GRÁFELMÉLET

páros gráfok, párosítások

Waldhauser Tamás

SZTE Bolyai Intézet

Tartalom

Főnök: Itt egy gráf, keress benne . . . -t!

Én:

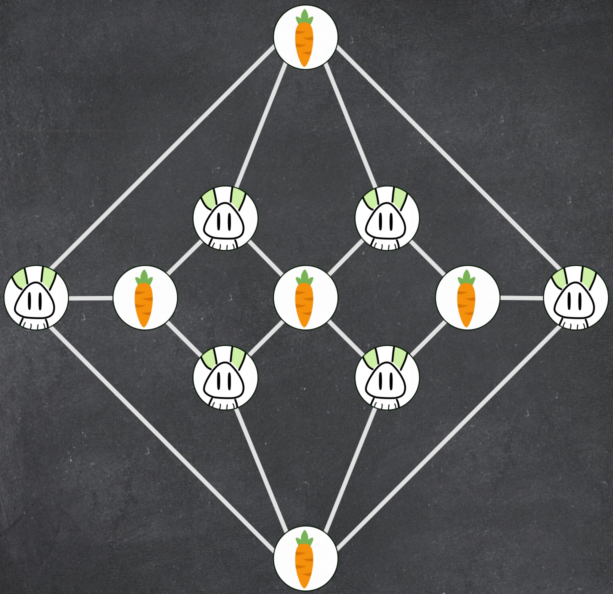
1. Ha van, akkor meg kellene találni (de gyorsan!).
2. Ha nincs, akkor meg kellene győzni a főnököt arról, hogy tényleg nincs (de gyorsan!).

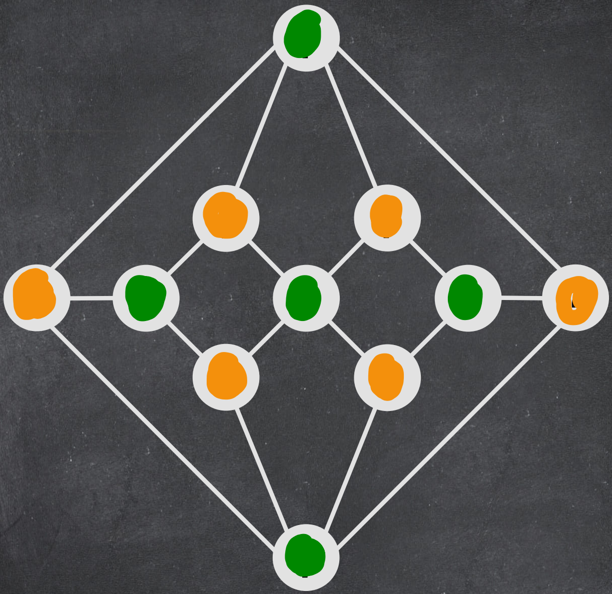
Ha ... = Euler-vonal:

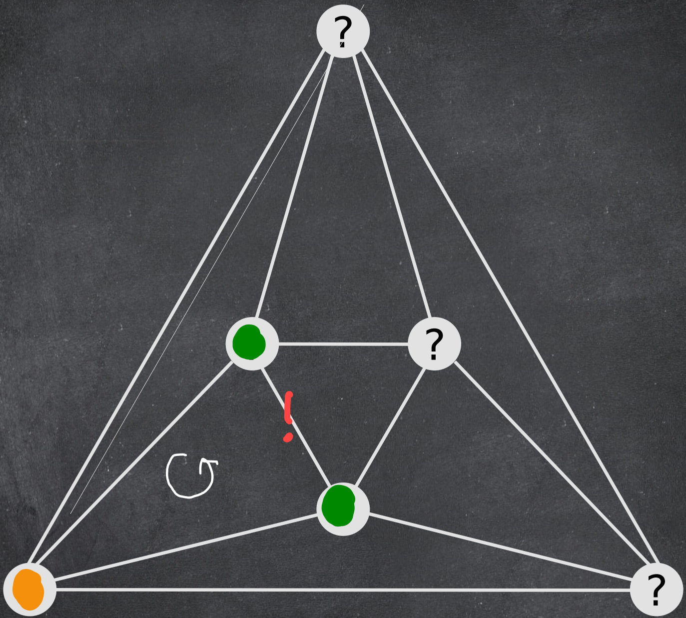
1. ☺ Hierholzer-algoritmus.
2. ☺ Több, mint két páratlan fokú csúcs van.

