

## DISZKRÉT MATEMATIKA II (MBNXK112)

végeredmények a gyakorlófeladatokhoz  
(2021. május 2.)

### 1. SZÁMELMÉLET (DIOFANTOSZI EGYENLETEK ÉS KONGRUENCIÁK)

#### 1.1. feladat.

- (a) 7 többszörösei:  $\{7k : k \in \mathbb{Z}\}$
- (b) 420 többszörösei:  $\{420k : k \in \mathbb{Z}\}$
- (c) 4 többszörösei:  $\{4k : k \in \mathbb{Z}\}$
- (d) 7 többszörösei:  $\{7k : k \in \mathbb{Z}\}$
- (e) 264 többszörösei:  $\{264k : k \in \mathbb{Z}\}$
- (f) 28 osztói:  $\{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 7, \pm 14, \pm 28\}$
- (g) 18 osztói:  $\{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm 9, \pm 18\}$
- (h) 300 többszörösei:  $\{300k : k \in \mathbb{Z}\}$
- (i) 33 osztói:  $\{\pm 1, \pm 3, \pm 11, \pm 33\}$

#### 1.2. feladat. 60

#### 1.3. feladat.

- (a)  $\text{lko}(a, b) = 4 = -3a + 4b$ ,  $\text{lkkt}(a, b) = 252$
- (b)  $\text{lko}(a, b) = 6 = 2a - 5b$ ,  $\text{lkkt}(a, b) = 390$
- (c)  $\text{lko}(a, b) = 23 = -3a + 7b$ ,  $\text{lkkt}(a, b) = 2576$
- (d)  $\text{lko}(a, b) = 77 = 2a - b$ ,  $\text{lkkt}(a, b) = 7007$
- (e)  $\text{lko}(a, b) = 7 = -194a + 75b$ ,  $\text{lkkt}(a, b) = 580139$
- (f)  $\text{lko}(a, b) = 13 = -4a - 3b$ ,  $\text{lkkt}(a, b) = 143143$

#### 1.4. feladat. A negyedik egységgyökök, azaz $z = 1, -1, i, -i$ .

#### 1.5. feladat.

- (a)  $x = 2 + 5t$ ,  $y = -2 - 6t$  ( $t \in \mathbb{Z}$ )
- (b)  $x = -1 + 5t$ ,  $y = 3 - 13t$  ( $t \in \mathbb{Z}$ )
- (c)  $x = -3 + 7t$ ,  $y = 3 - 6t$  ( $t \in \mathbb{Z}$ )
- (d)  $x = 4 + 12t$ ,  $y = -2 - 7t$  ( $t \in \mathbb{Z}$ )
- (e)  $x = 2 - 5t$ ,  $y = 2 - 7t$  ( $t \in \mathbb{Z}$ )
- (f)  $x = 22 + 5t$ ,  $y = 11 + 3t$  ( $t \in \mathbb{Z}$ )
- (g)  $x = -689 + 571t$ ,  $y = 286 - 237t$  ( $t \in \mathbb{Z}$ )
- (h)  $x = 1479 + 418t$ ,  $y = -697 - 197t$  ( $t \in \mathbb{Z}$ )
- (i) nincs megoldása

#### 1.6. feladat.

- (a)  $2 = |\{17, 25\}|$
- (b)  $7 = |\{10, 13, 16, 19, 22, 25, 28\}|$
- (c)  $3 = |\{19, 26, 33\}|$
- (d)  $2 = |\{25, 38\}|$

#### 1.7. feladat. $10 \cdot 20 + 1 \cdot 45$ és $1 \cdot 20 + 5 \cdot 45$

#### 1.8. feladat. Végtelen sok megoldás van, íme egy: $12 \cdot 21 - 10 \cdot 25 = 2$ .

#### 1.9. feladat.

- (a) Csak a 4-nél lévőt tudja megszerezni.
- (b)  $(-2) \cdot a + 3 \cdot b = 12$  (5 ugrás)
- (c) Az első esetben  $18 \cdot a + 14 \cdot b = 1000$  (32 ugrás), a második esetben  $(-1) \cdot a + 27 \cdot b = 1000$  (28 ugrás).

#### 1.10. feladat. Gombóc Artúr 17 éves (és az ötödik napon fogyott el a csokoládé).

**1.11. feladat.** 6, 10, 6

**1.12. feladat.** 7, 5, 10

**1.13. feladat.** 1, 1, 5

**1.14. feladat.** 2, 7, 14

**1.15. feladat.**

(a) 6

(b) 1

(c) 6

(d) 8

(e) 9

(f) 7

**1.16. feladat.**

(a)  $2^{n+2} + 3^{2n+1} = 4 \cdot 2^n + 3 \cdot 9^n \equiv 4 \cdot 2^n + 3 \cdot 2^n = 7 \cdot 2^n \equiv 0 \pmod{7}$

