DISZKRÉT MATEMATIKA II (MBNXK112)

gyakorlófeladatok
(2021. április 28.)

1. Számelmélet (diofantoszi egyenletek és kongruenciák)

1.1. feladat. Határozzuk meg mindazon x egész számok halmazát, amelyekre teljesülnek az alábbi feltételek.

(a) $28 \mid 36x$
(b) $140 \mid x$ és $84 \mid x$
(c) $144 \mid 108x$
(d) $105 \mid 45x$
(e) $88 \mid x$ és $66 \mid x$
(f) $x \mid 112$ és $x \mid 84$
(g) $x \mid 126$ és $x \mid 54$
(h) $75 \mid x$ és $60 \mid x$
(i) $x \mid 132$ és $x \mid 99$

1.2. feladat. Melyik az a legkisebb pozitív egész, amelynek pontosan 12 darab pozitív osztója van?

1.3. feladat. Határozzuk meg euklideszi algoritmussal az alábbi a, b egész számok legnagyobb közös osztóját és fejezzük ki $\text{lnko}(a, b) = au + bv$ alakban (alkalmas u, v egész számokkal), majd adjuk meg a és b legkisebb közös többszörösét is.

(a) $a = 36$, $b = 28$
(b) $a = 78$, $b = 30$
(c) $a = 368$, $b = 161$
(d) $a = 539$, $b = 1001$
(e) $a = -1253$, $b = -3241$
(f) $a = -1183$, $b = 1573$

1.4. feladat. Melyek azok a z komplex számok, amelyekre $z^{100} = 1$ és $z^{76} = 1$ egyszerre teljesül?

1.5. feladat. Oldjuk meg az alábbi diofantoszi egyenleteket.

(a) $72x + 60y = 24$
(b) $78x + 30y = 12$
(c) $18x + 21y = 9$
(d) $21x + 36y = 12$
(e) $21x - 15y = 12$
(f) $6x - 10y = 22$
(g) $237x + 571y = 13$
(h) $197x + 418y = 17$
(i) $2021x + 1739y = 4750$

1.6. feladat. Határozzuk meg a következő halmazok elemszámát.

(a) $\{x \in \mathbb{Z} : (\exists y \in \mathbb{Z})(11x - 8y = 3)$ és $10 \leq x \leq 30\}$
(b) $\{x \in \mathbb{Z} : (\exists y \in \mathbb{Z})(7x - 3y = 13)$ és $10 \leq x \leq 30\}$
(c) $\{y \in \mathbb{Z} : (\exists x \in \mathbb{Z})(7x - 19y = 10)$ és $15 \leq y \leq 35)\}$
(d) $\{y \in \mathbb{Z} : (\exists x \in \mathbb{Z})(13x - 20y = 7)$ és $20 \leq y \leq 40)\}$

1.7. feladat. Kukutyinban 20 és 45 petákos érmék vannak forgalomban. Hogyan lehet ezekre felváltani 245 petákot? (Az összes megoldást adjuk meg.)

1.8. feladat. Hogyan lehet egy 21 és egy 25 literes edény segítségével kimérni 2 liter vizet?

1.9. feladat. Egy nyúl ugrál a számegyenesen a 0-ból indulva. Kétféle ugrásra képes, amelyek hossza a, illetve b egység.

(a) Ha $a = 36$ és $b = 28$, akkor az $1, 2, 3, 4$ számoknál lévő répák közül melyeket tudja megenni?
(b) Ha $a = 36$ és $b = 28$, akkor hogyan jut el a lehető legkevesebb ugrással 12-be?
(c) Ha $a = 26$ és $b = 38$, akkor hogyan tud eljutni a lehető legkevesebb ugrással 1000-be úgy, hogy mindig csak előre (jobbra) haladhat? És ha szabad visszafelé (balra) is ugrania?

1.10. feladat. Gombóc Artúrt születésnapja alkalmából Föld körüli útra fizették be a barátai, és az útra ellátták 15 láda csokoládéval. Minden ládában pont annyi csoki volt, ahány éves Gombóc Artúr. Naponta 54 csokoládét evett meg, így még egy hétig sem tartott ki az ellátmány, és az utolsó napra már csak 39 csoki maradt (mármint az utolsó olyan napra, amelyikre még jutott egyáltalán csoki). Hány éves Gombóc Artúr?

1.11. feladat. Háromféle bélyeget vásároltunk. Az első alkalommal az egyes fajtákból rendre 3, 5 és 7 darabot, a második alkalommal 11, 13 és 9 darabot. A számla első alkalommal 110 Ft, a második alkalommal 250 Ft volt. Milyen címletű bélyegeket vásároltunk?

1.12. feladat. Valaki a következőket mondta: „A barátnőm 22. születésnapjára 22 szál virágból álló csokrot vettem 2000 forintért. A csokor fréziából, nárciszból és rózsából állt, amelyekből egy szál 50 forintba, 70 forintba, illetve 130 forintba került" Hány szál virágot tartalmazott az egyes fajtákból a csokor, ha azt is tudjuk, hogy mindegyikből legalább két szál volt, és semelyik kettőből sem volt ugyanannyi?

1.13. feladat. Egy 5 m hosszú kerítés szegélyének elkészítéséhez 15 cm, 20 cm és 93 cm hosszúságú lécek állnak rendelkezésünkre. Az egyes lécfajták felszegeléséhez rendre 2, 3 és 9 szög kell. Mennyire van szükségünk a lécekből, ha 50 szegünk van, és ezeket mind fel is akarjuk használni?

1.14. feladat. Mennyi lehet m értéke, ha $187 \equiv 5 \pmod{m}$ és $311 \equiv 3 \pmod{m}$?

1.15. feladat. Számítsuk ki az alábbi hatványok maradékát a megadott modulus szerint.

(a) $699^{1001} \equiv ? \pmod{7}$

(b) $2^{102} \equiv ? \pmod{7}$

(c) $3^{201} \equiv ? \pmod{7}$

(d) $1992^{1991} \equiv ? \pmod{10}$

(e) $2616^{2021} \equiv ? \pmod{13}$

(f) $3423^{3423} \equiv ? \pmod{20}$

1.16. feladat. Bizonyítsuk be (kongruenciák segítségével), hogy

(a) $7 \mid 2^{n+2} + 3^{2n+1}$;

(b) $27 \mid 2^{5n+1} + 5^{n+2}$.

1.17. feladat. Oldjuk meg az alábbi kongruenciákat.

(a) $3x \equiv 4 \pmod{5}$

(b) $10x \equiv 26 \pmod{28}$

(c) $6x \equiv 4 \pmod{8}$

(d) $13x \equiv -3 \pmod{34}$

(e) $88x \equiv 42 \pmod{55}$

(f) $5x \equiv 24 \pmod{13}$

(g) $9x \equiv 15 \pmod{12}$

(h) $29x \equiv 17 \pmod{73}$

1.18. feladat. Egy nyúl ugrál egy szabályos 28 oldalú sokszög csúcsain. Mekkorákat ugorjon, hogy…

(a) a 10. ugrással a 26-os csúcsba jusson?

(b) a 12. ugrással a 26-os csúcsba jusson?

(c) a 16. ugrással a 20-as csúcsba jusson? (És hogy a 16. ugrással érkezzen *először* a 20-as csúcsba?)

1.19. feladat. Melyik az a 4-re végződő háromjegyű szám, amely 63-mal osztva 1-et ad maradékul?

1.20. feladat. Határozzuk meg azt a legkisebb háromjegyű természetes számot, amelynek 12-szerese 6-ot ad maradékul 30-cal osztva.

1.21. feladat. Oldjuk meg az alábbi lineáris kongruenciarendszereket.