Ha ... = Hamilton-kör:

1. ☹ ???
2. ☹ ???



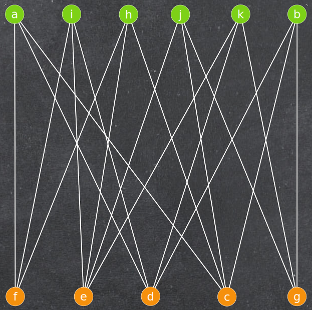




Definíció

A G gráfot páros gráfnak nevezzük, ha csúcshalmazát két diszjunkt részre lehet osztani úgy, hogy az egyes részeken belül nincsenek élek (azaz minden él „keresztben” megy).

Ezzel ekvivalens, hogy a gráf 2-színezhető, azaz a csúcsait ki lehet színezni két színnel úgy, hogy éllel összekötött csúcsok különböző színűek legyenek.



Tétel

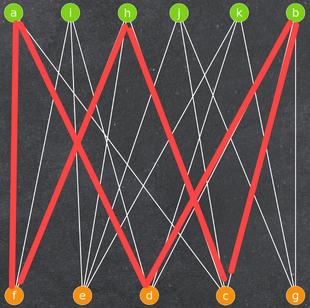
Tetszőleges G egyszerű gráf esetén

$$G \text{ páros} \iff \text{nincs } G\text{-ben páratlan hosszúságú kör.}$$

Bizonyítás.

Feltehető, hogy G összefüggő (mert a párosság is és a páratlan kör létezése is a komponensekben dől el).

$\Longrightarrow$: Triviális.



Tétel

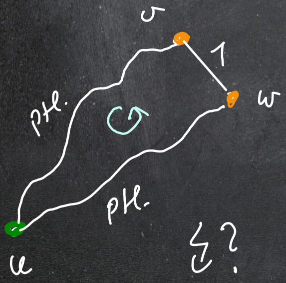
Tetszőleges G egyszerű gráf esetén

$$G \text{ páros} \iff \text{nincs } G\text{-ben páratlan hosszúságú kör.}$$

Bizonyítás.

Feltehető, hogy G összefüggő (mert a párosság is és a páratlan kör létezése is a komponensekben dől el).

$\Longleftarrow$: Tfh. nincs ptl. kör. Rögzítsünk egy u „origót”, és színezzük a pontokat aszerint, hogy u-ból páros vagy páratlan hosszú úttal érhetőek el.



ptl. hosszú zárt séta

Főnök: Itt egy gráf, színezd ki 2 színnel!

Én:

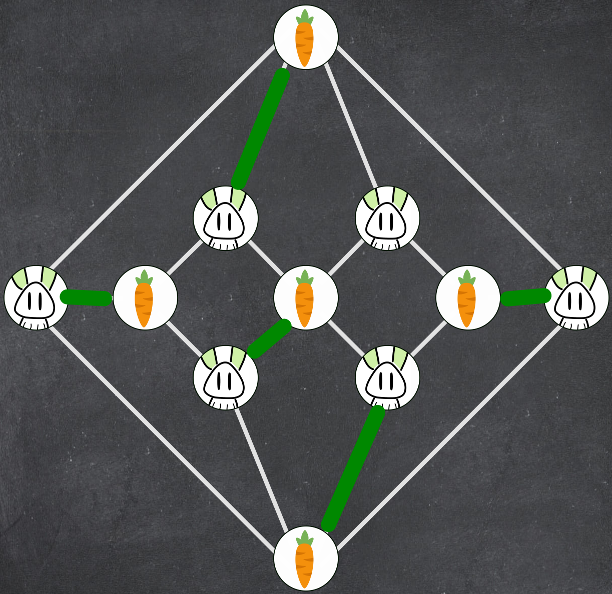
1. ☺ Ha páros a gráf, akkor gyorsan ki tudom színezni („mohó” színezési algoritmussal).
2. ☺ Ha nem páros, akkor gyorsan találok egy páratlan hosszúságú kört, és ezzel meggyőzöm a főnököt, hogy nem lehet 2 színnel színezni.

