GRÁFELMÉLET

alapfogalmak

Szakács Nóra

SZTE Bolyai Intézet

Tartalom

Gráfok

Gráfok

csúcsok

Gráfok

csúcsok + élek

Gráfok

csúcsok + (többszörös és hurok-) élek

Gráfok

csúcsok + irányított élek

Mire jók?

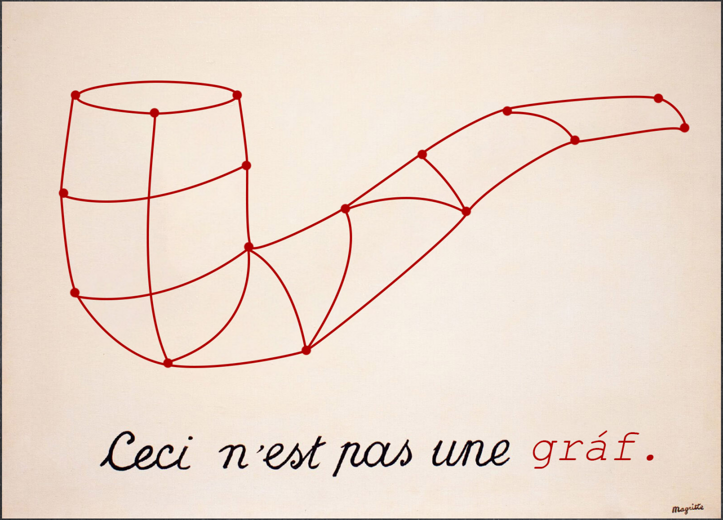
Gráfok segítségével lehet modellezni, ha valamiféle dolgok között valamiféle kapcsolat van.

Példák

- útvonalhálózatok (lehet irányított, akár élsúlyozott is)
- kapcsolati gráfok (pl. Facebookon ismeretség: irányítatlan, twitteren követés: irányított)
- weboldalak, és a közöttük mutató linkek (irányított)
- hierarchikus adatstruktúra: fák (definíció később)

Hány megállót kell menjek a pesti metróhálózaton a Népligettől az Astoriáig? Hány megosztásra van szükség, hogy eljutassak egy üzenetet Mark Zuckerberg Facebook-falára? Hány kattintással juthatok el a Wikipedia 'Gráf' szócikkéről a 9gag.com-ra?

Gráfok formálisan



Gráfok formálisan

Definíció

Egyszerű gráf: (V, E)

V – halmaz: csúcsok

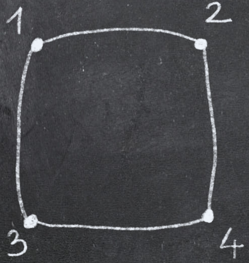
$E \subseteq V$ kételemű részhalmazai $= \binom{V}{2}$: élek

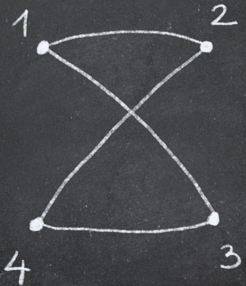
az $\{u, v\}$ élnek az u és v csúcsok végpontjai, amelyekre az él illeszkedik.

Példa

$V = \{1, 2, 3, 4\}$

$E = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}\}$





Gráfok formálisan

Definíció

Egyszerű gráf: (V, E)

V – halmaz: csúcsok

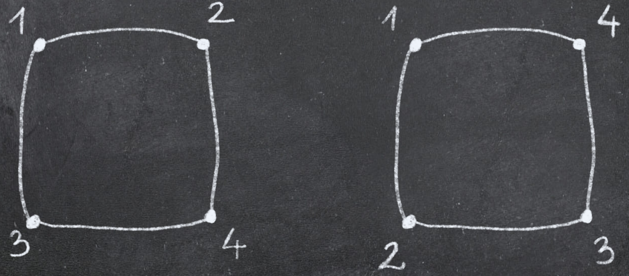
$E \subseteq V$ kételemű részhalmazai $= \binom{V}{2}$: élek

az $\{u, v\}$ élnek az u és v csúcsok végpontjai, amelyekre az él illeszkedik.

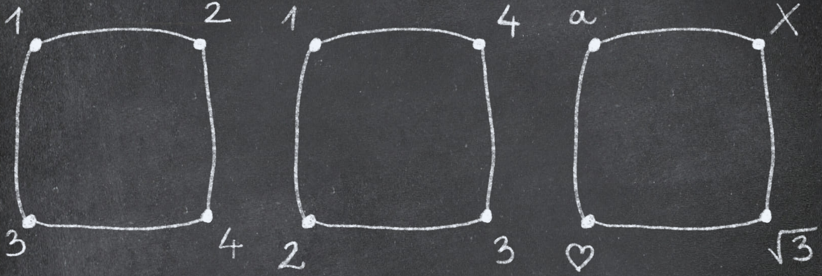
Példa

$V = \{1, 2, 3, 4\}$

$E = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}\}$



Egyforma, de különböző gráfok

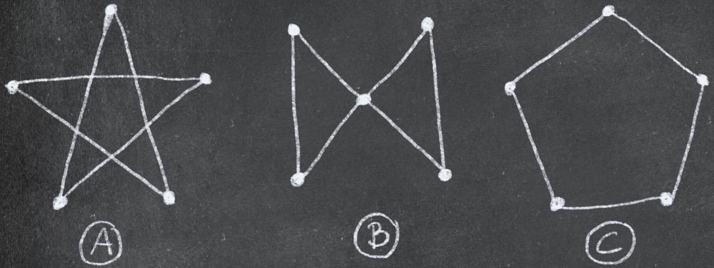


Ezek formálisan különböző gráfok, de csak a csúcsaik jelölésében térnek el. Úgy mondjuk: izomorfak.