(a) $\left.\begin{aligned} x &\equiv 1 \pmod{14} \\ x &\equiv 7 \pmod{10} \end{aligned}\right\}$

(b) $\left.\begin{aligned} x &\equiv 3 \pmod{2} \\ x &\equiv 6 \pmod{5} \end{aligned}\right\}$

(c) $\left.\begin{aligned} x &\equiv 3 \pmod{5} \\ x &\equiv 1 \pmod{6} \\ x &\equiv 7 \pmod{9} \end{aligned}\right\}$

(d) $\left.\begin{aligned} 3x &\equiv 1 \pmod{5} \\ 5x &\equiv 3 \pmod{7} \\ 13x &\equiv 4 \pmod{9} \end{aligned}\right\}$

(e) $\left.\begin{aligned} x &\equiv 7 \pmod{8} \\ x &\equiv 6 \pmod{7} \end{aligned}\right\}$

(f) $\left.\begin{aligned} 3x &\equiv 15 \pmod{24} \\ 4x &\equiv 11 \pmod{21} \end{aligned}\right\}$

(g) $\left.\begin{aligned} x &\equiv 5 \pmod{6} \\ x &\equiv 3 \pmod{10} \\ x &\equiv -2 \pmod{15} \end{aligned}\right\}$

(h) $\left.\begin{aligned} 2x &\equiv 1 \pmod{5} \\ 5x &\equiv -1 \pmod{6} \\ 4x &\equiv 11 \pmod{9} \end{aligned}\right\}$

(i) $\left.\begin{aligned} x &\equiv 3 \pmod{5} \\ x &\equiv 4 \pmod{7} \end{aligned}\right\}$

(j) $\left.\begin{aligned} 5x &\equiv 1 \pmod{6} \\ 7x &\equiv 9 \pmod{10} \end{aligned}\right\}$

(k) $\left.\begin{aligned} 10x &\equiv 16 \pmod{9} \\ 6x &\equiv 3 \pmod{21} \\ 3x &\equiv 2 \pmod{5} \end{aligned}\right\}$

(l) $\left.\begin{aligned} 2x &\equiv 18 \pmod{10} \\ 10x &\equiv 40 \pmod{12} \\ 15x &\equiv 9 \pmod{21} \end{aligned}\right\}$

1.22. feladat. Egy labdarúgó mérkőzésre azonos számú férőhellyel rendelkező buszokkal érkeznek a szurkolók, akiket biztonsági okokból kisebb csoportokban engednek be a stadionba. Először 4 busznyi szurkoló érkezett, és 5 fős csoportokban engedték be őket, így az utolsó csoportban csak 3 szurkoló maradt. Máskor 13 busszal érkeztek, és 8-as csoportokban nyertek bebocsátást, és ekkor szintén 3 szurkoló maradt az utoljára beengedett csoportban. Amikor pedig 16 busszal érkeztek szurkolók, és egyszerre 9-et léptettek be, akkor végül 5 szurkoló maradt. Hány személyesek a buszok, ha tudjuk, hogy egy buszba legfeljebb 100-an férnek, és a buszok minden esetben tele voltak?

1.23. feladat. Bizonyos megfigyelések szerint a varjak mindig azonos létszámú rajokban vándorolnak. Ha 11 varjúraj oly módon száll le egy fára, hogy a fa minden ágára 4 varjú kerül, akkor végül egy varjú egyedül marad. Ha 12 varjúraj száll le egy fa ágaira hetes csoportokban, akkor szintén egy varjú egyedül lesz egy ágon. Míg ha 13 varjúraj kilences csoportokban száll le egy fa ágaira, akkor az utolsó ágon 7 varjú lesz. Hány varjú van egy rajban, ha tudjuk, hogy ez a szám nem több, mint 100?

1.24. feladat. Oldjuk meg a kínai maradéktétel segítségével az alábbi paraméteres kongruenciarendszereket.

(a) $\left.\begin{aligned} x &\equiv c_1 \pmod{11} \\ x &\equiv c_2 \pmod{6} \end{aligned}\right\}$

(b) $\left.\begin{aligned} x &\equiv c_1 \pmod{10} \\ x &\equiv c_2 \pmod{7} \end{aligned}\right\}$

(c) $\left.\begin{aligned} x &\equiv c_1 \pmod{3} \\ x &\equiv c_2 \pmod{4} \\ x &\equiv c_3 \pmod{5} \end{aligned}\right\}$

2. Kombinatorika

2.1. feladat. Hányféleképpen helyezhetünk el nyolc embert három szobában, ha a szobák egy, kettő és öt személyesek?

2.2. feladat. Öt diák vizsgázik. Hányféle eredménye lehet a vizsgának, ha tudjuk, hogy egy diák sem bukott meg, és a vizsgaértékelés ötfokozatú?

2.3. feladat. Egy étteremben 4 munkatárs ebédel. Az étlapon 20 különböző étel van felsorolva. Hányféleképpen rendelhetnek, ha mindenki pontosan egy ételt rendel?

2.4. feladat. Egy bizottságnak 7 tagja van, elnököt és elnökhelyettest választanak. Hányféleképpen lehet ezt megtenni, ha a tagok egyike sem vállalhat egynél több feladatot?

2.5. feladat. Az ötös lottón 90 számból 5 számot húznak ki. Hányféle 3-találatos szelvény lehetséges egy héten? (Egy szelvényen 1-től 90-ig szerepelnek a számok, melyek közül a fogadó ötöt jelöl meg.)

2.6. feladat. Egy négytagú társaság a következőképpen akar feljutni egy tetőteraszra: ketten lifttel mennek egyszerre, ketten pedig egymás után mászva a villámhárítón jutnak fel. Hányféle sorrendben érkezhetnek meg a teraszra, ha feltesszük, hogy a lifttel utazó két személy egyszerre érkezik, de ezt leszámítva nincs egyidejű érkezés?

2.7. feladat. Az ajándékboltban ötféle mesekönyv, háromféle csokoládé és hatféle játék kapható. Hányféleképpen vásárolhat egy szülő gyermekének 4 különböző ajándékot úgy, hogy pontosan 2 mesekönyv legyen köztük?

2.8. feladat. Hányféle sorrendben haladhat át a forgóajtón egy 8 házaspárból álló társaság, ha a házastársak közvetlenül egymás után mennek?

2.9. feladat. Öt házaspár foglal helyet egy kerek asztalnál. Hányféleképpen helyezkedhetnek el, ha a házastársak egymás mellett akarnak ülni? (Két elhelyezkedést akkor és csak akkor tekintünk azonosnak, ha mindenkinek ugyanaz a bal, illetve jobb oldali szomszédja.)

2.10. feladat. Öt házaspár foglal helyet egy kör alakú asztalnál. Hányféleképpen helyezkedhetnek el, ha a házastársak egymás mellett akarnak ülni, de sem két férfi, sem két nő nem ülhet egymás mellé?

2.11. feladat. Hat óvodás és öt iskolás gyerek közül szeretnénk úgy kiválasztani négy gyereket, hogy legalább két óvodás legyen közöttük. Hányféleképpen tehetjük ezt meg?

2.12. feladat. Húsz láda áruból 15 láda első osztályú, a többi másodosztályú. Hányféleképpen választhatunk ki 5 ládát úgy, hogy legfeljebb 2 másodosztályú legyen köztük?

2.13. feladat. Egy csomag francia kártya 52 lapból áll, 4-féle színből 13-13 lapot tartalmaz.

(a) Hányféleképpen húzhatunk ki egy csomag francia kártyából négy olyan lapot, amelyek közül pontosan két lap színe egyezik meg?

(b) Hányféleképpen húzhatunk ki négy olyan lapot, amelyek között pontosan két szín fordul elő?

2.14. feladat. Van 2 sárga, 3 fehér és 1 lila golyónk. Hányféleképpen állíhatunk össze ezekből egy 5 golyóból álló sorozatot?

2.15. feladat. Egy boltban 6-féle CD-t lehet kapni. Hányféleképpen lehet 4 CD-t vásárolni, ha egyféle CD-ből többet is vehetünk?