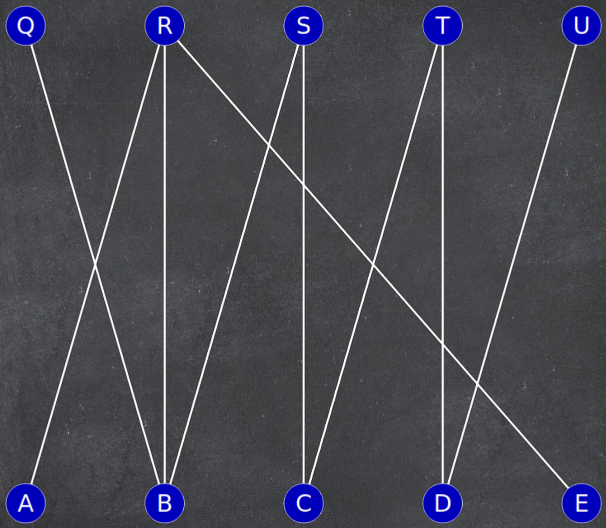
Főnök: Itt egy gráf, színezd ki 3 színnel!

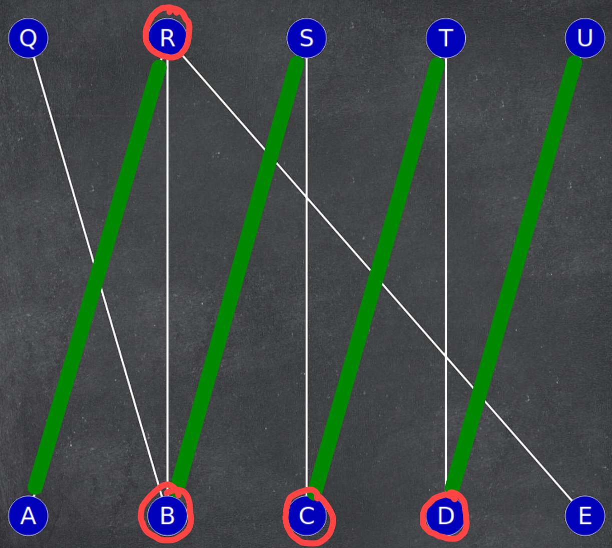
Én:

1. ☹ ???
2. ☹ ???

Tartalom




Q
R
S
T
U
A
B
C
D
E


Q
R
S
T
U
A
B
C
D
E

Definíció

Élek egy M halmazát **párosításnak** nevezzük, ha semelyik két M-beli élnek nincs közös végpontja.
Maximális elemszám: $\nu(G)$.

Definíció

Csúcsok egy C halmazát **lefogó ponthalmaznak** nevezzük, ha minden G-beli élnek legalább az egyik végpontja C-ben van.
Minimális elemszám: $\tau(G)$.

Trivialitás

Ha M párosítás és C lefogó ponthalmaz, akkor $|M| \leq |C|$.

Tétel

Minden G gráfra teljesül a $\nu(G) \leq \tau(G)$ egyenlőtlenség.

Következmény

Ha találtunk egy M párosítást és egy C lefogó ponthalmazt úgy, hogy $|M| = |C|$, akkor M biztosan maximális elemszámú párosítás