Formálisan két gráf akkor izomorf, ha van olyan bijekció a csúcsaik között, amely élt élbe, és nem élt nem élbe visz.

Feladat

Melyek ábrázolnak izomorf gráfokat?



Fokszámok

Legyen $G = (V, E)$ egyszerű gráf.

A $v \in V$ csúcs fokszáma a rá illeszkedő élek száma. Jele: $d(v)$.

Tétel

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$$

Bizonyítás. Számoljuk meg minden élnek mindkét végét, kétféleképp:

- csúcsonként: $\sum\limits_{v \in V} d(v)$
- élenként: $2|E|$.

Séták és utak

Definíció

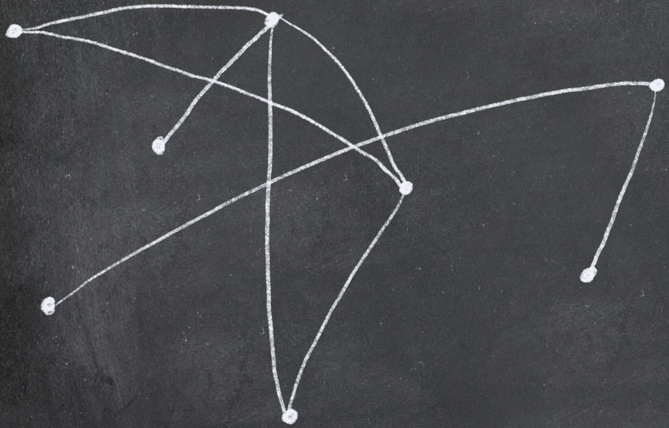
Egy $G = (V, E)$ egyszerű gráfban

- séta: csatlakozó élek sorozata.
  Formálisan: $\{v_1, v_2\}\{v_2, v_3\} \dots \{v_{n-1}, v_n\}$, ahol $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$.
  A séta kezdőpontja: v_1, végpontja: v_n.
  A séta által meglátogatott csúcsok: $v_1, \dots, v_n$

  „Ez most vagy valami, vagy megy valahová...”

  Technikai okokból minden $v \in V$ csúcshoz definiálunk egy 0 élből álló üres sétát, amely egyedül ezt a csúcsot látogatja meg.
- zárt séta: a kezdőpontja és a végpontja egybeesik
- út: séta, amely csupa különböző csúcsot látogat meg
- kör: nemüres, zárt séta, amely (a kezdőpont szükségszerű ismétlődésétől eltekintve) csupa különböző csúcsot látogat meg

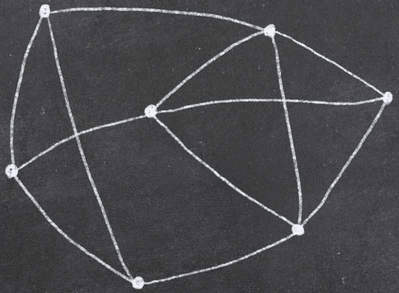
Példák



Részgráfok

A $G = (V, E)$ gráf egy részgráfja: G-ből csúcsok és élek elhagyásával kapott gráf. (Értelemszerűen ha egy csúcsot elhagyunk, akkor a rá illeszkedő élek sem maradhatnak ott.)
Formálisan: olyan $G' = (V', E')$ gráf, ahol $V' \subseteq V$, $E' \subseteq E$.

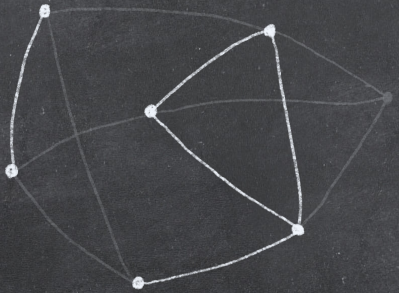
A $G = (V, E)$ gráf a $V' \subseteq V$ által feszített részgráfja: az a $G' = (V', E')$ részgráf, amelyre $E' = E \cap \binom{V'}{2}$ – tehát az összes olyan él, amely mindkét végpontja V'-beli.



Részgráfok

A $G = (V, E)$ gráf egy részgráfja: G-ből csúcsok és élek elhagyásával kapott gráf. (Értelemszerűen ha egy csúcsot elhagyunk, akkor a rá illeszkedő élek sem maradhatnak ott.)
Formálisan: olyan $G' = (V', E')$ gráf, ahol $V' \subseteq V$, $E' \subseteq E$.