2.16. feladat. Egy üzletben ötféle szaloncukrot lehet kapni: kókuszos, vajkaramellás, zselés, gumicukros és marcipános ízűt. Hányféleképpen lehet tíz szaloncukrot vásárolni, ha minden szaloncukorból van legalább tíz?

2.17. feladat. Hányféleképpen választhatunk 30 darabot 100, 200 és 500 forintos bankjegyekből, ha feltételezzük, hogy mindegyikből van legalább 30 darab?

2.18. feladat. Egy turistacsoport egy város 20 nevezetességét szeretné meglátogatni 4 nap alatt. Hányféleképpen tehetik ezt meg, ha 1 nap alatt akár az összes nevezetesség megtekinthető, és számít az, hogy egy adott napon milyen sorrendben tekintik meg a látnivalókat?

2.19. feladat. Összesen 15 különböző csomagot kell házhoz vitetnünk 3 kézbesítővel. Hányféleképpen osztható szét a munka, ha egy kézbesítő akár 15 csomagot is elbír, és számít a kézbesítési sorrend is?

2.20. feladat. Hányféleképpen helyezhetünk el 24 különböző könyvet egy 7-polcos szekrényben, ha bármelyik polcon elfér mind a 24 könyv?

2.21. feladat. Hányféleképpen lehet 5 (egyforma) fehér és 10 (egyforma) zöld golyót úgy sorbarendezni, hogy két fehér ne kerüljön egymás mellé?

2.22. feladat. Egy állatszelídítő 5 oroszlánt és 4 tigrist szeretne bevezetni egymás után a porondra úgy, hogy 2 tigris nem jöhet egymás után. Hányféleképpen teheti ezt meg? (Az állatszelídítő természetesen meg tudja különböztetni az állatait.)

2.23. feladat. Hány olyan (nem feltétlenül értelmes) szó képezhető a KARIKA szó betűiből, ahol 2 magánhangzó nem kerülhet egymás mellé?

2.24. feladat. Hányféle olyan „szó” képezhető a KOMBINATORIKA szó betűiből, melyben nem áll egymás mellett két

(a) mássalhangzó,
(b) magánhangzó?

2.25. feladat. Egy kutatóintézetben 67-en dolgoznak. Angolul 47-en, németül 35-en, franciául 20-an beszélnek, németül és angolul 23-an, angolul és franciául 12-en, németül és franciául 11-en, mindhárom nyelven 5-en beszélnek. Hányan vannak, akik egy nyelvet sem beszélnek?

2.26. feladat. Egy 50 fős osztályból 25-en járnak matematika, 19-en fizika és 30-an kémia szakkörre. 10-en járnak matematika és fizika, 12-en matematika és kémia, 16-an fizika és kémia szakkörre, valamint 8-an járnak mindhárom szakkörre. Hányan vannak, akik egyik szakkörre sem járnak?

2.27. feladat. Hányféleképpen ültetheti le Hófehérke a hét törpét egy padra úgy, hogy Tudor és Morgó ne üljön egymás mellett?

2.28. feladat. Az a, b, c, d, e, f, g betűk permutációi között hány olyan van, amelyben. . .

(a) az a, b, c betűk nem egymás mellett állnak (bármely kettő állhat egymás mellett, de mind a három már nem)?
(b) az a, b, c betűk közöl semelyik kettő nincs egymás mellett?

2.29. feladat. Hány olyan háromjegyű szám van, amely. . .

(a) nem osztható se 5-tel, se 7-tel?
(b) nem osztható se 2-vel, se 3-mal, se 5-tel?
(c) nem osztható se 4-gyel, se 5-tel, se 6-tal?
(d) nem osztható se 6-tal, se 7-tel, és 2-esre végződik?
(e) nem osztható se 6-tal, se 7-tel, és nem 2-esre végződik?

2.30. feladat. Hány olyan 8-karakteres jelszó létezik, amely kisbetűkből, számjegyekből és szimbólumokból áll, és mindháromból legalább egyet valóban tartalmaz is? (Kisbetűből 26, számjegyből 10, szimbólumból pedig 32 áll rendelkezésre.)

2.31. feladat. Határozzuk meg az $\{a, b, c, d, e, f\} \to \{1, 2, 3, 4\}$ leképezések számát. Hány szürjektív és hány injektív van ezek között?

2.32. feladat. Határozzuk meg az $\{1, 2, 3, 4\} \to \{a, b, c, d, e, f\}$ leképezések számát. Hány szürjektív és hány injektív van ezek között?

2.33. feladat. Hányféleképpen festhetünk ki n szobát 2-féle színnel, ha minden színt legalább egyszer felhasználunk?

2.34. feladat. Hányféleképpen festhetünk ki n szobát 3-féle színnel, ha minden színt legalább egyszer felhasználunk?

2.35. feladat. Mi a $\left(3x^2 + \frac{2}{x}\right)^6$ kifejezésben a konstans tag a hatványozás elvégzése és a rendezés után?

2.36. feladat. Számítsuk ki az alábbi tagok együtthatóját a $\left(3x^3 + \frac{2}{x^2}\right)^5$ hatvány kifejtésében.

(a) x^{-5}
(b) x^0
(c) x^3
(d) x^5

2.37. feladat. Számítsuk ki az alábbi tagok együtthatóját a $(1 + x^3 - x^4)^{12}$ hatvány kifejtésében.

(a) x^{18}
(b) x^{19}
(c) x^{31}

2.38. feladat. Számítsuk ki az alábbi tagok együtthatóját a $\left(2x^2 - x + \frac{1}{x}\right)^{12}$ hatvány kifejtésében.

(a) x^0
(b) x^1
(c) x^2
(d) x^{-1}

3. Számelmélet (maradékosztályok, hatványozás modulo m)

3.1. feladat. Teljes maradékrendszert alkotnak-e az alábbi számhalmazok a megadott modulus szerint?

(a) $1000, 2000, 3000, 4000, 5000, 6000, 7000$ modulo 7

(b) $10, -1, 25, -13, 28, 38, 12$ modulo 7

(c) $11, 22, 33, \ldots, 154$ modulo 14

(d) $11, 21, 31, \ldots, 911$ modulo 91

(e) $2, 8, 14, \ldots, 302$ modulo 51

(f) $4, 9, 14, \ldots, 239$ modulo 49

(g) $3, 18, 33, \ldots, 678$ modulo 46

3.2. feladat. Végezzük el $\mathbb{Z}_m$-ben a számításokat. A végeredmény $\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{m-1}$ valamelyike legyen.

(a) $\overline{8} + \overline{10}, \overline{8} - \overline{10}, \overline{8} \cdot \overline{10} \in \mathbb{Z}_{15}$

(b) $\overline{10} + \overline{15}, \overline{10} - \overline{15}, \overline{10} \cdot \overline{15} \in \mathbb{Z}_{18}$

(c) $\overline{10} + \overline{15}, \overline{10} - \overline{15}, \overline{10} \cdot \overline{15} \in \mathbb{Z}_{21}$

(d) $\overline{17} + \overline{15}, \overline{9} - \overline{15}, \overline{6} \cdot \overline{7} \in \mathbb{Z}_{21}$

(e) $\overline{23} + \overline{25}, \overline{0} - \overline{21}, \overline{9} \cdot \overline{12} \in \mathbb{Z}_{33}$

3.3. feladat. Oldjuk meg $\mathbb{Z}_m$-ben az alábbi egyenleteket (az összes megoldást keressük meg!)