(b)  $2^{5n+1} + 5^{n+2} = 2 \cdot 32^n + 25 \cdot 5^n \equiv 2 \cdot 5^n + 25 \cdot 5^n = 27 \cdot 5^n \equiv 0 \pmod{27}$

**1.17. feladat.**

(a)  $x \equiv 3 \pmod{5}$

(b)  $x \equiv 11 \pmod{14}$

(c)  $x \equiv 2 \pmod{4}$

(d)  $x \equiv 5 \pmod{34}$

(e) nincs megoldása

(f)  $x \equiv 10 \pmod{13}$

(g)  $x \equiv 3 \pmod{4}$

(h)  $x \equiv 61 \pmod{73}$

**1.18. feladat.**

(a) 11, 25

(b) ez lehetetlen

(c) 3, 10, 17, 24 (először: 3, 17)

**1.19. feladat.** 694

**1.20. feladat.** 103

**1.21. feladat.**

(a)  $x \equiv 57 \pmod{70}$

(b)  $x \equiv 1 \pmod{10}$

(c)  $x \equiv 43 \pmod{90}$

(d)  $x \equiv 37 \pmod{315}$

(e)  $x \equiv -1 \pmod{56}$

(f)  $x \equiv 29 \pmod{168}$

(g) nincs megoldása

(h) nincs megoldása

(i)  $x \equiv 18 \pmod{35}$

(j)  $x \equiv 17 \pmod{30}$

(k)  $x \equiv 214 \pmod{315}$

(l)  $x \equiv 184 \pmod{210}$

**1.22. feladat.** 47

**1.23. feladat.** 31

**1.24. feladat.**

(a)  $x \equiv 12c_1 + 55c_2 \pmod{66}$

(b)  $x \equiv 21c_1 + 50c_2 \pmod{70}$

(c)  $x \equiv 40c_1 + 45c_2 + 36c_3 \pmod{60}$

## 2. KOMBINATORIKA

2.1. feladat.  $\frac{8!}{1!2!5!} = \binom{8}{5} \binom{3}{2}$

2.2. feladat.  $4^5$

2.3. feladat.  $20^4$

2.4. feladat.  $7 \cdot 6$

2.5. feladat.  $\binom{5}{3} \binom{85}{2}$

2.6. feladat.  $\binom{4}{2} \cdot 3!$

2.7. feladat.  $\binom{5}{2} \binom{9}{2}$

2.8. feladat.  $8! \cdot 2^8$

2.9. feladat.  $\frac{5!}{5} \cdot 2^5$

2.10. feladat.  $\frac{5!}{5} \cdot 2$

2.11. feladat.  $\binom{6}{2} \binom{5}{2} + \binom{6}{3} \binom{5}{1} + \binom{6}{4} \binom{5}{0}$

2.12. feladat.  $\binom{15}{3} \binom{5}{2} + \binom{15}{4} \binom{5}{1} + \binom{15}{5} \binom{5}{0}$

2.13. feladat.

(a)  $\binom{4}{1} \binom{3}{2} \binom{13}{2} \binom{13}{1} \binom{13}{1} = 4 \cdot 3 \cdot 13^2 \cdot \binom{13}{2}$

(b)  $\binom{4}{2} \left[ 2 \cdot \binom{13}{1} \binom{13}{3} + \binom{13}{2} \binom{13}{2} \right]$

2.14. feladat.  $\frac{5!}{2!3!} + \frac{5!}{2!2!1!} + \frac{5!}{1!3!1!}$

2.15. feladat.  $\binom{6+4-1}{4}$

2.16. feladat.  $\binom{5+10-1}{10}$

2.17. feladat.  $\binom{3+30-1}{30}$

2.18. feladat.  $\frac{(20+4-1)!}{(4-1)!} = 20! \cdot \binom{20+4-1}{20}$

2.19. feladat.  $\frac{(15+3-1)!}{(3-1)!} = 15! \cdot \binom{15+3-1}{15}$

2.20. feladat.  $\frac{(24+7-1)!}{(7-1)!} = 24! \cdot \binom{24+7-1}{24}$

2.21. feladat.  $\binom{11}{5}$

2.22. feladat.  $\binom{6}{4} \cdot 4! \cdot 5!$

2.23. feladat.  $\binom{4}{3} \cdot \frac{3!}{2!} \cdot \frac{3!}{2!} = 4 \cdot 3 \cdot 3$

2.24. feladat.