A $G = (V, E)$ gráf a $V' \subseteq V$ által feszített részgráfja: az a $G' = (V', E')$ részgráf, amelyre $E' = E \cap \binom{V'}{2}$ – tehát az összes olyan él, amely mindkét végpontja V'-beli.

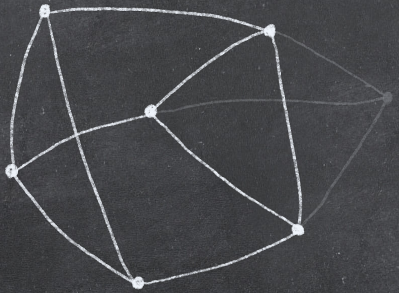


Részgráfok

A $G = (V, E)$ gráf egy részgráfja: G-ből csúcsok és élek elhagyásával kapott gráf. (Értelemszerűen ha egy csúcsot elhagyunk, akkor a rá illeszkedő élek sem maradhatnak ott.)

Formálisan: olyan $G' = (V', E')$ gráf, ahol $V' \subseteq V$, $E' \subseteq E$.

A $G = (V, E)$ gráf a $V' \subseteq V$ által feszített részgráfja: az a $G' = (V', E')$ részgráf, amelyre $E' = E \cap \binom{V'}{2}$ – tehát az összes olyan él, amely mindkét végpontja V'-beli.



Összefüggőség

Definíció

A $G = (V, E)$ egyszerű gráf összefüggő, ha bármely két pontja között van út (ekvivalensen: séta).

Általában be lehet vezetni egy elérhetőségi relációt V-n:

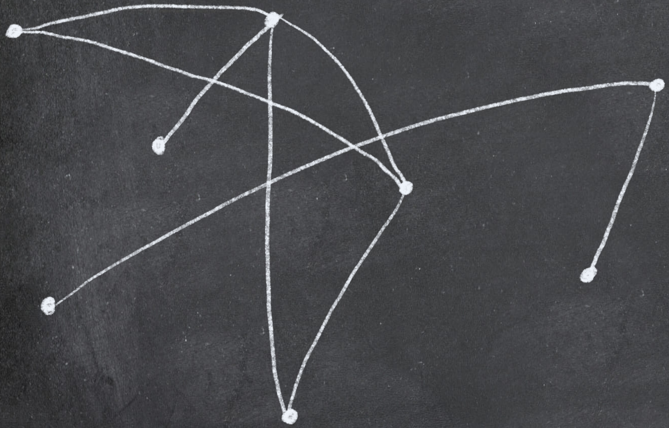
$$u \sim v \iff \text{létezik út (séta) } u\text{-ból } v\text{-be.}$$

Állítás

Ez ekvivalencia V-n.

A hozzá tartozó osztályok által feszített részgráfok: összefüggő komponensek.

Példa



Egyéb gráffogalmak

Definíció

Többszörös éleket megengedő gráf (multigráf): (V, E, ι)
V – halmaz: csúcsok
E – halmaz: élek
$\iota\colon E \to \binom{V}{2}$ 'illeszkedés' leképezés

Definíció

Többszörös éleket és hurokéleket is megengedő gráf: (V, E, ι)
V – halmaz: csúcsok
E – halmaz: élek
$\iota\colon E \to V \cup \binom{V}{2}$ 'illeszkedés' leképezés

A hurokél csak egy csúcsra illeszkedik, de *kétszer*.

A korábbi állítások, fogalmak ezekre a gráfosztályokra is értelemszerűen általánosíthatóak és érvényben maradnak.

Egyéb gráffogalmak II.

Definíció

Irányított gráf: (V, E, α, ω)
V – halmaz: csúcsok
E – halmaz: élek
$\alpha \colon E \to V$ 'kezdőpont' leképezés
$\omega \colon E \to V$ 'végpont' leképezés

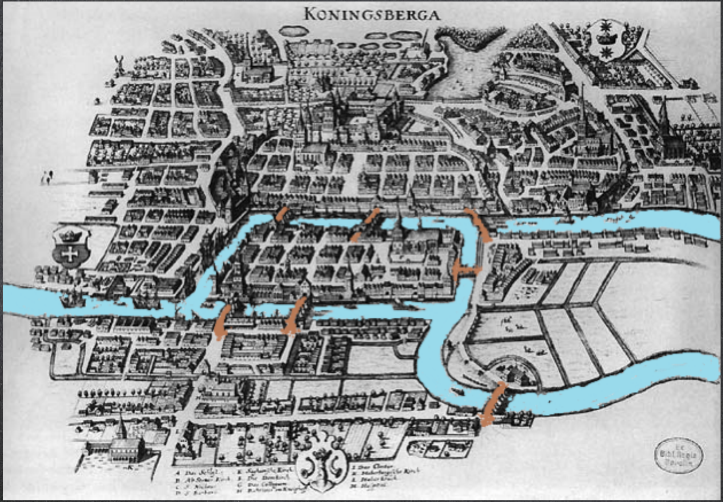
Megjegyzés: ha nem engedjük meg a többszörös éleket, akkor az e élt azonosítjatjuk az $(\alpha(e), \omega(e)) \in V \times V$ pontpárral is, így E felfogható mint $V \times V$ egy részhalmaza.
Ekkor E reláció V-n, és a gráf rajza nem más, mint a reláció diagramja!