(a) $\overline{10} \cdot \overline{x} = \overline{8}$ $\quad\mathbb{Z}_{15}$-ben

(b) $\overline{9} \cdot \overline{x} = \overline{6}$ $\quad\mathbb{Z}_{15}$-ben

(c) $\overline{7} \cdot \overline{x} = \overline{6}$ $\quad\mathbb{Z}_{15}$-ben

(d) $\overline{3} \cdot \overline{x} = \overline{4}$ $\quad\mathbb{Z}_{5}$-ben

(e) $\overline{10} \cdot \overline{x} = \overline{26}$ $\quad\mathbb{Z}_{28}$-ban

(f) $\overline{6} \cdot \overline{x} = \overline{4}$ $\quad\mathbb{Z}_{8}$-ban

(g) $\overline{88} \cdot \overline{x} = \overline{42}$ $\quad\mathbb{Z}_{55}$-ben

(h) $\overline{5} \cdot \overline{x} = \overline{24}$ $\quad\mathbb{Z}_{13}$-ban

(i) $\overline{9} \cdot \overline{x} = \overline{15}$ $\quad\mathbb{Z}_{12}$-ben

3.4. feladat. Határozzuk meg a megadott maradékosztály multiplikatív inverzét.

(a) $\overline{3}^{-1} \in \mathbb{Z}_5$

(b) $\overline{88}^{-1} \in \mathbb{Z}_{55}$

(c) $\overline{5}^{-1} \in \mathbb{Z}_{13}$

(d) $\overline{9}^{-1} \in \mathbb{Z}_{12}$

(e) $\overline{5}^{-1} \in \mathbb{Z}_{14}$

(f) $\overline{29}^{-1} \in \mathbb{Z}_{73}$

3.5. feladat. Soroljuk fel $\mathbb{Z}_m^*$ elemeit, és állítsuk az elemeket párba az inverzükkel.

(a) $m = 15$

(b) $m = 7$

(c) $m = 8$

(d) $m = 9$

(e) $m = 10$

(f) $m = 11$

3.6. feladat. Határozzuk meg a megadott maradékosztály rendjét és számítsuk ki a hatványait.

(a) $\mathbb{Z}_7$-ben $o(\overline{2}) =?$ $\overline{2}^{102} =?$ $\overline{2}^{2021} =?$

(b) $\mathbb{Z}_7$-ben $o(\overline{3}) =?$ $\overline{3}^{201} =?$ $\overline{3}^{2021} =?$

(c) $\mathbb{Z}_{10}$-ben $o(\overline{2}) =?$ $\overline{2}^{402} =?$ $\overline{2}^{2021} =?$

(d) $\mathbb{Z}_{10}$-ben $o(\overline{3}) =?$ $\overline{3}^{402} =?$ $\overline{3}^{2021} =?$

(e) $\mathbb{Z}_{15}$-ben $o(\overline{13}) =?$ $\overline{13}^{153} =?$ $\overline{13}^{2023} =?$

(f) $\mathbb{Z}_{25}$-ben $o(\overline{21}) =?$ $\overline{21}^{153} =?$ $\overline{21}^{2024} =?$

3.7. feladat. Számítsuk ki az Euler-féle φ függvény alábbi értékeit.

(a) $\varphi(20) = ?$

(b) $\varphi(30) = ?$

(c) $\varphi(60) = ?$

(d) $\varphi(75) = ?$

(e) $\varphi(88) = ?$

(f) $\varphi(128) = ?$

(g) $\varphi(7!) = ?$

3.8. feladat. Oldjuk meg az egyenletet a természetes számok halmazán.

(a) $\varphi(x) = 4$

(b) $\varphi(x) = 5$

(c) $\varphi(x) = 6$

(d) $2\varphi(x) = x$

(e) $\varphi(x) = x - 8$

(f) $\varphi(x) = x - 10$

(g) $\varphi(x^2) = 2x$

(h) $\varphi(x^2) = x\varphi(x)$

3.9. feladat. Határozzuk meg a hatvány maradékát a megadott modulus szerint.

(a) $3^{65} \equiv ? \pmod{128}$

(b) $19^{81} \equiv ? \pmod{75}$

(c) $63^{42} \equiv ? \pmod{50}$

(d) $42^{62} \equiv ? \pmod{25}$

(e) $111^{50} \equiv ? \pmod{52}$

3.10. feladat. Határozzuk meg a hatvány maradékát a megadott modulus szerint.

(a) $15^{159} \equiv ? \pmod{34}$

(b) $20^{449} \equiv ? \pmod{31}$

(c) $6^{418} \equiv ? \pmod{29}$

(d) $3^{298} \equiv ? \pmod{25}$

(e) $557^{517} \equiv ? \pmod{53}$

3.11. feladat. Mi az utolsó két számjegye az 1997^{1998} számnak?

3.12. feladat. Milyen nap lesz $\underbrace{11\ldots11}_{99}$ nap múlva?

3.13. feladat. Határozzuk meg a hatványok maradékát a megadott modulus szerint. (Az emeletes hatványokat $a^{(b^c)}$ zárójelezéssel értelmezzük.)

(a) $13^{321^{50}} \equiv ? \pmod{87}$

(b) $91^{441^{222}} \equiv ? \pmod{88}$

(c) $80^{111^{50}} \equiv ? \pmod{53}$

(d) $95^{81^{99}} \equiv ? \pmod{46}$

3.14. feladat. Milyen nap lesz $711^{185^{937}}$ nap múlva?

3.15. feladat. Mit ad maradékul *googolplex* 21-gyel osztva?

4.1. feladat. Lehetséges-e, hogy egy...

(a) 5-tagú társaságban mindenkinek pontosan 3 ismerőse van?

(b) 6-tagú társaságban mindenkinek pontosan 4 ismerőse van?

4.2. feladat. Van-e olyan egyszerű gráf, amelyben a csúcsok fokszámai az alábbiak? Ha van, rajzoljunk egy ilyen gráfot, sőt, próbáljuk megadni izomorfia erejéig az összes ilyen gráfot.

(a) $1, 2, 2, 2, 3$

(b) $3, 3, 4, 4, x$ (Milyen szám kerüljön x helyére?)

(c) $2, 2, 2, 2, 4, 4$

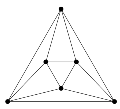
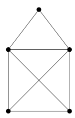
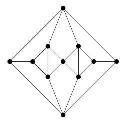
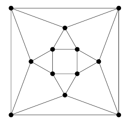
(d) $0, 2, 2, 4, 4, 4$

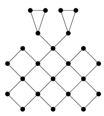
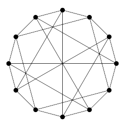
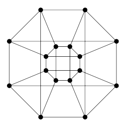
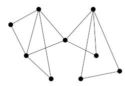
(e) $1, 1, 2, 2, 3, 3$

(f) $2, 2, 3, 3, 5, 5$

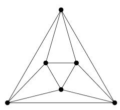
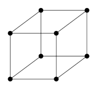
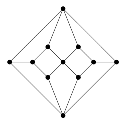
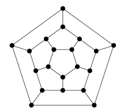
(g) $1, 2, 2, 2, 4, 5, 7, 7$

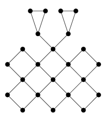
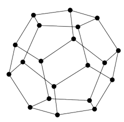
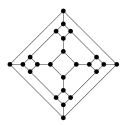
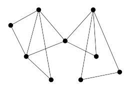
4.3. feladat. Keressünk (zárt vagy nyílt) Euler-vonalat az alábbi gráfokban. A gráfok nagyobb méretben és interaktív formában megtalálhatóak itt:
http://www.math.u-szeged.hu/~twaldha/tanitas/dimat2_2021tavasz/grafok/grafjatek-euler.html

(a) 
(c) 
(e) 
(g) 

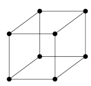
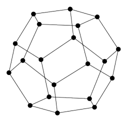
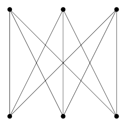
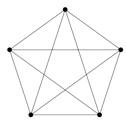
(b) 
(d) 
(f) 
(h) 

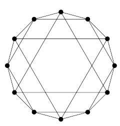
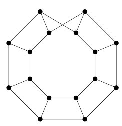
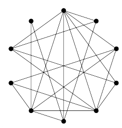
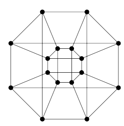
4.4. feladat. Keressünk Hamilton-utat és Hamilton-kört az alábbi gráfokban. A gráfok nagyobb méretben és interaktív formában megtalálhatóak itt:
http://www.math.u-szeged.hu/~twaldha/tanitas/dimat2_2021tavasz/grafok/grafjatek-hamilton.html

(a) 
(c) 
(e) 
(g) 

(b) 
(d) 
(f) 
(h) 

4.5. feladat. Síkgráfok-e alábbi gráfok? (Amelyik igen, azt rajzoljuk le metszéspontok nélkül; amelyik nem, abban keressük meg $K_{3,3}$ vagy K_5 egy felosztását.) A gráfok nagyobb méretben és interaktív formában megtalálhatóak itt:
http://www.math.u-szeged.hu/~twaldha/tanitas/dimat2_2021tavasz/grafok/grafjatek-sik.html

(a) 
(c) 
(e) 
(g) 

(b) 
(d) 
(f) 
(h) 

4.6. feladat. Izomorfia erejéig...