(a)  $\binom{7}{7} \cdot \frac{6!}{2!2!2!} \cdot \frac{7!}{2!}$

$$(b) \binom{8}{6} \cdot \frac{6!}{2!2!2!} \cdot \frac{7!}{2!}$$

**2.25. feladat.** 6

**2.26. feladat.** 6

**2.27. feladat.**  $7! - 6! \cdot 2$

**2.28. feladat.**

$$(a) 7! - 5! \cdot 3!$$

$$(b) 7! - 3 \cdot 2 \cdot 6! + 3 \cdot 2 \cdot 5! = \binom{5}{3} \cdot 4! \cdot 3!$$

**2.29. feladat.**

$$(a) 618$$

$$(b) 240$$

$$(c) 480$$

$$(d) 51$$

$$(e) 592$$

**2.30. feladat.**  $68^8 - 36^8 - 58^8 - 42^8 + 26^8 + 10^8 + 32^8$

**2.31. feladat.** Összesen  $4^6$ , ebből  $4^6 - 4 \cdot 3^6 + 6 \cdot 2^6 - 4$  szürjektív és 0 injektív.

**2.32. feladat.** Összesen  $6^4$ , ebből 0 szürjektív és  $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$  injektív.

**2.33. feladat.**  $2^n - 2$

**2.34. feladat.**  $3^n - \binom{3}{2} 2^n + 3$

**2.35. feladat.**  $\binom{6}{4} \cdot 3^2 \cdot 2^4 = 2160$

**2.36. feladat.**

$$(a) \binom{5}{1} \cdot 3^1 \cdot 2^4 = 240$$

$$(b) \binom{5}{2} \cdot 3^2 \cdot 2^3 = 720$$

$$(c) 0$$

$$(d) \binom{5}{3} \cdot 3^3 \cdot 2^2 = 1080$$

**2.37. feladat.**

$$(a) \binom{12}{6,6,0} - \binom{12}{7,2,3} = -6996$$

$$(b) -\binom{12}{6,5,1} + \binom{12}{7,1,4} = -1584$$

$$(c) -\binom{12}{2,9,1} + \binom{12}{3,5,4} - \binom{12}{4,1,7} = 23100$$

**2.38. feladat.**

$$(a) \binom{12}{0,6,6} - \binom{12}{2,3,7} \cdot 2^2 + \binom{12}{4,0,8} \cdot 2^4 = -22836$$

$$(b) -\binom{12}{1,5,6} \cdot 2^1 + \binom{12}{3,2,7} \cdot 2^3 = 52272$$

$$(c) -\binom{12}{0,7,5} - \binom{12}{2,4,6} \cdot 2^2 - \binom{12}{4,1,7} \cdot 2^4 = -8712$$

$$(d) \binom{12}{1,4,7} \cdot 2^1 + \binom{12}{3,1,8} \cdot 2^3 = -7920$$

3. SZÁMELMÉLET (MARADÉKOSZTÁLYOK, HATVÁNYOZÁS MODULO  $m$ )**3.1. feladat.**

- (a) igen
- (b) nem
- (c) igen
- (d) igen
- (e) nem
- (f) nem
- (g) igen

**3.2. feladat.**

- (a)  $\bar{3}, \bar{13}, \bar{5}$
- (b)  $\bar{7}, \bar{13}, \bar{6}$
- (c)  $\bar{4}, \bar{16}, \bar{3}$
- (d)  $\bar{11}, \bar{15}, \bar{0}$
- (e)  $\bar{15}, \bar{12}, \bar{9}$

**3.3. feladat.**

- (a) nincs megoldása
- (b)  $\bar{x} = \bar{4}, \bar{9}, \bar{14}$
- (c)  $\bar{x} = \bar{3}$
- (d)  $\bar{x} = \bar{3}$
- (e)  $\bar{x} = \bar{11}, \bar{25}$
- (f)  $\bar{x} = \bar{2}, \bar{6}$
- (g) nincs megoldása
- (h)  $\bar{x} = \bar{10}$
- (i)  $\bar{x} = \bar{3}, \bar{7}, \bar{11}$

**3.4. feladat.**

- (a)  $\bar{3}^{-1} = \bar{2} \in \mathbb{Z}_5$
- (b)  $\bar{88}^{-1} \in \mathbb{Z}_{55}$  nem értelmezett
- (c)  $\bar{5}^{-1} = \bar{8} \in \mathbb{Z}_{13}$
- (d)  $\bar{9}^{-1} \in \mathbb{Z}_{12}$  nem értelmezett
- (e)  $\bar{5}^{-1} = \bar{3} \in \mathbb{Z}_{14}$
- (f)  $\bar{29}^{-1} = \bar{68} \in \mathbb{Z}_{73}$

**3.5. feladat.** Az inverz párok tagjai szorosan egymás mellé vannak írva; amelyik elemnek nincs „párja” az saját magának az inverze.