Tartalom

Páros gráfok

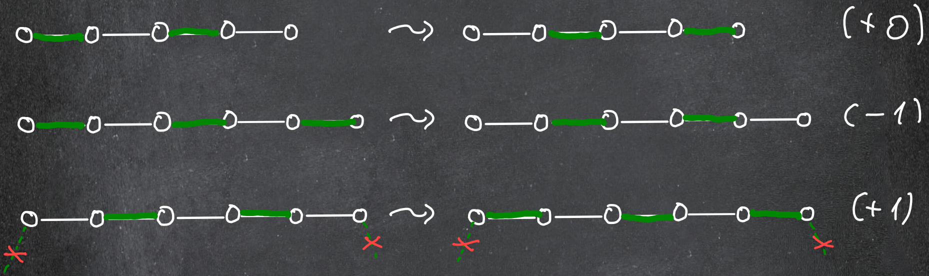
Párosítások és lefogó ponthalmazok

Alternáló utak és javító utak

Magyar módszer

Definíció

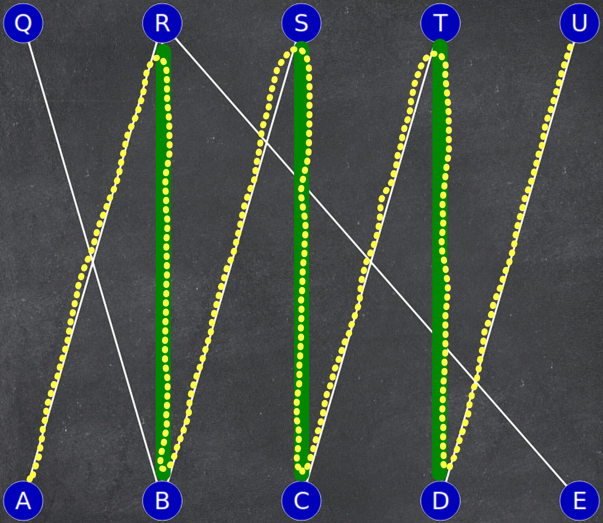
Legyen G egy gráf és $M \subseteq E(G)$ egy párosítás.
Egy G-beli utat alternáló útnak nevezünk (M-re nézve), ha benne felváltva következnek párosított és párosítatlan élek.



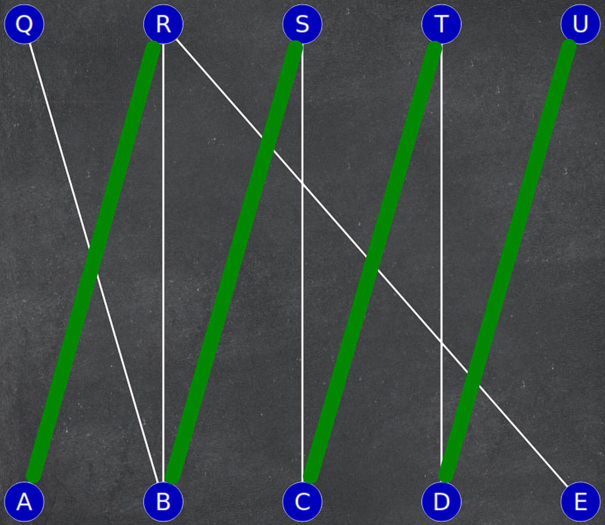
Javító útnak nevezzük az olyan alternáló utat, amelynek mindkét végpontja párosítatlan.

Berge-tétel

Egy párosítás akkor és csak akkor maximális elemszámú, ha nincs javító út.



javító út



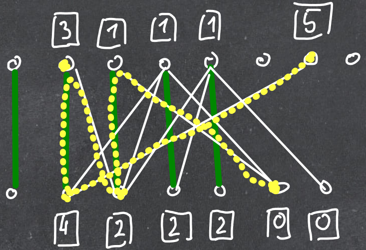
javított párosítás

Tartalom

Magyar módszer

Adott egy véges páros gráf. Keressünk benne maximális elemszámú párosítást (és igazoljuk a maximalitást egy lefogó ponthalmazzal).

1. Kiindulunk egy tetszőleges M párosításból (lehet akár $M = \emptyset$ is).
2. Az összes alsó párosítatlan csúcsból minden lehetséges módon alternáló utakat „növesztünk”.