(a) hány 3-csúcsú fa van?

(b) hány 4-csúcsú fa van?

(c) hány 5-csúcsú fa van?

(d) hány 6-csúcsú fa van?

(e) hány 3-élű fa van?

(f) hány 4-élű fa van?

(g) hány 5-élű fa van?

(h) hány 6-élű fa van?

(i) hány 3-csúcsú erdő van?

(j) hány 4-csúcsú erdő van?

4.7. feladat. Egy 20 pontú fának 18 darab elsőfokú pontja van.

(a) Mennyi lehet a további két csúcs fokszáma?

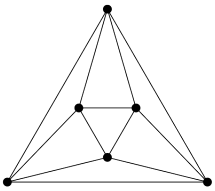
(b) Milyen hosszú lehet a leghosszabb útja?

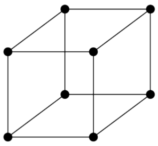
(c) Hány ilyen fa van izomorfia erejéig?

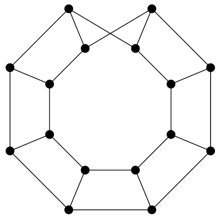
4.8. feladat. Egy erdő 5 fájában összesen 16 él van. Hány csúcsa van az erdőnek?

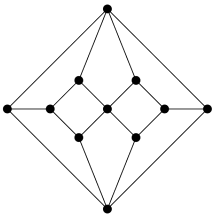
4.9. feladat. Hány fából állhat egy olyan erdő, aminek 10 csúcsa és 7 éle van?

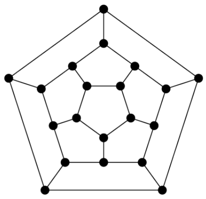
4.10. feladat. Párosak-e alábbi gráfok? (Amelyik igen, azt színezzük ki két színnel; amelyik nem, abban keressünk páratlan hosszúságú kört). A gráfok nagyobb méretben és interaktív formában megtalálhatóak itt:
http://www.math.u-szeged.hu/~twaldha/tanitas/dimat2_2021tavasz/grafok/grafjatek-paros.html

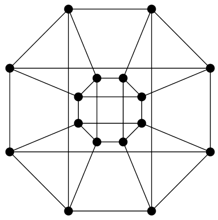
(a) 

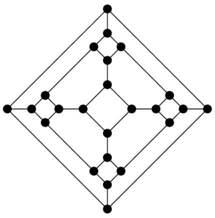
(b) 

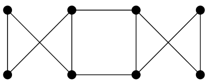
(c) 

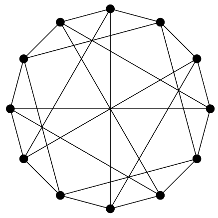
(d) 

(e) 

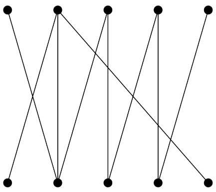
(f) 

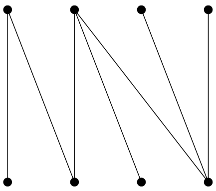
(g) 

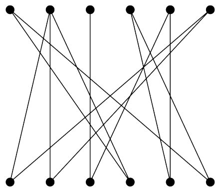
(h) 

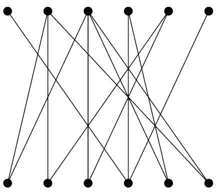
(i) 

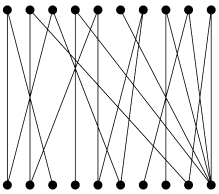
4.11. feladat. Keressünk (a magyar módszerrel) maximális elemszámú párosítást az alábbi gráfokban. Igazoljuk a párosítás optimális voltát egy megfelelő lefogó csúcshalmaz megadásával. A gráfok nagyobb méretben és interaktív formában megtalálhatóak itt:
http://www.math.u-szeged.hu/~twaldha/tanitas/dimat2_2021tavasz/grafok/grafjatek-parositas.html

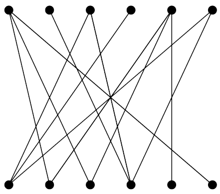
(a) 

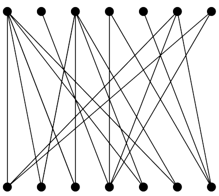
(b) 

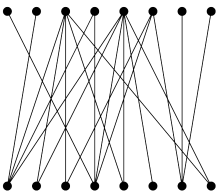
(c) 

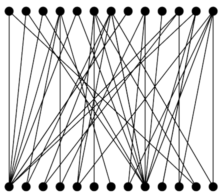
(d) 

(e) 

(f) 

(g) 

(h) 

(i) 

5. Absztrakt algebra

Az 5.1–5.16. feladatok (megoldásai) interaktív formában megtalálhatóak itt:
http://www.math.u-szeged.hu/~twaldha/tanitas/regi/dimat2_2020tavasz/algebra/algebra1-muveletek.html

5.1. feladat. Művelet-e...

(a) az összeadás a hárommal osztható egész számok halmazán?
(b) az összeadás a hárommal nem osztható egész számok halmazán?
(c) az osztás a pozitív egész számok halmazán?
(d) az összeadás az $\{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}^+\}$ halmazon?
(e) $x * y = \sqrt{xy}$ a valós számok halmazán?
(f) $x * y = \sqrt{xy}$ a komplex számok halmazán?
(g) a metszés az $\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}\}$ halmazon?

5.2. feladat. Művelet-e...

(a) a szorzás a hárommal osztható egész számok halmazán?
(b) a szorzás a hárommal nem osztható egész számok halmazán?
(c) az összeadás a $[0, 1]$ intervallumon?
(d) a szorzás a $[0, 1]$ intervallumon?
(e) a szorzás az $\{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}^+\}$ halmazon?
(f) az egyesítés az $\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}\}$ halmazon?

5.3. feladat. Vizsgáljuk meg a tanult műveleti tulajdonságok (kommutativitás, asszociativitás, zéruselem, egységelem, inverzek, kancellativitás) szempontjából az $A = \{a, b, c, d\}$ halmazon az alábbi táblázattal definiált $*$ műveletet.

$*$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	c	d
c	c	c	c	c
d	d	d	c	c

5.4. feladat. Vizsgáljuk meg a tanult műveleti tulajdonságok szempontjából az $A = \{a, b, c, d\}$ halmazon az alábbi táblázattal definiált $\circ$ műveletet.

$\circ$	a	b	c	d
a	c	a	b	b
b	a	b	c	d
c	b	c	b	a
d	b	d	c	a

5.5. feladat. Írjuk fel a $\mathbb{Z}_5$ halmazon a szorzás művelettáblázatát, és vizsgáljuk meg a tanult műveleti tulajdonságok szempontjából.

5.6. feladat. Írjuk fel a $\mathcal{P}(\{u, v\})$ halmazon az egyesítés művelettáblázatát, és vizsgáljuk meg a tanult műveleti tulajdonságok szempontjából.

5.7. feladat. Írjuk fel az $\{1, -1, i, -i\}$ halmazon a szorzás művelettáblázatát, és vizsgáljuk meg a tanult műveleti tulajdonságok szempontjából.