- (a)  $\mathbb{Z}_{15}^* = \{\bar{1}; \bar{2}, \bar{8}; \bar{4}; \bar{7}, \bar{13}; \bar{11}; \bar{14}\}$
- (b)  $\mathbb{Z}_7^* = \{\bar{1}; \bar{2}, \bar{4}; \bar{3}, \bar{5}; \bar{6}\}$
- (c)  $\mathbb{Z}_8^* = \{\bar{1}; \bar{3}; \bar{5}; \bar{7}\}$
- (d)  $\mathbb{Z}_9^* = \{\bar{1}; \bar{2}, \bar{5}; \bar{4}, \bar{7}; \bar{8}\}$
- (e)  $\mathbb{Z}_{10}^* = \{\bar{1}; \bar{3}, \bar{7}; \bar{9}\}$
- (f)  $\mathbb{Z}_{11}^* = \{\bar{1}; \bar{2}, \bar{6}; \bar{3}, \bar{4}; \bar{5}, \bar{9}; \bar{7}, \bar{8}; \bar{10}\}$

**3.6. feladat.**

- (a)  $\mathbb{Z}_7$ -ben  $o(\bar{2}) = 3$ ,  $\bar{2}^{102} = \bar{1}$ ,  $\bar{2}^{2021} = \bar{4}$
- (b)  $\mathbb{Z}_7$ -ben  $o(\bar{3}) = 6$ ,  $\bar{3}^{201} = \bar{6}$ ,  $\bar{3}^{2021} = \bar{5}$
- (c)  $\mathbb{Z}_{10}$ -ben  $o(\bar{2})$  nem értelmezett,  $\bar{2}^{402} = \bar{4}$ ,  $\bar{2}^{2021} = \bar{2}$
- (d)  $\mathbb{Z}_{10}$ -ben  $o(\bar{3}) = 4$ ,  $\bar{3}^{402} = \bar{9}$ ,  $\bar{3}^{2021} = \bar{3}$
- (e)  $\mathbb{Z}_{15}$ -ben  $o(\bar{13}) = 4$ ,  $\bar{13}^{153} = \bar{13}$ ,  $\bar{13}^{2023} = \bar{7}$
- (f)  $\mathbb{Z}_{25}$ -ben  $o(\bar{21}) = 5$ ,  $\bar{21}^{153} = \bar{11}$ ,  $\bar{21}^{2024} = \bar{6}$

**3.7. feladat.**

- (a)  $\varphi(20) = 8$
- (b)  $\varphi(30) = 8$
- (c)  $\varphi(60) = 16$
- (d)  $\varphi(75) = 40$
- (e)  $\varphi(88) = 40$
- (f)  $\varphi(128) = 64$
- (g)  $\varphi(7!) = 1152$

**3.8. feladat.**

- (a)  $x = 5, 8, 10, 12$
- (b) nincs megoldása
- (c)  $x = 7, 9, 14, 18$
- (d)  $x = 2^k$  ( $k \in \mathbb{N}$ )
- (e)  $x = 12, 14, 16$
- (f) nincs megoldása
- (g)  $x = 3, 4, 6$
- (h) minden  $x \in \mathbb{N}$  esetén teljesül

**3.9. feladat.**

- (a)  $3^{65} \equiv 3^1 \equiv 3 \pmod{128}$
- (b)  $19^{81} \equiv 19^1 \equiv 19 \pmod{75}$
- (c)  $63^{42} \equiv 13^2 \equiv 19 \pmod{50}$
- (d)  $42^{62} \equiv 17^2 \equiv 14 \pmod{25}$
- (e)  $111^{50} \equiv 7^2 \equiv 49 \pmod{52}$

**3.10. feladat.**

- (a)  $15^{159} \equiv 15^{-1} \equiv 25 \pmod{34}$
- (b)  $20^{449} \equiv 20^{-1} \equiv 14 \pmod{31}$
- (c)  $6^{418} \equiv 6^{-2} \equiv 25 \pmod{29}$
- (d)  $3^{298} \equiv 3^{-2} \equiv 14 \pmod{25}$
- (e)  $557^{517} \equiv 27^{-3} \equiv 8 \pmod{53}$

**3.11. feladat.**  $1997^{1998} \equiv (-3)^{-2} \equiv 89 \pmod{100} \implies$  az utolsó két jegy 8 és 9

**3.12. feladat.**  $\underbrace{11 \dots 11}_{99} \equiv 9^{-1} \cdot \underbrace{99 \dots 99}_{99} \equiv 4 \cdot (10^{99} - 1) \equiv 4 \cdot (3^3 - 1) \equiv 4 \cdot 26 \equiv 4 \cdot 5 \equiv -1 \pmod{7} \implies$  ugyanolyan nap lesz, mint amilyen tegnap volt

**3.13. feladat.**

- (a)  $13^{321^{50}} \equiv 13^{41^2} \equiv 13^1 \equiv 13 \pmod{87}$
- (b)  $91^{441^{222}} \equiv 3^{1^{222}} \equiv 3 \pmod{88}$
- (c)  $80^{111^{50}} \equiv 27^{7^2} \equiv 27^{-3} \equiv 8 \pmod{53}$
- (d)  $95^{81^{99}} \equiv 3^{15^{-1}} \equiv 3^3 \equiv 27 \pmod{46}$

**3.14. feladat.**  $711^{185^{937}} \equiv 4^{(-1)^1} \equiv 4^{-1} \equiv 2 \pmod{7} \implies$  ugyanolyan nap lesz, mint holnapután

**3.15. feladat.**  $googolplex = 10^{10^{100}} \equiv 10^4 \equiv (-5)^2 \equiv 4 \pmod{21}$

## 4. GRÁFELMÉLET

**4.1. feladat.**

- (a) Nem lehetséges.
- (b) Lehetséges (izomorfia erejéig egyetlen ilyen gráf van).