Irányított gráfok esetén definiálhatunk irányított és irányítatlan sétákat és utakat, a csúcsoknak kifokát és befokát, erősen összefüggő és (gyengén) öszefüggő gráfokat és komponeneseket, stb.

Tartalom

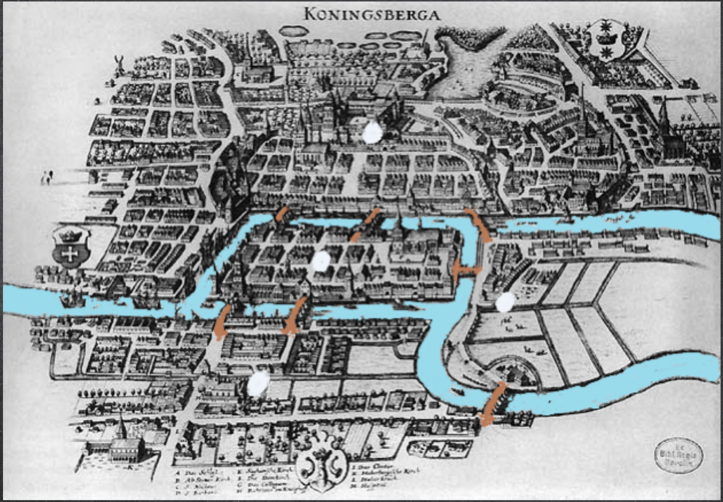
Königsberg hídjai

Euler a köngisbergi sétái közben azon gondolkozott, vajon tud-e tenni úgy egy körsétát, hogy minden hidat pontosan egyszer keresztez.



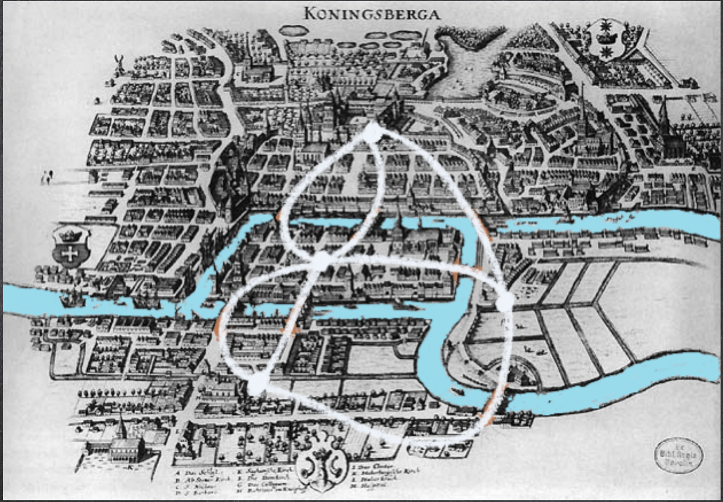
Königsberg hídjai

Euler a köngisbergi sétái közben azon gondolkozott, vajon tud-e tenni úgy egy körsétát, hogy minden hidat pontosan egyszer keresztez.



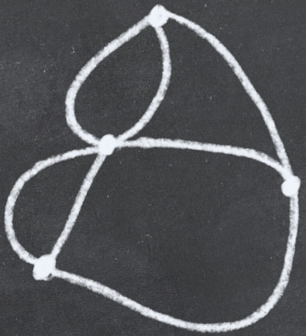
Königsberg hídjai

Euler a köngisbergi sétái közben azon gondolkozott, vajon tud-e tenni úgy egy körsétát, hogy minden hidat pontosan egyszer keresztez.



Königsberg hídjai

Euler a köngisbergi sétái közben azon gondolkozott, vajon tud-e tenni úgy egy körsétát, hogy minden hidat pontosan egyszer keresztez.



Euler-vonal

Legyen $G = (V, E)$ (egyszerű vagy multi-)gráf.

Definíció

Euler-vonal: olyan G-beli séta, amely minden élen pontosan egyszer halad át.

zárt Euler-vonal: olyan G-beli zárt séta, amely minden élen pontosan egyszer halad át.

Feladat

Keress Euler-vonalakat és zárt Euler-vonalakat a leírásban elérhető linken!

Észrevétel: egy vonalnak két vége van. Egy zárt vonalnak nulla.

Ha egy gráfban van (zárt) Euler-vonal, és tekintünk egy v csúcsot, amely ennek a vonalnak nem végpontja, akkor

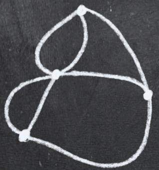
> *minden alkalommal, amikor egy elérjük ezt a csúcsot, el is hagyjuk.*

Tehát $d(v)$ páros.