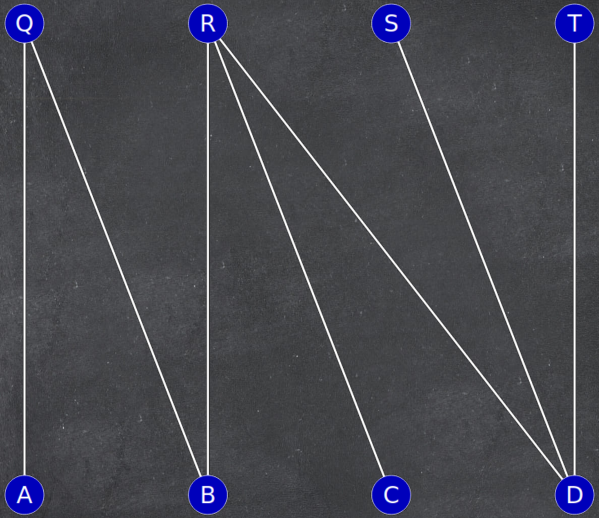


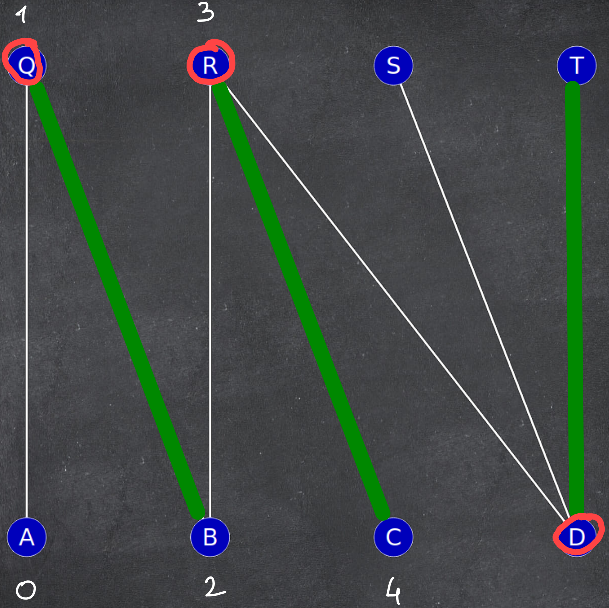
3. Ha valamelyik alternáló út elér egy fölső párosítatlan csúcsot, akkor az javító út. Ekkor javítjuk a párosítást, és visszatérünk a 2. lépésre.
4. Ha nem lehet alternáló úttal elérni egyik fölső párosítatlan csúcsot sem, akkor M maximális elemszámú párosítás, és ezt igazolja egy megfelelő lefogó ponthalmaz.

Magyar módszer

Adott egy véges páros gráf. Keressünk benne maximális elemszámú párosítást (és igazoljuk a maximalitást egy lefogó ponthalmazzal).

1. Kiindulunk egy tetszőleges M párosításból (lehet akár $M = \emptyset$ is).
2. Az összes alsó párosítatlan csúcsból minden lehetséges módon alternáló utakat „növesztünk”.
   - Az alsó párosítatlan pontok 0 címkét kapnak.
   - Fölfelé az összes lehetséges élet megnézzük, és a fölső végponthoz 1-gyel nagyobb számot írunk, mint ami az alsóhoz van írva (ha nincs még megcímkézve).
   - Lefelé mindig csak párosított élen megyünk, és az alsó végponthoz 1-gyel nagyobb számot írunk, mint ami a fölsőhöz van írva (garantáltan nincs még megcímkézve).
3. Ha valamelyik alternáló út elér egy fölső párosítatlan csúcsot, akkor az javító út. Ekkor javítjuk a párosítást, és visszatérünk a 2. lépésre.
4. Ha nem lehet alternáló úttal elérni egyik fölső párosítatlan csúcsot sem, akkor M maximális elemszámú párosítás, és ezt igazolja egy megfelelő lefogó ponthalmaz.