**4.2. feladat.**

- (a) Izomorfia erejéig két ilyen gráf van.
- (b) Izomorfia erejéig két ilyen gráf van (az egyiknél  $x = 2$ , a másiknál  $x = 4$ ).
- (c) Izomorfia erejéig két ilyen gráf van.
- (d) Nincs ilyen gráf.
- (e) Izomorfia erejéig öt ilyen gráf van.
- (f) Izomorfia erejéig egy ilyen gráf van.
- (g) Nincs ilyen gráf.

**4.3. feladat.**

- (a) Van zárt Euler-vonal (és így nyílt Euler-vonal nincs).
- (b) Van nyílt Euler-vonal (és így zárt Euler-vonal nincs).
- (c) Van nyílt Euler-vonal (és így zárt Euler-vonal nincs).
- (d) Van zárt Euler-vonal (és így nyílt Euler-vonal nincs).
- (e) Nincs Euler-vonal (se zárt, se nyílt).
- (f) Van zárt Euler-vonal (és így nyílt Euler-vonal nincs).
- (g) Van zárt Euler-vonal (és így nyílt Euler-vonal nincs).
- (h) Van zárt Euler-vonal (és így nyílt Euler-vonal nincs).

**4.4. feladat.**

- (a) Van Hamilton-kör (és így Hamilton-út is).
- (b) Nincs Hamilton-út (és így Hamilton-kör sincs).
- (c) Van Hamilton-kör (és így Hamilton-út is).
- (d) Van Hamilton-kör (és így Hamilton-út is).
- (e) Van Hamilton-út, de Hamilton-kör nincs.
- (f) Van Hamilton-kör (és így Hamilton-út is).
- (g) Van Hamilton-kör (és így Hamilton-út is).
- (h) Van Hamilton-út, de Hamilton-kör nincs.

**4.5. feladat.**

- (a) Síkgráf.
- (b) Síkgráf.
- (c) Síkgráf.
- (d) Nem síkgráf.
- (e) Nem síkgráf.
- (f) Síkgráf.
- (g) Nem síkgráf.
- (h) Nem síkgráf.

**4.6. feladat.**

- (a) 1
- (b) 2
- (c) 3
- (d) 6
- (e) 2
- (f) 3
- (g) 6
- (h) 11
- (i) 3

(j) 6

**4.7. feladat.**

(a) 2 és 18 között bármennyi lehet (de az összegük 20 kell legyen).

(b) 3

(c) 9

**4.8. feladat.** 21

**4.9. feladat.** 3

**4.10. feladat.**

(a) Nem páros gráf.

(b) Páros gráf.

(c) Nem páros gráf.

(d) Páros gráf.

(e) Nem páros gráf.

(f) Páros gráf.

(g) Páros gráf.

(h) Páros gráf.

(i) Nem páros gráf.

**4.11. feladat.**

(a)  $\nu(G) = \tau(G) = 4$

(b)  $\nu(G) = \tau(G) = 3$

(c)  $\nu(G) = \tau(G) = 6$

(d)  $\nu(G) = \tau(G) = 5$

(e)  $\nu(G) = \tau(G) = 10$

(f)  $\nu(G) = \tau(G) = 4$

(g)  $\nu(G) = \tau(G) = 5$

(h)  $\nu(G) = \tau(G) = 6$

(i)  $\nu(G) = \tau(G) = 10$



## 5. ABSZTRAKT ALGEBRA

**5.1. feladat.**

- (a) igen
- (b) nem
- (c) nem
- (d) igen
- (e) nem
- (f) nem
- (g) igen

**5.2. feladat.**

- (a) igen
- (b) igen
- (c) nem
- (d) igen
- (e) nem
- (f) nem

**5.3. feladat.** Kommutatív; asszociatív; nem kancellatív;  $c$  zéruselem;  $a$  egységelem;  $a$  inverze  $a$ ;  $b$  inverze  $b$ ;  $c$ -nek nincs inverze;  $d$ -nek nincs inverze.

**5.4. feladat.** Nem kommutatív; nem asszociatív; nem kancellatív; nincs zéruselem;  $b$  egységelem;  $a$  inverzei  $c$  és  $d$ ;  $b$  inverze  $b$ ;  $c$  inverzei  $a$  és  $c$ ;  $d$  inverze  $a$ .

**5.5. feladat.** Kommutatív; asszociatív; nem kancellatív;  $\bar{0}$  zéruselem;  $\bar{1}$  egységelem;  $\bar{0}$ -nak nincs inverze;  $\bar{1}$  inverze  $\bar{1}$ ;  $\bar{2}$  inverze  $\bar{3}$ ;  $\bar{3}$  inverze  $\bar{2}$ ;  $\bar{4}$  inverze  $\bar{4}$ .

