KOMBINATORIKA

a szita-formula és a binomiális tétel

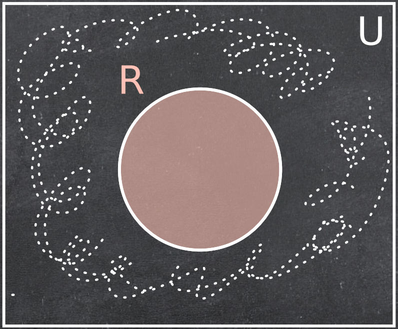
Waldhauser Tamás

SZTE Bolyai Intézet

Tartalom

Időnként könnyebb a „rossz” eseteket megszámolni, mint a „jókat”:

- összes: $|U|$
- rosszak: $|R|$
- jók: $\left|\,\overline{R}\,\right| = |U| - |R|$



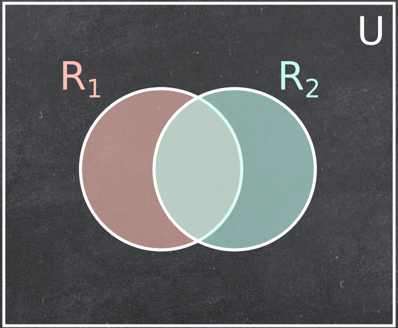
Ha a rossz esetek két csoportba oszthatók:

- összes: $|U|$
- rosszak:

$$|R_1 \cup R_2| = |R_1| + |R_2| - |R_1 \cap R_2|$$

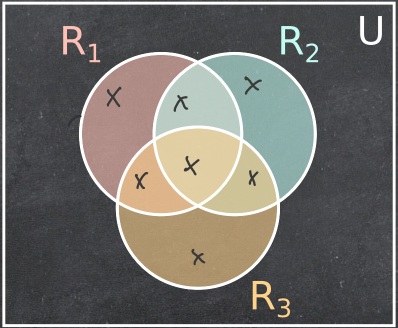
- jók:

$$\left|\, \overline{R_1} \cap \overline{R_2} \,\right| = \left|\, \overline{R_1 \cup R_2} \,\right| = |U| - |R_1| - |R_2| + |R_1 \cap R_2|$$



Ha a rossz esetek három csoportba oszthatók:

- összes: $|U|$
- rosszak: $|R_1 \cup R_2 \cup R_3| =$
  $= |R_1|+|R_2|+|R_3|-|R_1 \cap R_2|-|R_1 \cap R_3|-|R_2 \cap R_3|+|R_1 \cap R_2 \cap R_3|$
- jók: $\left|\overline{R_1} \cap \overline{R_2} \cap \overline{R_3}\right| = \left|\overline{R_1 \cup R_2 \cup R_3}\right| =$
  $= |U|-|R_1|-|R_2|-|R_3|+|R_1 \cap R_2|+|R_1 \cap R_3|+|R_2 \cap R_3|-|R_1 \cap R_2 \cap R_3|$



$\mathcal{U} \supseteq R_1, \ldots, R_n$

$$\left| \overline{R_1 \cup \cdots \cup R_n} \right| = \sum_{\substack{s = 0, 1, \ldots, n \\ 1 \le i_1 < \cdots < i_s \le n}} (-1)^s \cdot \left| R_{i_1} \cap \cdots \cap R_{i_s} \right|$$

Tétel (szita-formula)

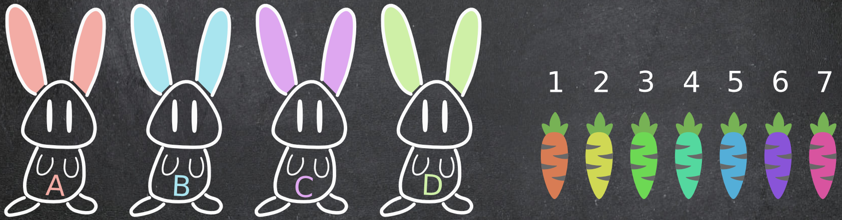
Ha U egy véges halmaz és $R_1, \ldots, R_n \subseteq U$, akkor

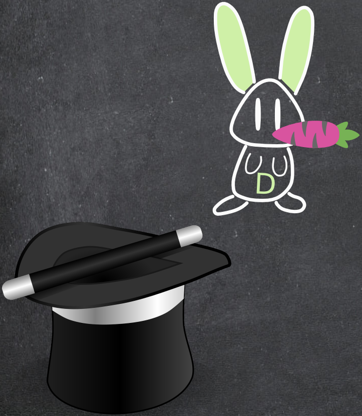
$$\left|R_1 \cup \cdots \cup R_n\right| = \sum_{\substack{s=1,\ldots,n \\ 1\leq i_1<\cdots<i_s\leq n}} (-1)^{s-1} \cdot \left|R_{i_1} \cap \cdots \cap R_{i_s}\right|;$$

$$\left|\overline{R_1 \cup \cdots \cup R_n}\right| = \sum_{\substack{s=0,\ldots,n \\ 1\leq i_1<\cdots<i_s\leq n}} (-1)^{s} \cdot \left|R_{i_1} \cap \cdots \cap R_{i_s}\right|.$$

Feladat

Hányféleképpen lehet 7 répát szétosztani 4 nyúl között úgy, hogy mindegyikük legalább egy répát kapjon?