5.8. feladat. Írjuk fel az $\{\texttt{igaz}, \texttt{hamis}\}$ halmazon az implikáció művelettáblázatát, és vizsgáljuk meg a tanult műveleti tulajdonságok szempontjából.

5.9. feladat. Írjuk fel az $\{1, 2, 3\}$ halmazon az $x \sqcap y = \min\{x, y\}$ művelet művelettáblázatát, és vizsgáljuk meg a tanult műveleti tulajdonságok szempontjából.

5.10. feladat. Vizsgáljuk meg a tanult műveleti tulajdonságok szempontjából az $A = \{u, v, w\}$ halmazon az alábbi táblázattal definiált $\diamond$ műveletet.

$\diamond$	u	v	w
u	v	w	u
v	w	u	v
w	u	v	w

5.11. feladat. Vizsgáljuk meg a tanult műveleti tulajdonságok szempontjából az egész számok halmazán értelmezett $a \bullet b = a + b + 23$ műveletet.

5.12. feladat. Vizsgáljuk meg a tanult műveleti tulajdonságok szempontjából az egész számok halmazán értelmezett $a \otimes b = b + 2$ műveletet.

5.13. feladat. Vizsgáljuk meg a tanult műveleti tulajdonságok szempontjából a valós számok halmazán értelmezett $a \star b = 12 - 3a - 3b + a \cdot b$ műveletet.

5.14. feladat. Vizsgáljuk meg a tanult műveleti tulajdonságok szempontjából az egész számok halmazán értelmezett $a \oplus b = a$ műveletet.

5.15. feladat. Vizsgáljuk meg a tanult műveleti tulajdonságok szempontjából a komplex számok halmazán a kivonás műveletét.

5.16. feladat. Vizsgáljuk meg a tanult műveleti tulajdonságok szempontjából a valós számok halmazán értelmezett $a \triangle b = ab - 2(a + b) + 6$ műveletet.

Az 5.16. feladat Kunos Ádám által készített megoldása megtalálható itt:
https://drive.google.com/file/d/1gU3u1W4bYRUMnVMmoHkA0v6uncspgyEQ/view

Az 5.17–5.20. feladatok (megoldásai) interaktív formában megtalálhatóak itt:
http://www.math.u-szeged.hu/~twaldha/tanitas/regi/dimat2_2020tavasz/algebra/algebra2-strukturak.html

5.17. feladat. Milyen algebrai struktúrák az alábbiak?

(a) $(\mathbb{N}; +)$
(b) $(\mathbb{Z}; +)$
(c) $(\mathbb{Z}; \cdot)$
(d) $(\mathbb{Z} \setminus \{0\}; \cdot)$
(e) $(\mathbb{Z}_5; +)$
(f) $(\mathbb{Z}_5; \cdot)$
(g) $(\mathbb{Z}_5 \setminus \{\overline{0}\}; \cdot)$
(h) $(\mathbb{Z}_5 \setminus \{\overline{0}\}; +)$
(i) $(\mathbb{R}^{2\times 2}; +)$
(j) $(\mathbb{R}^{2\times 2}; \cdot)$
(k) $(\mathbb{R}^{2\times 2} \setminus \{\mathbf{0}\}; \cdot)$
(l) $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) := (\{A \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid \det(A) \neq 0\}; \cdot)$

5.18. feladat. Milyen algebrai struktúrák az alábbiak?

(a) $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}; +)$
(b) $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}; \cdot)$
(c) $(\mathbb{Q}^+; +)$
(d) $(\mathbb{Q}^+; \cdot)$
(e) $(\mathbb{Z}^-; +)$
(f) $(\mathbb{Z}_6 \setminus \{\overline{0}\}; \cdot)$
(g) $(\mathbb{N}; \cdot)$

5.19. feladat. Milyen algebrai struktúrák az alábbiak?

(a) $(\{u, v, w\}; \diamond)$

$\diamond$	u	v	w
u	v	w	u
v	w	u	v
w	u	v	w

(b) $(\{a, b, c, d\}; \circ)$

$\circ$	a	b	c	d
a	c	a	b	b
b	a	b	c	d
c	b	c	b	a
d	b	d	c	a

(c) $(\{a, b, c, d\}; *)$

$*$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	c	d
c	c	c	c	c
d	d	d	c	c

(d) $(\mathcal{P}(\{u, v\}); \cup)$
(e) $(\{\texttt{igaz}, \texttt{hamis}\}; \rightarrow)$
(f) $(\{1, -1, i, -i\}; \cdot)$

5.20. feladat.

(a) Milyen algebrai struktúra $(\mathbb{Z}; \diamond)$, ahol $a \diamond b = a - b$?
(b) Milyen algebrai struktúra $(\mathbb{Z}; \bullet)$, ahol $a \bullet b = a + b + 23$?
(c) Milyen algebrai struktúra $(\mathbb{Z}; \otimes)$, ahol $a \otimes b = b + 2$?
(d) Milyen algebrai struktúra $(\mathbb{Z}; \oplus)$, ahol $a \oplus b = a$?
(e) Milyen algebrai struktúra $(\mathbb{Q}; \star)$, ahol $a \star b = 12 - 3a - 3b + a \cdot b$?
(f) Milyen algebrai struktúra $(\mathbb{Q} \setminus \{3\}; \star)$, ahol $a \star b = 12 - 3a - 3b + a \cdot b$?

5.21. feladat. Gyűrűt, illetve testet alkotnak-e az alábbi halmazok a szokásos összeadással és szorzással?

(a) $\mathbb{C}$
(b) $\mathbb{R}$
(c) $\mathbb{Q}$
(d) $\mathbb{Z}$
(e) $\mathbb{N}$
(f) $\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_4$, $\mathbb{Z}_5$, $\mathbb{Z}_6$
(g) $\mathbb{Z}_{10}$
(h) $\mathbb{Z}_{11}$
(i) $\mathbb{Z}_{12}$
(j) $\mathbb{Z}_{13}$
(k) $\mathbb{R}^{2\times 2}$
(l) $\mathbb{R}^{2\times 3}$

Az 5.22., 5.23., 5.28., 5.29. feladatok műblettáblázatai interaktív formában megtalálhatóak ebben a „színezőben”:
http://www.math.u-szeged.hu/~twaldha/tanitas/dimat2_2021tavasz/szinezo.html

5.22. feladat. Adjunk meg izomorfizmust az $\mathbb{A}$ és $\mathbb{B}$ grupoidok között.

(a) $\mathbb{A} = (\{\texttt{igaz}, \texttt{hamis}\}; \leftrightarrow)$, $\mathbb{B} = (\mathbb{Z}_2; +)$
(b) $\mathbb{A} = (\{\texttt{igaz}, \texttt{hamis}\}; \wedge)$, $\mathbb{B} = (\mathbb{Z}_2; \cdot)$
(c) $\mathbb{A} = (\{1, -1, i, -i\}; \cdot)$, $\mathbb{B} = (\mathbb{Z}_4; +)$
(d) $\mathbb{A} = (\{-1, 1\}; \cdot)$, $\mathbb{B} = (\mathbb{Z}_2; +)$
(e) $\mathbb{A} = (\{a, b, c, d\}; *)$, $\mathbb{B} = (\mathbb{Z}_4; \cdot)$

$*$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	c	d
c	c	c	c	c
d	d	d	c	c

5.23. feladat. Izomorf-e az $\mathbb{A}$ grupoid $\mathbb{B}$ és $\mathbb{C}$ közül valamelyikkel? Ha igen, akkor adjunk meg egy izomorfizmust; ha nem, akkor indokoljuk meg, hogy miért nem.