**5.6. feladat.** Kommutatív; asszociatív; nem kancellatív;  $\{u, v\}$  zéruselem;  $\emptyset$  egységelem;  $\emptyset$  inverze  $\emptyset$ ; a többi elemnek nincs inverze.

**5.7. feladat.** Kommutatív; asszociatív; kancellatív; nincs zéruselem;  $1$  egységelem;  $1$  inverze  $1$ ;  $-1$  inverze  $-1$ ;  $i$  inverze  $-i$ ;  $-i$  inverze  $i$ .

**5.8. feladat.** Nem kommutatív; nem asszociatív; nem kancellatív; nincs zéruselem; nincs egységelem (így inverzeket nem is lehet értelmezni).

**5.9. feladat.** Kommutatív; asszociatív; nem kancellatív;  $1$  zéruselem;  $3$  egységelem;  $3$  inverze  $3$ ; a többi elemnek nincs inverze.

**5.10. feladat.** Kommutatív; asszociatív; kancellatív; nincs zéruselem;  $w$  egységelem;  $u$  inverze  $v$ ;  $v$  inverze  $u$ ;  $w$  inverze  $w$ .

**5.11. feladat.** Kommutatív; asszociatív; kancellatív; nincs zéruselem;  $-23$  egységelem;  $a$  inverze  $-46 - a$  (minden  $a \in \mathbb{Z}$  esetén).

**5.12. feladat.** Nem kommutatív; nem asszociatív; nem kancellatív; nincs zéruselem; nincs egységelem (így inverzeket nem is lehet értelmezni).

**5.13. feladat.** Kommutatív; asszociatív; nem kancellatív;  $3$  zéruselem;  $4$  egységelem;  $3$ -nak nincs inverze;  $a$  inverze  $\frac{8-3a}{3-a}$  (minden  $a \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$  esetén).

**5.14. feladat.** Nem kommutatív; asszociatív; nem kancellatív; nincs zéruselem; nincs egységelem (így inverzeket nem is lehet értelmezni).

**5.15. feladat.** Nem kommutatív; nem asszociatív; kancellatív; nincs zéruselem; nincs egységelem (így inverzeket nem is lehet értelmezni).

**5.16. feladat.** Kommutatív; asszociatív; nem kancellatív;  $2$  zéruselem;  $3$  egységelem;  $2$ -nek nincs inverze;  $a$  inverze  $\frac{2a-3}{a-2}$  (minden  $a \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$  esetén).

**5.17. feladat.**

- (a) Félcsoport (és így grupoid is).
- (b) Abel-csoport (és így csoport, monoid, félcsoport, grupoid is).
- (c) Monoid (és így félcsoport, grupoid is).
- (d) Monoid (és így félcsoport, grupoid is).

- (e) Abel-csoport (és így csoport, monoid, félcsoport, grupoid is).
- (f) Monoid (és így félcsoport, grupoid is).
- (g) Abel-csoport (és így csoport, monoid, félcsoport, grupoid is).
- (h) Nem is grupoid.
- (i) Abel-csoport (és így csoport, monoid, félcsoport, grupoid is).
- (j) Monoid (és így félcsoport, grupoid is).
- (k) Nem is grupoid.
- (l) Csoport (és így monoid, félcsoport, grupoid is).

**5.18. feladat.**

- (a) Nem is grupoid.
- (b) Abel-csoport (és így csoport, monoid, félcsoport, grupoid is).
- (c) Félcsoport (és így grupoid is).
- (d) Abel-csoport (és így csoport, monoid, félcsoport, grupoid is).
- (e) Félcsoport (és így grupoid is).
- (f) Nem is grupoid.
- (g) Monoid (és így félcsoport, grupoid is).

**5.19. feladat.**

- (a) Abel-csoport (és így csoport, monoid, félcsoport, grupoid is).
- (b) Grupoid.
- (c) Monoid (és így félcsoport, grupoid is).
- (d) Monoid (és így félcsoport, grupoid is).
- (e) Grupoid.
- (f) Abel-csoport (és így csoport, monoid, félcsoport, grupoid is).

**5.20. feladat.**

- (a) Grupoid.
- (b) Abel-csoport (és így csoport, monoid, félcsoport, grupoid is).
- (c) Grupoid.
- (d) Félcsoport (és így grupoid is).
- (e) Monoid (és így félcsoport, grupoid is).
- (f) Abel-csoport (és így csoport, monoid, félcsoport, grupoid is).

**5.21. feladat.**

- (a) Test (és így gyűrű is).
- (b) Test (és így gyűrű is).
- (c) Test (és így gyűrű is).
- (d) Gyűrű, de nem test.
- (e) Nem is gyűrű.
- (f) Mindegyik gyűrű,  $\mathbb{Z}_2$ ,  $\mathbb{Z}_3$  és  $\mathbb{Z}_5$  még test is.
- (g) Gyűrű, de nem test.
- (h) Test (és így gyűrű is).
- (i) Gyűrű, de nem test.
- (j) Test (és így gyűrű is).
- (k) Gyűrű, de nem test.
- (l) Nem is gyűrű.