Q
R
S
T
A
B
C
D



C: lefogó pontok

M: párosítás

$|C| = |M|$

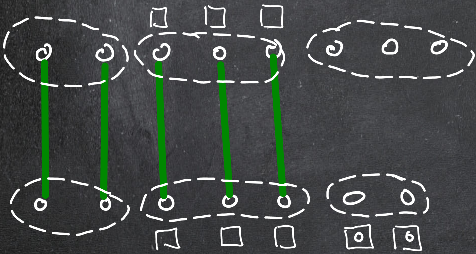
$\Rightarrow$ M maximális elemű

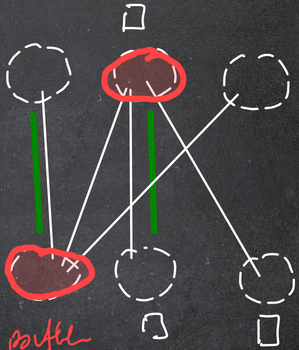
Állítás

Tfh. a magyar módszer véget ért, azaz alsó párosítatlan csúcsból már nem vezet alternáló út fölső párosítatlan csúcsba.
Ekkor M maximális elemszámú párosítás, és ezt igazolja a következő C lefogó ponthalmaz (amelyre $|M| = |C|$ teljesül):

$$C = \{\text{alsó címkézetlen csúcsok}\} \cup \{\text{fölső címkézett csúcsok}\}.$$

Bizonyítás.





C lefogó ponthlm

Magyar módszer

Adott egy véges páros gráf. Keressünk benne maximális elemszámú párosítást (és igazoljuk a maximalitást egy lefogó ponthalmazzal).

1. Kiindulunk egy tetszőleges M párosításból (lehet akár $M = \emptyset$ is).
2. Az összes alsó párosítatlan csúcsból minden lehetséges módon alternáló utakat „növesztünk". Eközben megcímkézzük a csúcsokat: minden csúcshoz, amibe eljutunk, odaírjuk, hogy milyen hosszú alternáló úttal sikerült elérni.
3. Ha valamelyik alternáló út elér egy fölső párosítatlan csúcsot, akkor az javító út. Ekkor javítjuk a párosítást, és visszatérünk a 2. lépésre.
4. Ha nem lehet alternáló úttal elérni egyik fölső párosítatlan csúcsot sem, akkor M maximális elemszámú párosítás, és ezt igazolja az alábbi lefogó ponthalmaz:

$$C = \{\text{alsó címkézetlen csúcsok}\} \cup \{\text{fölső címkézett csúcsok}\}.$$

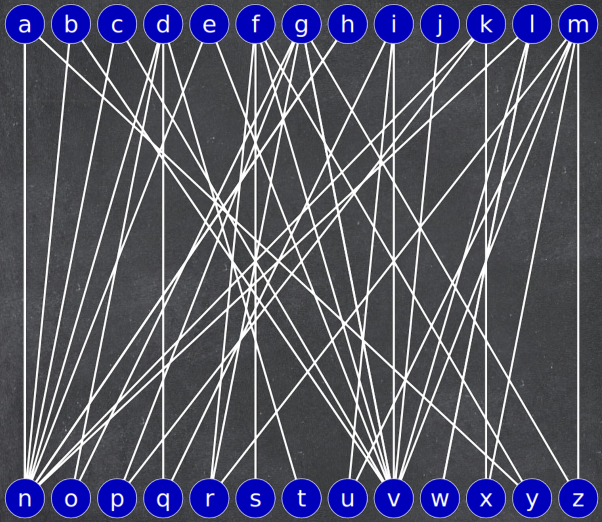
$|C| = |M|$

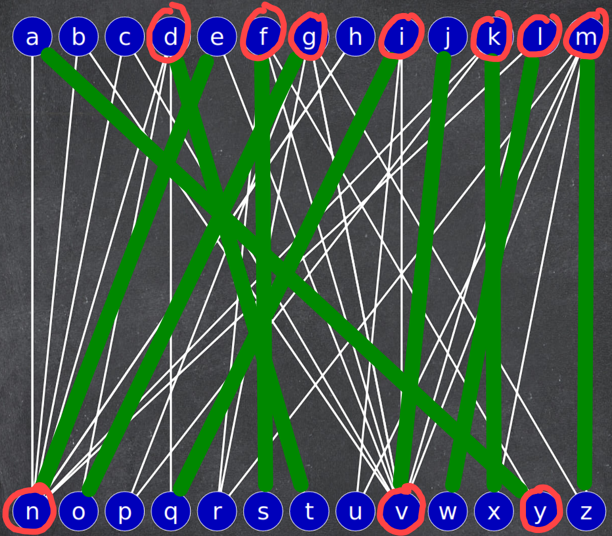
Kőnig-tétel

Ha G véges páros gráf, akkor $\nu(G) = \tau(G)$.