1	2	3	4	5	6	7
B	D	B	C	A	A	D

Feladat

Hányféleképpen lehet 7 répát szétosztani 4 nyúl között úgy, hogy mindegyikük legalább egy répát kapjon?

Megoldás

A répakiosztások bijektíven megfelelnek az olyan 7-betűs szavaknak, amelyekben az `A`,`B`,`C`,`D` betűk fordulnak elő, és mindegyik valóban fel is lép legalább egyszer.

- $U = \text{ összes szó } = \{\mathtt{A}, \mathtt{B}, \mathtt{C}, \mathtt{D}\}^7$
- $R_1 = \text{ ahol az } \mathtt{A} \text{ betű hiányzik } = \{\mathtt{B}, \mathtt{C}, \mathtt{D}\}^7, \ldots$
- $R_1 \cap R_2 = \text{ ahol az } \mathtt{A} \text{ és a } \mathtt{B} \text{ betű is hiányzik } = \{\mathtt{C}, \mathtt{D}\}^7, \ldots$
- $R_1 \cap R_2 \cap R_3 = \text{ ahol az } \mathtt{A}, \mathtt{B} \text{ és } \mathtt{C} \text{ betű is hiányzik } = \{\mathtt{D}\}^7, \ldots$
- $R_1 \cap R_2 \cap R_3 \cap R_4 = \emptyset$

Feladat

Hányféleképpen lehet 7 répát szétosztani 4 nyúl között úgy, hogy mindegyikük legalább egy répát kapjon?

Megoldás

A répakiosztások bijektíven megfelelnek az olyan 7-betűs szavaknak, amelyekben az `A`,`B`,`C`,`D` betűk fordulnak elő, és mindegyik valóban fel is lép legalább egyszer.

- $|U| = 4^7$
- $|R_1| = 3^7, \ldots$
- $|R_1 \cap R_2| = 2^7, \ldots$
- $|R_1 \cap R_2 \cap R_3| = 1^7, \ldots$
- $|R_1 \cap R_2 \cap R_3 \cap R_4| = 0^7$

- $|U| = 4^7$ (ebből $\binom{4}{0} = 1$ db lesz a szita-formulában)
- $|R_{i_1}| = 3^7$ (ebből $\binom{4}{1} = 4$ db lesz a szita-formulában)
- $|R_{i_1} \cap R_{i_2}| = 2^7$ (ebből $\binom{4}{2} = 6$ db lesz a szita-formulában)
- $|R_{i_1} \cap R_{i_2} \cap R_{i_3}| = 1^7$ (ebből $\binom{4}{3} = 4$ db lesz a szita-formulában)
- $|R_{i_1} \cap R_{i_2} \cap R_{i_3} \cap R_{i_4}| = 0^7$ (ebből $\binom{4}{4} = 1$ db lesz a szita-formulában)

$$
\begin{aligned}
\left|\overline{R_1 \cup R_2 \cup R_3 \cup R_4}\right| &= 1 \cdot 4^7 - 4 \cdot 3^7 + 6 \cdot 2^7 - 4 \cdot 1^7 + 1 \cdot 0^7 \\
&= \binom{4}{0} \cdot 4^7 - \binom{4}{1} \cdot 3^7 + \binom{4}{2} \cdot 2^7 - \binom{4}{3} \cdot 1^7 + \binom{4}{4} \cdot 0^7 \\
&= \sum_{s=0}^{4} (-1)^s \cdot \binom{4}{s} \cdot (4-s)^7
\end{aligned}
$$

Minden répakiosztás leírható egy $\{1, \ldots, 7\} \to \{\mathtt{A}, \mathtt{B}, \mathtt{C}, \mathtt{D}\}$ leképezéssel (minden répához hozzárendeljük azt a nyulat, amelyik őt megette).
Az a feltétel, hogy minden nyúl kapjon legalább egy répát, azt jelenti, hogy a répakiosztó-leképezés szürjektív. Tehát a szürjektív leképezéseket számoltuk meg, és gondolatmenetünk persze nem csak $k = 7$ répa és $n = 4$ nyúl esetén érvényes:

Tétel

Ha A egy k-elemű halmaz és B egy n-elemű halmaz, akkor

- az $A \to B$ szürjektív leképezések száma
$$\sum_{s=0}^{n} (-1)^s \cdot \binom{n}{s} \cdot (n-s)^k;$$
- az $A \to B$ injektív leképezések száma $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$;
- az összes $A \to B$ leképezések száma pedig n^k.

Megjegyzés

Ha $n > k$, akkor nem létezik $A \to B$ szürjektív leképezés, $n < k$ esetén pedig injektív leképezés nem létezik. A fenti formulák ekkor is érvényesek, és 0-t adnak eredményül.