**5.22. feladat.**

- (a)  $\varphi: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$ , igaz  $\mapsto \bar{0}$ , hamis  $\mapsto \bar{1}$
- (b)  $\varphi: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$ , igaz  $\mapsto \bar{1}$ , hamis  $\mapsto \bar{0}$
- (c)  $\varphi: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$ ,  $1 \mapsto \bar{0}$ ,  $-1 \mapsto \bar{2}$ ,  $i \mapsto \bar{1}$ ,  $-i \mapsto \bar{3}$  (de jó az is, hogy  $1 \mapsto \bar{0}$ ,  $-1 \mapsto \bar{2}$ ,  $i \mapsto \bar{3}$ ,  $-i \mapsto \bar{1}$ )
- (d)  $\varphi: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$ ,  $1 \mapsto \bar{0}$ ,  $-1 \mapsto \bar{1}$
- (e)  $\varphi: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$ ,  $a \mapsto \bar{1}$ ,  $b \mapsto \bar{3}$ ,  $c \mapsto \bar{0}$ ,  $d \mapsto \bar{2}$

**5.23. feladat.**

- (a)  $\mathbb{A} \not\cong \mathbb{C}$  és  $\mathbb{A} \cong \mathbb{B}$  (a következő izomorfizmus mellett:  $\varphi: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$ , igaz  $\mapsto 1$ , hamis  $\mapsto 0$ ).
- (b)  $\mathbb{A} \not\cong \mathbb{C}$  és  $\mathbb{A} \cong \mathbb{B}$  (a következő izomorfizmus mellett:  $\varphi: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$ ,  $1 \mapsto 1$ ,  $2 \mapsto 2$ ,  $3 \mapsto 0$ ).
- (c)  $\mathbb{A} \not\cong \mathbb{B}$  és  $\mathbb{A} \cong \mathbb{C}$  (pl. a következő izomorfizmus mellett:  $\varphi: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\emptyset \mapsto 2$ ,  $\{1\} \mapsto 0$ ,  $\{2\} \mapsto 3$ ,  $\{1, 2\} \mapsto 1$ ).
- (d)  $\mathbb{A} \not\cong \mathbb{B}$  és  $\mathbb{A} \cong \mathbb{C}$  (a következő izomorfizmus mellett:  $\varphi: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{C}$ , igaz  $\mapsto 1$ , hamis  $\mapsto 0$ ).
- (e)  $\mathbb{A} \not\cong \mathbb{C}$  és  $\mathbb{A} \cong \mathbb{B}$  (a következő izomorfizmus mellett:  $\varphi: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$ ,  $-1 \mapsto 1$ ,  $0 \mapsto 2$ ,  $1 \mapsto 0$ ).
- (f)  $\mathbb{A} \not\cong \mathbb{C}$  és  $\mathbb{A} \cong \mathbb{B}$  (pl. a következő izomorfizmus mellett:  $\varphi: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$ ,  $\bar{1} \mapsto 0$ ,  $\bar{2} \mapsto 1$ ,  $\bar{3} \mapsto 3$ ,  $\bar{4} \mapsto 2$ ).

**5.24. feladat.**

- (a)  $[c, d] = \{a, b, c, d\}$
- (b)  $[a, b] = \{a, b\}$
- (c)  $[a] = \{a\}$
- (d)  $[a, d] = \{a, b, d\}$
- (e)  $[d] = \{a, b, d\}$

**5.25. feladat.**

- (a)  $[a] = \{a\}$
- (b)  $[b] = \{a, b, c\}$
- (c)  $[b, c] = \{a, b, c\}$
- (d)  $[a, d] = \{a, d\}$
- (e)  $[c, d] = \{a, b, c, d\}$

**5.26. feladat.**

- (a)  $[2, 9] = \{2, 4, 6, 8, 9, 10, \dots\} = \mathbb{N} \setminus \{1, 3, 5, 7\}$
- (b)  $[2, 5] = \{2, 4, 5, 6, \dots\} = \mathbb{N} \setminus \{1, 3\}$
- (c)  $[3, 5] = \{3, 5, 6, 8, 9, 10, \dots\} = \mathbb{N} \setminus \{1, 2, 4, 7\}$
- (d)  $[4, 10] = \{4, 8, 10, 12, \dots\} = \{2k : k \in \mathbb{N}\} \setminus \{2, 6\}$