(a) $\mathbb{A} = (\{\texttt{igaz}, \texttt{hamis}\}; \rightarrow)$, $\mathbb{B} = (\{0, 1\}; \circ)$ $\mathbb{C} = (\{0, 1\}; *)$

$\circ$	0	1
0	1	1
1	0	1

$*$	0	1
0	0	0
1	0	1

(b) $\mathbb{A} = (\{1, 2, 3\}; \min)$, $\mathbb{B} = (\{0, 1, 2\}; \oplus)$, $\mathbb{C} = (\{0, 1, 2\}; *)$

$\oplus$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	1	1
2	2	1	2

$*$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	0

(c) $\mathbb{A} = (\mathcal{P}(\{1, 2\}); \cup)$, $\mathbb{B} = (\{0, 1, 2, 3\}; \oplus)$, $\mathbb{C} = (\{0, 1, 2, 3\}; *)$

$\oplus$	0	1	2	3
0	0	1	3	1
1	1	1	1	1
2	3	1	2	0
3	1	1	0	3

$*$	0	1	2	3
0	0	1	0	1
1	1	1	1	1
2	0	1	2	3
3	1	1	3	3

(d) $\mathbb{A} = (\{\texttt{igaz}, \texttt{hamis}\}; \vee)$, $\mathbb{B} = (\{0, 1\}; \diamond)$, $\mathbb{C} = (\{0, 1\}; \otimes)$

$\diamond$	0	1
0	1	0
1	0	0

$\otimes$	0	1
0	0	1
1	1	1

(e) $\mathbb{A} = (\{-1, 0, 1\}; \cdot)$, $\mathbb{B} = (\{0, 1, 2\}; \otimes)$, $\mathbb{C} = (\{0, 1, 2\}; \circ)$

$\otimes$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	0	2
2	2	2	2

$\circ$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	0

(f) $\mathbb{A} = (\mathbb{Z}_5^*; \cdot)$, $\mathbb{B} = (\{0, 1, 2, 3\}; \diamond)$, $\mathbb{C} = (\{0, 1, 2\}; \oplus)$

$\diamond$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

$\oplus$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	0	3	2
2	2	3	0	1
3	3	2	1	0

5.24. feladat. Határozzuk meg az $(\{a, b, c, d\}; *)$ grupoidban az alábbi részgrupoidokat.

(a) $[c, d] = ?$
(b) $[a, b] = ?$
(c) $[a] = ?$
(d) $[a, d] = ?$
(e) $[d] = ?$

$*$	a	b	c	d
a	a	b	c	b
b	b	b	b	b
c	c	b	c	a
d	d	b	b	a

5.25. feladat. Határozzuk meg az $(\{a,b,c,d\};*)$ grupoidban az alábbi részgrupoidokat.

(a) $[a]=?$
(b) $[b]=?$
(c) $[b,c]=?$
(d) $[a,d]=?$
(e) $[c,d]=?$

$*$	a	b	c	d
a	a	c	b	d
b	b	c	b	a
c	c	a	c	a
d	d	c	a	d

5.26. feladat. Határozzuk meg az $(\mathbb{N};+)$ félcsoportban az alábbi részfélcsoportokat.

(a) $[2,9]=?$ (b) $[2,5]=?$ (c) $[3,5]=?$ (d) $[4,10]=?$

5.27. feladat. Határozzuk meg az $(\mathbb{N};\cdot)$ félcsoportban az alábbi részfélcsoportokat.

(a) $[2,9]=?$ (b) $[2,5]=?$ (c) $[3,5]=?$ (d) $[4,10]=?$

5.28. feladat. Kompatibilis osztályozása-e $\mathcal{C}$ az alábbi grupoidnak? Ha igen, írjuk fel a hozzá tartozó faktoralgebra művelettáblázatát.

(a) $\mathcal{C}=\big\{\{a,b\},\ \{c,d\},\ \{e\}\big\}$
(b) $\mathcal{C}=\big\{\{a\},\ \{b,c,d,e\}\big\}$
(c) $\mathcal{C}=\big\{\{a,c\},\ \{b,e\},\ \{d\}\big\}$
(d) $\mathcal{C}=\big\{\{a,b,c,e\},\ \{d\}\big\}$
(e) $\mathcal{C}=\big\{\{a\},\ \{b\},\ \{c,d,e\}\big\}$
(f) $\mathcal{C}=\big\{\{a,c,d,e\},\ \{b\}\big\}$
(g) $\mathcal{C}=\big\{\{a\},\ \{b,e\},\ \{c\},\ \{d\}\big\}$

$*$	a	b	c	d	e
a	c	b	c	c	e
b	a	c	c	e	c
c	a	e	c	c	e
d	a	d	c	d	d
e	a	c	c	e	c

5.29. feladat. Kompatibilis osztályozása-e $\mathcal{C}$ az alábbi grupoidnak? Ha igen, írjuk fel a hozzá tartozó faktoralgebra művelettáblázatát.

(a) $\mathcal{C}=\big\{\{a,c\},\ \{b\},\ \{d\}\big\}$
(b) $\mathcal{C}=\big\{\{a,c\},\ \{b,d\}\big\}$
(c) $\mathcal{C}=\big\{\{a,b\},\ \{c\},\ \{d\}\big\}$
(d) $\mathcal{C}=\big\{\{a\},\ \{c\},\ \{b,d\}\big\}$
(e) $\mathcal{C}=\big\{\{a\},\ \{b,c,d\}\big\}$
(f) $\mathcal{C}=\big\{\{a,b,c,d\}\big\}$
(g) $\mathcal{C}=\big\{\{a\},\ \{b\},\ \{c\},\ \{d\}\big\}$

$*$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	c	d	a	b
c	a	b	c	d
d	c	d	a	b

5.30. feladat. Definiáljuk a valós számok halmazán a $\sim$ relációt a következőképpen: $a \sim b \iff \operatorname{sgn} a = \operatorname{sgn} b$. Kongruenciája-e $\sim$ a reláció az alábbi grupoidoknak? Ha igen, írjuk fel a megfelelő faktorgrupoid művelettáblázatát.

(a) $(\mathbb{R};+)$
(b) $(\mathbb{R};\cdot)$

5.31. feladat. Tekintsük a természetes számok halmazán a következő osztályozást:

$$\mathcal{C}=\big\{\{\text{hárommal osztható számok}\},\{\text{hárommal nem osztható számok}\}\big\}.$$

Kompatibilis osztályozása-e $\mathcal{C}$ az alábbi grupoidoknak? Ha igen, írjuk fel a megfelelő faktorgrupoid művelettáblázatát.

(a) $(\mathbb{N};+)$
(b) $(\mathbb{N};\cdot)$

5.32. feladat. Homomorfizmusok-e az alábbi leképezések?

(a) $\varphi\colon (\mathbb{R}^+;\cdot) \to (\mathbb{R};+),\ x \mapsto \log x$
(b) $\varphi\colon (\mathbb{C};+,\cdot) \to (\mathbb{C};+,\cdot),\ z \mapsto \overline{z}$
(c) $\varphi\colon (\mathbb{C};+) \to (\mathbb{R};+),\ z \mapsto \operatorname{Re} z$
(d) $\varphi\colon (\mathbb{C};\cdot) \to (\mathbb{R};\cdot),\ z \mapsto \operatorname{Re} z$
(e) $\varphi\colon (\mathbb{R}^{n\times n};\cdot) \to (\mathbb{R};\cdot),\ M \mapsto \det M$
(f) $\varphi\colon (C[0,1];+) \to (\mathbb{R};+),\ f \mapsto \int\limits_0^1 f(x)dx$
(g) $\varphi\colon (\mathbb{R};*) \to (\mathbb{R}^+;\circ), x \mapsto 3^x$,
ahol $x*y=\frac{x+y}{2}$ és $x\circ y=\sqrt{xy}$
(h) $\varphi\colon (\mathbb{Z};+,\cdot) \to (\mathbb{Z};+,\cdot), x \mapsto 2x$
(i) $\varphi\colon (\mathbb{R}^+;+,\cdot) \to (\mathbb{R}^+;+,\cdot), x \mapsto 1/x$
(j) $\varphi\colon (\mathbb{Z}_2;+,\cdot) \to (\mathbb{Z}_2;+,\cdot), x \mapsto x^2$
(k) $\varphi\colon (\mathbb{Z}_3;+,\cdot) \to (\mathbb{Z}_3;+,\cdot), x \mapsto x^2$
(l) $\varphi\colon (\mathcal{P}(U);\cap) \to (\mathcal{P}(U);\cup), H \mapsto \overline{H}$,
ahol U nemüres halmaz
(m) $(\mathcal{P}(\mathbb{N});\cup,\cap) \to (\mathcal{P}(\mathbb{N});\cup,\cap), H \mapsto \{1,2,3\}\cup H$
(n) $(K;+,\cdot) \to (\mathbb{R};+,\cdot), \{a_n\} \mapsto \lim_{n\to\infty} a_n$,
ahol K a konvergens valós számsorozatok halmaza
(o) $\varphi\colon (\mathbb{R};+) \to (\mathbb{R};+), x \mapsto x^2$

6. Csoportok

6.1. feladat. Részcsoportot alkot-e a H halmaz a G csoportban?