Következmény (Euler, 1736)

Ha egy gráfban van Euler-vonal, akkor 0 *vagy* 2 *páratlan fokú csúcsa van. Ha van benne zárt Euler-vonal, akkor nincs páratlan fokú csúcsa.*

A königsbergi gráfban nincs se zárt, se nyílt Euler-vonal:



Tétel (Hierholzer, kb. 1871)

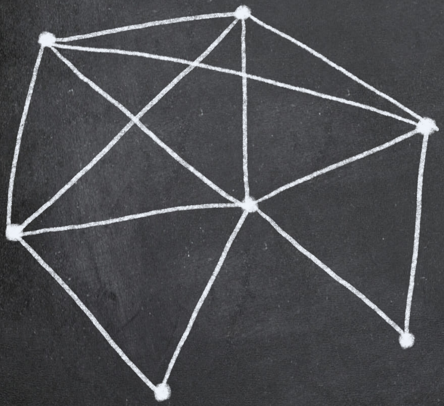
Ha egy összefüggő gráfban minden csúcs foka páros, akkor van benne zárt Euler-vonal.

Bizonyítás: algoritmust adunk.

Tétel (Hierholzer, kb. 1871)

Ha egy összefüggő gráfban minden csúcs foka páros, akkor van benne zárt Euler-vonal.

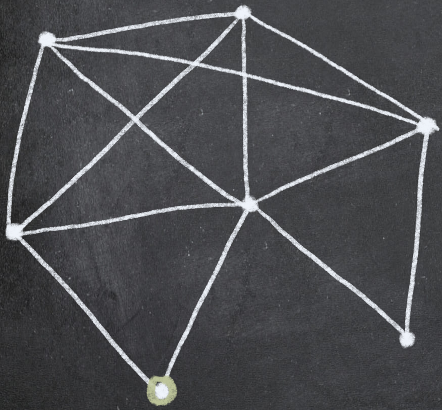
Bizonyítás: algoritmust adunk.



Tétel (Hierholzer, kb. 1871)

Ha egy összefüggő gráfban minden csúcs foka páros, akkor van benne zárt Euler-vonal.

Bizonyítás: algoritmust adunk.

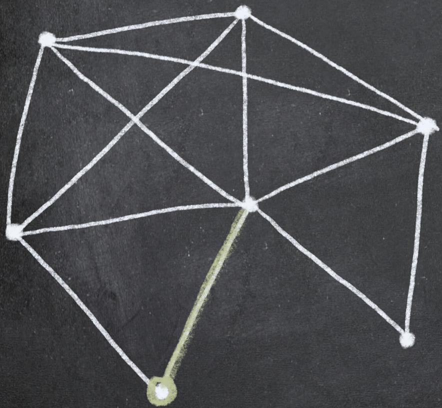


$G = (V, E)$, $v \in V$ tetsz.

Tétel (Hierholzer, kb. 1871)

Ha egy összefüggő gráfban minden csúcs foka páros, akkor van benne zárt Euler-vonal.

Bizonyítás: algoritmust adunk.

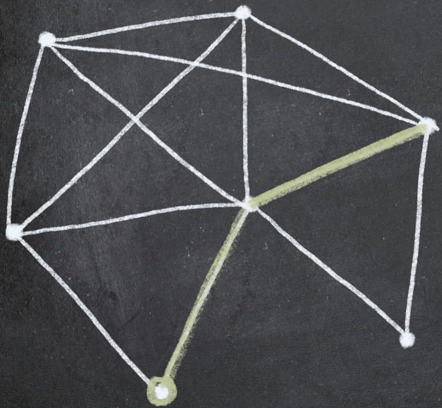


$G = (V, E)$, $v \in V$ tetsz.
Kezdőlépés: *Keres*(G, v)*:*
tetsz. módon kezdjük bejárni az éleket v-ből amíg elakadunk

Tétel (Hierholzer, kb. 1871)

Ha egy összefüggő gráfban minden csúcs foka páros, akkor van benne zárt Euler-vonal.

Bizonyítás: algoritmust adunk.

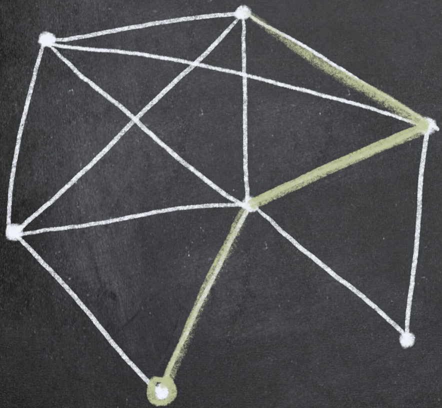


$G = (V, E)$, $v \in V$ tetsz.
Kezdőlépés: *Keres*(G, v): tetsz. módon kezdjük bejárni az éleket v-ből amíg elakadunk

Tétel (Hierholzer, kb. 1871)

Ha egy összefüggő gráfban minden csúcs foka páros, akkor van benne zárt Euler-vonal.

Bizonyítás: algoritmust adunk.