**5.27. feladat.**

- (a)  $[2, 9] = \{2^k \cdot 3^{2\ell} : k, \ell \in \mathbb{N}_0, k + \ell \geq 1\}$
- (b)  $[2, 5] = \{2^k \cdot 5^\ell : k, \ell \in \mathbb{N}_0, k + \ell \geq 1\}$
- (c)  $[3, 5] = \{3^k \cdot 5^\ell : k, \ell \in \mathbb{N}_0, k + \ell \geq 1\}$
- (d)  $[4, 10] = \{2^k \cdot 5^\ell : k, \ell \in \mathbb{N}_0, k \geq \ell, k \equiv \ell \pmod{2}, k + \ell \geq 1\}$

**5.28. feladat.**

- (a) nem kompatibilis
- (b) kompatibilis
- (c) kompatibilis
- (d) nem kompatibilis
- (e) kompatibilis
- (f) nem kompatibilis
- (g) kompatibilis

**5.29. feladat.**

- (a) kompatibilis
- (b) kompatibilis
- (c) nem kompatibilis
- (d) kompatibilis
- (e) nem kompatibilis
- (f) kompatibilis
- (g) kompatibilis

**5.30. feladat.**

- (a) nem kompatibilis
- (b) kompatibilis

**5.31. feladat.**

- (a) nem kompatibilis
- (b) kompatibilis

**5.32. feladat.**

- (a) igen
- (b) igen
- (c) igen
- (d) nem
- (e) igen
- (f) igen
- (g) igen
- (h) nem
- (i) nem
- (j) igen
- (k) nem
- (l) igen
- (m) igen
- (n) igen
- (o) nem

## 6. CSOPORTOK

## 6.1. feladat.

- (a) nem
- (b) igen
- (c) nem
- (d) nem
- (e) igen
- (f) nem
- (g) nem
- (h) igen
- (i) igen
- (j) nem
- (k) nem
- (l) nem
- (m) igen
- (n) nem
- (o) igen
- (p) nem

## 6.2. feladat.

- (a)  $[B] = \mathbb{Z}$
- (b)  $[B] = \{a \in \mathbb{Z} : 2 \mid a\}$
- (c)  $[B] = \mathbb{Z}$
- (d)  $[B] = \mathbb{Z}$
- (e)  $[B] = \{a \in \mathbb{Z} : 5 \mid a\}$
- (f)  $[B] = \{a \in \mathbb{Z} : 3 \mid a\}$
- (g)  $[B] = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{8}, \overline{10}, \overline{12}\}$
- (h)  $[B] = \mathbb{Z}_{15}$
- (i)  $[B] = \{\overline{0}, \overline{5}, \overline{10}\}$
- (j)  $[B] = \mathbb{Z}_{16}$
- (k)  $[B] = \{\overline{0}, \overline{3}, \overline{6}, \overline{9}, \overline{12}, \overline{15}, \overline{18}\}$
- (l)  $[B] = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{8}, \overline{10}, \overline{12}\}$
- (m)  $[B] = \mathbb{Z}_{15}$
- (n)  $[B] = \{\overline{0}, \overline{5}, \overline{10}\}$
- (o)  $[B] = \mathbb{Z}_{16}$
- (p)  $[B] = \mathbb{Z}_{14}$
- (q)  $[B] = \{\overline{0}, \overline{3}, \overline{6}, \overline{9}, \overline{12}, \overline{15}, \overline{18}\}$
- (r)  $[B] = \{\frac{k}{6} : k \in \mathbb{Z}\}$
- (s)  $[B] = \{2^k 3^\ell : k, \ell \in \mathbb{Z}\}$
- (t)  $[B] = \mathbb{Z}[i] = \{a + bi : a, b \in \mathbb{Z}\}$  (Gauss-egészek)
- (u)  $[B] = E_4 = \{1, -1, i, -i\}$  (negyedik egységgyökök)
- (v)  $[B] = \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{4}\}$
- (w)  $[B] = \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}\} = \mathbb{Z}_7^*$
- (x)  $[B] = \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{8}\}$
- (y)  $[B] = \{\overline{1}, \overline{4}\}$
- (z)  $[B] = \{\overline{1}, \overline{8}, \overline{13}, \overline{20}\}$

## 6.3. feladat.

- (a)  $o(a) = 4$
- (b)  $o(a) = 10$
- (c)  $o(a) = 20$

- (d)  $o(a) = 5$
- (e)  $o(a) = 20$
- (f)  $o(a) = 21$
- (g)  $o(a) = 7$
- (h)  $o(a) = 3$
- (i)  $o(a) = 21$
- (j)  $o(a) = 7$
- (k)  $o(a) = 5$
- (l)  $o(a) = 30$
- (m)  $o(a) = 3$
- (n)  $o(a) = 10$
- (o)  $o(a) = 15$
- (p)  $o(a) = \infty$
- (q)  $o(a) = 2$
- (r)  $o(a) = \infty$
- (s)  $o(a) = \infty$
- (t)  $o(a) = \infty$
- (u)  $o(a) = 4$
- (v)  $o(a) = 3$
- (w)  $o(a) = 6$
- (x)  $o(a) = 4$
- (y)  $o(a) = 2$
- (z)  $o(a) = 3$