(a) $G = (\mathbb{Z}; +),\ H = \mathbb{N}_0$

(b) $G = (\mathbb{Z}; +),\ H = \{a \in \mathbb{Z} : 4 \mid a\}$

(c) $G = (\mathbb{Z}; +),\ H = \{a \in \mathbb{Z} : 4 \nmid a\}$

(d) $G = (\mathbb{Q}; +),\ H = \mathbb{Q}^+$

(e) $G = (\mathbb{Q} \setminus \{0\}; \cdot),\ H = \mathbb{Q}^+$

(f) $G = (\mathbb{Q} \setminus \{0\}; \cdot),\ H = \mathbb{Q}^-$

(g) $G = (\mathbb{C}; +),\ H = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$

(h) $G = (\mathbb{C} \setminus \{0\}; \cdot),\ H = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$

(i) $G = (\mathbb{C}; +),\ H = \{ib : b \in \mathbb{R}\}$

(j) $G = (\mathbb{C} \setminus \{0\}; \cdot),\ H = \{ib : b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$

(k) $G = (\mathbb{Z}_{10}; +),\ H = \mathbb{Z}_{10} \setminus \{\overline{0}\}$

(l) $G = (\mathbb{Z}_{10}; +),\ H = \mathbb{Z}_{10}^*$

(m) $G = (\mathbb{Z}_{15}; +),\ H = \{\overline{0}, \overline{3}, \overline{6}, \overline{9}, \overline{12}\}$

(n) $G = (\mathbb{Z}_{15}; +),\ H = \{\overline{1}, \overline{4}, \overline{11}, \overline{14}\}$

(o) $G = (\mathbb{Z}_{15}^*; \cdot),\ H = \{\overline{1}, \overline{4}, \overline{11}, \overline{14}\}$

(p) $G = (\mathbb{R}^+; \cdot),\ H = \{\text{véges tizedes törtek}\}$

6.2. feladat. Határozzuk meg a G csoportban a B halmaz által generált részcsoportot.

(a) $G = (\mathbb{Z}; +),\ B = \{2, 9\}$

(b) $G = (\mathbb{Z}; +),\ B = \{6, 10\}$

(c) $G = (\mathbb{Z}; +),\ B = \{6, 10, 15\}$

(d) $G = (\mathbb{Z}; +),\ B = \{5, 17\}$

(e) $G = (\mathbb{Z}; +),\ B = \{25, 65\}$

(f) $G = (\mathbb{Z}; +),\ B = \{30, 42, 105\}$

(g) $G = (\mathbb{Z}_{14}; +),\ B = \{\overline{2}\}$

(h) $G = (\mathbb{Z}_{15}; +),\ B = \{\overline{2}\}$

(i) $G = (\mathbb{Z}_{15}; +),\ B = \{\overline{5}\}$

(j) $G = (\mathbb{Z}_{16}; +),\ B = \{\overline{5}\}$

(k) $G = (\mathbb{Z}_{21}; +),\ B = \{\overline{3}\}$

(l) $G = (\mathbb{Z}_{14}; +),\ B = \{\overline{6}, \overline{10}\}$

(m) $G = (\mathbb{Z}_{15}; +),\ B = \{\overline{6}, \overline{10}\}$

(n) $G = (\mathbb{Z}_{15}; +),\ B = \{\overline{25}, \overline{65}\}$

(o) $G = (\mathbb{Z}_{16}; +),\ B = \{\overline{25}, \overline{65}\}$

(p) $G = (\mathbb{Z}_{14}; +),\ B = \{\overline{6}, \overline{10}, \overline{15}\}$

(q) $G = (\mathbb{Z}_{21}; +),\ B = \{\overline{30}, \overline{42}, \overline{105}\}$

(r) $G = (\mathbb{C}; +),\ B = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right\}$

(s) $G = (\mathbb{C} \setminus \{0\}; \cdot),\ B = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right\}$

(t) $G = (\mathbb{C}; +),\ B = \{1, i\}$

(u) $G = (\mathbb{C} \setminus \{0\}; \cdot),\ B = \{1, i\}$

(v) $G = (\mathbb{Z}_7^*; \cdot),\ B = \{\overline{2}\}$

(w) $G = (\mathbb{Z}_7^*; \cdot),\ B = \{\overline{3}\}$

(x) $G = (\mathbb{Z}_{15}^*; \cdot),\ B = \{\overline{2}\}$

(y) $G = (\mathbb{Z}_{15}^*; \cdot),\ B = \{\overline{4}\}$

(z) $G = (\mathbb{Z}_{21}^*; \cdot),\ B = \{\overline{8}, \overline{13}\}$

6.3. feladat. Határozzuk meg a G csoportban az a elem rendjét.

(a) $G = (\mathbb{Z}_{20}; +),\ a = \overline{5}$

(b) $G = (\mathbb{Z}_{20}; +),\ a = \overline{6}$

(c) $G = (\mathbb{Z}_{20}; +),\ a = \overline{7}$

(d) $G = (\mathbb{Z}_{20}; +),\ a = \overline{8}$

(e) $G = (\mathbb{Z}_{20}; +),\ a = \overline{9}$

(f) $G = (\mathbb{Z}_{21}; +),\ a = \overline{5}$

(g) $G = (\mathbb{Z}_{21}; +),\ a = \overline{6}$

(h) $G = (\mathbb{Z}_{21}; +),\ a = \overline{7}$

(i) $G = (\mathbb{Z}_{21}; +),\ a = \overline{8}$

(j) $G = (\mathbb{Z}_{21}; +),\ a = \overline{9}$

(k) $G = (\mathbb{Z}_{30}; +),\ a = \overline{18}$

(l) $G = (\mathbb{Z}_{30}; +),\ a = \overline{19}$

(m) $G = (\mathbb{Z}_{30}; +),\ a = \overline{20}$

(n) $G = (\mathbb{Z}_{30}; +),\ a = \overline{21}$

(o) $G = (\mathbb{Z}_{30}; +),\ a = \overline{22}$

(p) $G = (\mathbb{R}; +),\ a = -1$

(q) $G = (\mathbb{R} \setminus \{0\}; \cdot),\ a = -1$

(r) $G = (\mathbb{R}; +),\ a = 2$

(s) $G = (\mathbb{R} \setminus \{0\}; \cdot),\ a = 2$

(t) $G = (\mathbb{C}; +),\ a = i$

(u) $G = (\mathbb{C} \setminus \{0\}; \cdot),\ a = i$

(v) $G = (\mathbb{Z}_7^*; \cdot),\ a = \overline{2}$

(w) $G = (\mathbb{Z}_7^*; \cdot),\ a = \overline{3}$

(x) $G = (\mathbb{Z}_{15}^*; \cdot),\ a = \overline{2}$

(y) $G = (\mathbb{Z}_{15}^*; \cdot),\ a = \overline{11}$

(z) $G = (\mathbb{Z}_{21}^*; \cdot),\ a = \overline{4}$