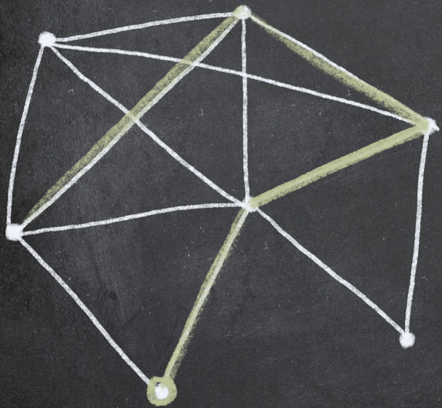


$G = (V, E)$, $v \in V$ tetsz.
Kezdőlépés: *Keres*(G, v)*:*
tetsz. módon kezdjük bejárni az éleket v-ből amíg elakadunk

Tétel (Hierholzer, kb. 1871)

Ha egy összefüggő gráfban minden csúcs foka páros, akkor van benne zárt Euler-vonal.

Bizonyítás: algoritmust adunk.

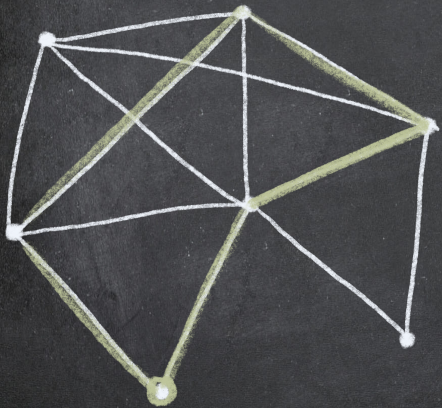


$G = (V, E)$, $v \in V$ tetsz.
Kezdőlépés: *Keres*(G, v)*:* tetsz. módon kezdjük bejárni az éleket v-ből amíg elakadunk

Tétel (Hierholzer, kb. 1871)

Ha egy összefüggő gráfban minden csúcs foka páros, akkor van benne zárt Euler-vonal.

Bizonyítás: algoritmust adunk.

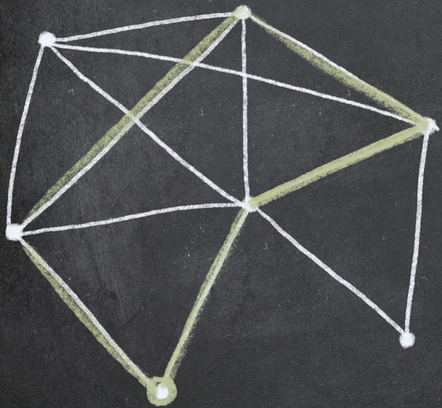


$G = (V, E)$, $v \in V$ tetsz.
Kezdőlépés: *Keres*(G, v): tetsz. módon kezdjük bejárni az éleket v-ből amíg elakadunk

Tétel (Hierholzer, kb. 1871)

Ha egy összefüggő gráfban minden csúcs foka páros, akkor van benne zárt Euler-vonal.

Bizonyítás: algoritmust adunk.

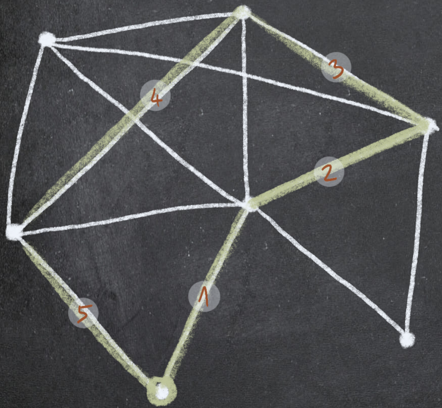


$G = (V, E)$, $v \in V$ tetsz.
Kezdőlépés: *Keres*(G, v):
tetsz. módon kezdjük bejárni az éleket v-ből amíg elakadunk
csak v-ben akadhatunk el
$\Longrightarrow$ **találtunk z zárt sétát**

Tétel (Hierholzer, kb. 1871)

Ha egy összefüggő gráfban minden csúcs foka páros, akkor van benne zárt Euler-vonal.

Bizonyítás: algoritmust adunk.

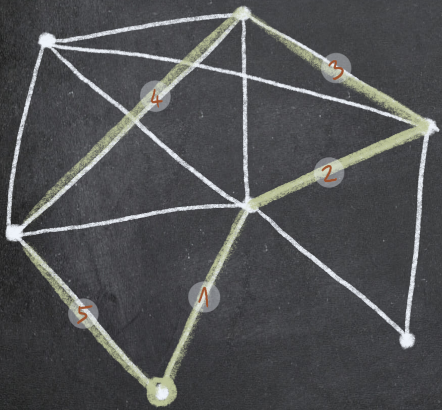


$G = (V, E)$, $v \in V$ tetsz.
Kezdőlépés: *Keres*(G, v):
tetsz. módon kezdjük bejárni az éleket v-ből amíg elakadunk
csak v-ben akadhatunk el
$\implies$ **találtunk z zárt sétát**

Tétel (Hierholzer, kb. 1871)

Ha egy összefüggő gráfban minden csúcs foka páros, akkor van benne zárt Euler-vonal.

Bizonyítás: algoritmust adunk.