Főnök: Itt egy gráf, keress benne minél nagyobb párosítást!

Én: ☺ Végrehajtom a magyar módszert. Ezzel kapok egy maximális elemszámú párosítást, és egy lefogó ponthalmazt is, ami meggyőzi a főnököt, hogy nincs nagyobb párosítást.

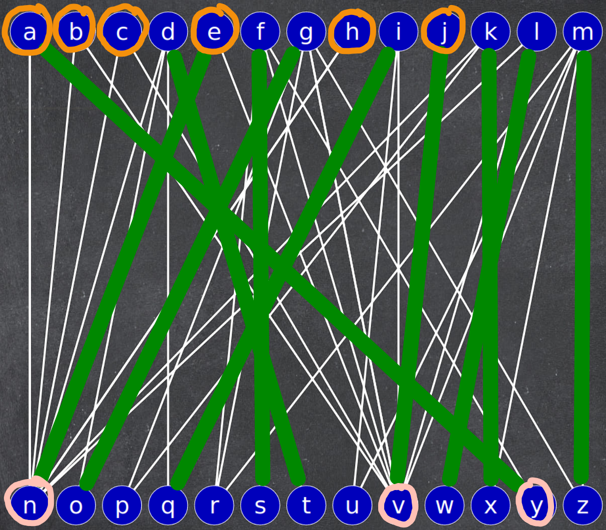

a b c d e f g h i j k l m
n o p q r s t u v w x y z



M párosítás

C lefogó ponthalmaz

X



N(X)

X [illegible]

$|N(X)| < |X|$

$|X| - |N(X)| = 3$

Definíció

Egy párosítást teljes párosításnak nevezünk, ha minden csúcsnak van párja. (Ez nyilván csak akkor lehetséges, ha ugyanannyi pont van alul, mint fölül.)

Definíció

Tetszőleges G gráf és $X \subseteq V(G)$ csúcshalmaz esetén X szomszédsága az X-beli csúcsokkal éllel összekötött csúcsok halmaza:

$$N(X) = \Big\{ y \in V(G) : \{x, y\} \in E(G) \text{ valamely } x \in X \text{ csúcsra} \Big\}.$$

Definíció

Azt mondjuk, hogy egy páros gráfban fölső csúcsok egy X halmaza Kőnig-akadály, ha $|N(X)| < |X|$.

Trivialitás

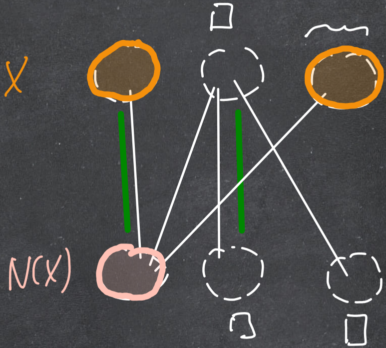
Ha van Kőnig-akadály, akkor nem létezhet teljes párosítás.
(Sőt, legalább $|X| - |N(X)|$ fölső csúcsnak nem lesz párja.)

Kőnig–Hall-tétel

Egy páros gráfban akkor és csak akkor van teljes párosítás, ha az alsó és fölső pontok száma ugyanannyi, és nincs Kőnig-akadály.

Bizonyítás.

$$|N(X)| < |X|$$



Főnök: Itt egy gráf, keress benne teljes párosítást! 

Én:

1. ☺ Ha van teljes párosítás, akkor azt gyorsan megtalálom a magyar módszerrel.
2. ☺ Ha nincs teljes párosítás, akkor gyorsan találok egy Kőnig-akadályt a magyar módszerrel, és ezzel meggyőzöm a főnököt, hogy valóban nincs teljes párosítás.