely nem osztható se 4-gyel, se 5-tel, se 6-tal?

23. feladat. Hány olyan 8-karakteres jelszó létezik, amely kisbetűkből, számjegyekből és szimbólumokból áll, és mindháromból legalább egyet valóban tartalmaz is? (Kisbetűből 26, számjegyből 10, szimbólumból pedig 32 áll rendelkezésre.)

24. feladat. Határozzuk meg az $\{a, b, c, d, e, f\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$ leképezések számát. Hány szürjektív és hány injektív van ezek között?

25. feladat. Határozzuk meg az $\{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{a, b, c, d, e, f\}$ leképezések számát. Hány szürjektív és hány injektív van ezek között?

26. feladat. Számítsuk ki x^0 és x^3 együtthatóját a $\left(3x^3 + \frac{2}{x^2}\right)^5$ hatvány kifejtésében.

27. feladat. Teljes maradékrendszert alkot-e 3, 18, 33, ..., 678 modulo 46?

28. feladat. Számítsuk ki $\mathbb{Z}_{21}$ -ben a $\overline{17} + \overline{15}, \overline{9} - \overline{15}, \overline{6} \cdot \overline{7}$ elemeket.

29. feladat. Oldjuk meg $\mathbb{Z}_{15}$ -ben a $\overline{9} \cdot \overline{x} = \overline{6}$ egyenletet (az összes megoldást keressük meg!)

30. feladat. Határozzuk meg az $\overline{5}^{-1}$ multiplikatív inverzet $\mathbb{Z}_{13}$ -ban.

31. feladat. Soroljuk fel $\mathbb{Z}_{10}^*$ elemeit, és állítsuk az elemeket párba az inverzükkel.

32. feladat. Határozzuk meg $\mathbb{Z}_{25}$ -ben $\overline{21}$ rendjét és számítsa ki a $\overline{21}^{153}$ hatványt.