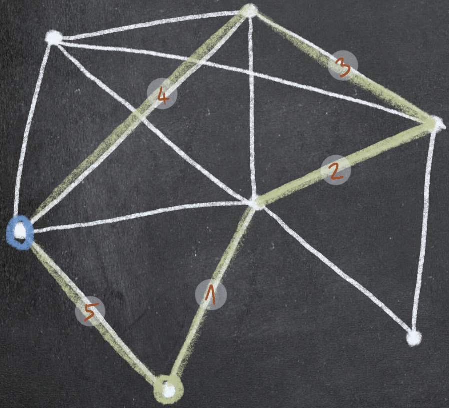


Bővítés:
Ha z bejárta G-t, akkor z zárt Euler-vonal.

Tétel (Hierholzer, kb. 1871)

Ha egy összefüggő gráfban minden csúcs foka páros, akkor van benne zárt Euler-vonal.

Bizonyítás: algoritmust adunk.

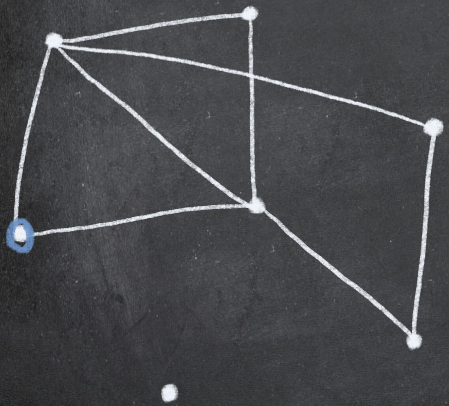


Bővítés:
Ha z bejárta G-t, akkor z zárt Euler-vonal.
Különben:
Bővít(z):
legyen v' bejárt csúcs, amely érintkezik bejáratlan éllel

Tétel (Hierholzer, kb. 1871)

Ha egy összefüggő gráfban minden csúcs foka páros, akkor van benne zárt Euler-vonal.

Bizonyítás: algoritmust adunk.

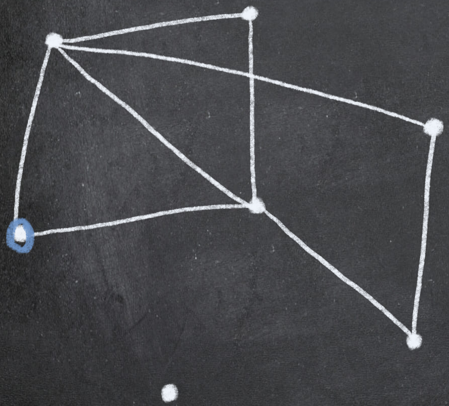


Bővítés:
Ha z bejárta G-t, akkor z zárt Euler-vonal.
Különben:
Bővít(z)*:*
legyen v' bejárt csúcs, amely érintkezik bejáratlan éllel

Tétel (Hierholzer, kb. 1871)

Ha egy összefüggő gráfban minden csúcs foka páros, akkor van benne zárt Euler-vonal.

Bizonyítás: algoritmust adunk.

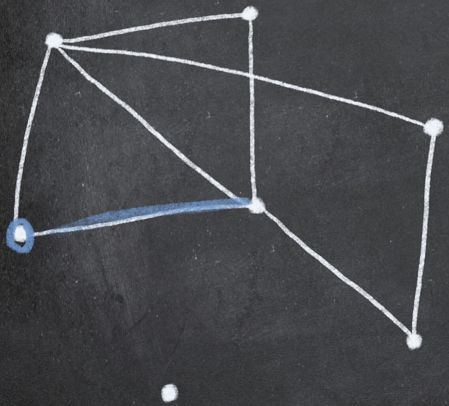


Bővítés:
Ha z bejárta G-t, akkor z zárt Euler-vonal.
Különben:
Bővít(z)*:*
legyen v' bejárt csúcs, amely érintkezik bejáratlan éllel
Keres$(G \setminus z, v')$

Tétel (Hierholzer, kb. 1871)

Ha egy összefüggő gráfban minden csúcs foka páros, akkor van benne zárt Euler-vonal.

Bizonyítás: algoritmust adunk.

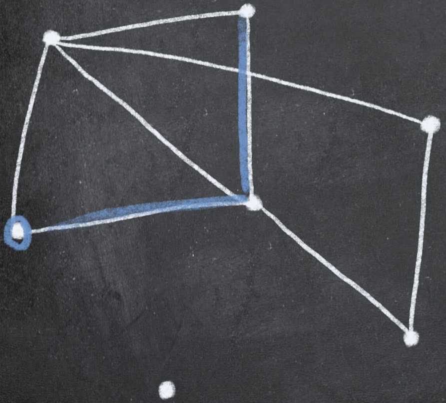


Bővítés:
Ha z bejárta G-t, akkor z zárt Euler-vonal.
Különben:
Bővít(z):
legyen v' bejárt csúcs, amely érintkezik bejáratlan éllel
Keres$(G \setminus z, v')$

Tétel (Hierholzer, kb. 1871)

Ha egy összefüggő gráfban minden csúcs foka páros, akkor van benne zárt Euler-vonal.

Bizonyítás: algoritmust adunk.



Bővítés:

Ha z bejárta G-t, akkor z zárt Euler-vonal.