Tartalom

Binom hatványai

$$(a+b)^2 = aa + ab + ba + bb$$

$\{1\}$ $\{1,3\}$ $\{1,2\}$ $\{1,2,3\}$

100 101 110 111

$$\begin{aligned}
(a+b)^3 &= aaa + aab + aba + abb + baa + bab + bba + bbb \\
(a+b)^4 &= aaaa + aaab + aaba + aabb + abaa + abab + abba + abbb \\
&\quad + baaa + baab + baba + babb + bbaa + bbab + bbba + bbbb \\
(a+b)^5 &= aaaaa + \cdots + bbbbb
\end{aligned}$$

Az $(a+b)^n$ hatvány kifejtésében az összes n hosszúságú, a és b betűkből álló szó lép fel. Ezek között $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ olyan szó van, amely k db a betűből és $(n-k)$ db b betből áll. Tehát az összevonások után az $a^k b^{n-k}$ tag együtthatója a következő (binomiális együttható):

$$\frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{k}.$$

Binomiális tétel

Tetszőleges a, b komplex számok és n természetes szám esetén

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^k b^{n-k}$$
$$= a^n + na^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n-2} a^2 b^{n-2} + nab^{n-1} + b^n$$

Következmény

Tetszőleges n természetes szám esetén

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n-2} + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n.$$

Bizonyítás.

Alkalmazzuk a binomiális tételt az $(1+1)^n$ hatványra.

Másik (szebb) biz.: az n-elemű halmaznak 2^n részhalmaza van, mert minden részhalmazt egy n hosszúságú bitsorozattal lehet kódolni (ezt nevezzük a részhalmaz karakterisztikus vektorának). ∎

Pascal-háromszög

$$\binom{0}{0}$$

$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$

$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$

$$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$

$$\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4}$$

$$\binom{5}{0} \quad \binom{5}{1} \quad \binom{5}{2} \quad \binom{5}{3} \quad \binom{5}{4} \quad \binom{5}{5}$$

$$\binom{6}{0} \quad \binom{6}{1} \quad \binom{6}{2} \quad \binom{6}{3} \quad \binom{6}{4} \quad \binom{6}{5} \quad \binom{6}{6}$$

Pascal-háromszög

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

1 7 21 35 35 21 7 1

$(a+b)^7 = a^7 + 7a^6b + 21c^2b^5 + \dots \quad + 7ab^6 + b^7$

Tétel (a Pascal-háromszög néhány tulajdonsága)

(1) Az n-edik sor összege: $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

(2) Az n-edik sor alternáló összege: $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot \binom{n}{k} = 0$.

(3) Szimmetria: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

(4) Rekurzió: $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.

(5) „Hokiütő”-azonosság: $\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \cdots + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}$.

(6) Az n-edik sor négyzetösszege: $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.

(7) Az n-edik sor köbösszege: $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^3 = ?$ (nincs zárt formula).

Trinom hatványai

$$
\begin{aligned}
(a+b+c)^2 &= aa + ab + ac + ba + bb + bc + ca + cb + cc\\
(a+b+c)^3 &= aaa + aab + aac + aba + abb + abc + aca + acb + acc\\
&\quad + baa + bab + bac + bba + bbb + bbc + bca + bcb + bcc\\
&\quad + caa + cab + cac + cba + cbb + cbc + cca + ccb + ccc\\
(a+b+c)^4 &= aaaa + \quad \cdots \quad + cccc
\end{aligned}
$$

Az $(a+b+c)^n$ hatvány kifejtésében az összes n hosszúságú, a, b és c betűkből álló szó lép fel. Ezek között $\frac{n!}{k!\ell!m!}$ olyan szó van, amely k db a betűből, ℓ db b betűből és m db c betűből áll ($k+\ell+m=n$). Tehát az összevonások után az $a^k b^\ell c^m$ tag együtthatója a következő (trinomiális együttható):

$$\frac{n!}{k!\,\ell!\,m!} = \binom{n}{k,\ell,m}. \qquad \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{k,\,n-k}$$

Trinomiális tétel

Tetszőleges a, b, c komplex számok és n természetes szám esetén

$$(a+b+c)^n = \sum_{k+\ell+m=n} \binom{n}{k,\ell,m} \cdot a^k b^\ell c^m.$$

Polinomiális tétel

Tetszőleges $a_1, \dots, a_d$ komplex számok és n természetes szám esetén

$$(a_1+\dots+a_d)^n \; \cancel{(a_1,\dots,a_d)^n} = \sum_{k_1+\dots+k_d=n} \binom{n}{k_1,\dots,k_d} \cdot a_1^{k_1} \cdots a_d^{k_d}.$$

Itt az $\binom{n}{k_1,\dots,k_d}$ együtthatókat polinomiális együtthatóknak nevezzük:

$$\binom{n}{k_1,\dots,k_d} = \frac{n!}{k_1! \cdots k_d!}.$$