Különben:

Bővít(z)*:*

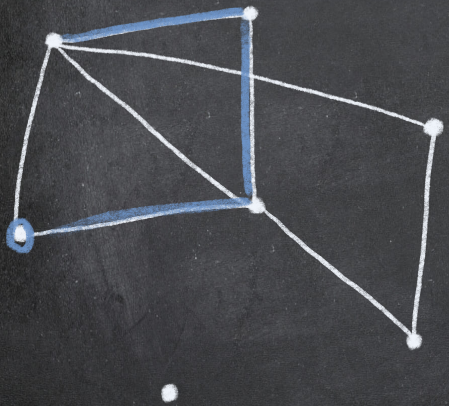
legyen v' bejárt csúcs, amely érintkezik bejáratlan éllel

Keres$(G \setminus z, v')$

Tétel (Hierholzer, kb. 1871)

Ha egy összefüggő gráfban minden csúcs foka páros, akkor van benne zárt Euler-vonal.

Bizonyítás: algoritmust adunk.

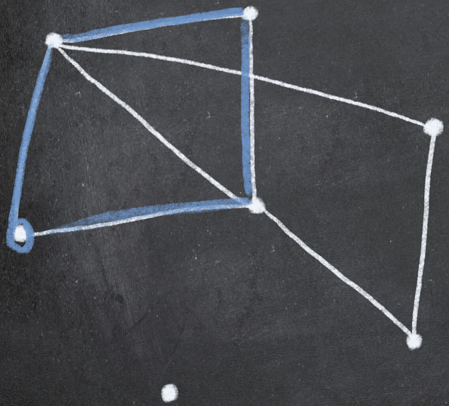


Bővítés:
Ha z bejárta G-t, akkor z zárt Euler-vonal.
Különben:
Bővít(z)*:*
legyen v' bejárt csúcs, amely érintkezik bejáratlan éllel
Keres$(G \setminus z, v')$

Tétel (Hierholzer, kb. 1871)

Ha egy összefüggő gráfban minden csúcs foka páros, akkor van benne zárt Euler-vonal.

Bizonyítás: algoritmust adunk.

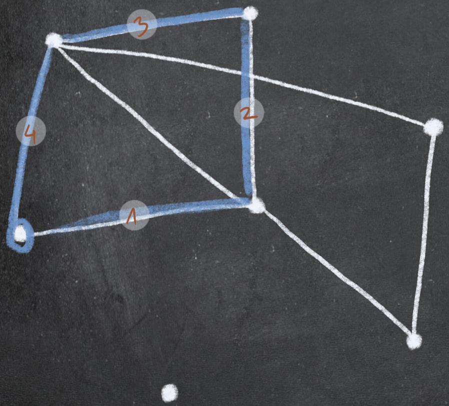


Bővítés:
Ha z bejárta G-t, akkor z zárt Euler-vonal.
Különben:
Bővít(z):
legyen v' bejárt csúcs, amely érintkezik bejáratlan éllel
Keres$(G \setminus z, v')$

Tétel (Hierholzer, kb. 1871)

Ha egy összefüggő gráfban minden csúcs foka páros, akkor van benne zárt Euler-vonal.

Bizonyítás: algoritmust adunk.

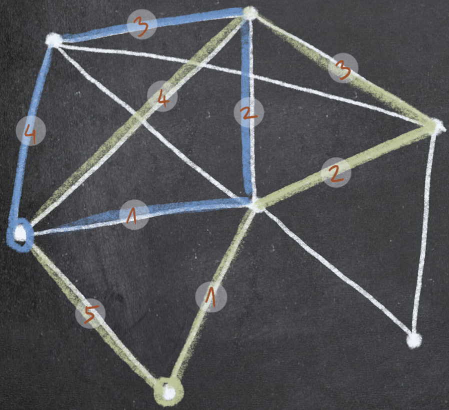


Bővítés:
Ha z bejárta G-t, akkor z zárt Euler-vonal.
Különben:
Bővít(z):
legyen v' bejárt csúcs, amely érintkezik bejáratlan éllel
Keres$(G \setminus z, v') \to z'$ zárt séta

Tétel (Hierholzer, kb. 1871)

Ha egy összefüggő gráfban minden csúcs foka páros, akkor van benne zárt Euler-vonal.

Bizonyítás: algoritmust adunk.



Bővítés:

Ha z bejárta G-t, akkor z zárt Euler-vonal.

Különben:

Bővít(z):

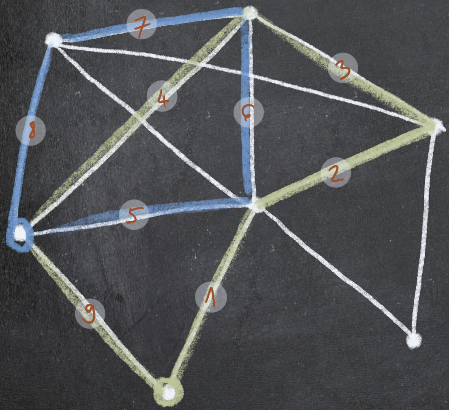
legyen v' bejárt csúcs, amely érintkezik bejáratlan éllel

Keres$(G \setminus z, v') \to z'$ zárt séta

Tétel (Hierholzer, kb. 1871)

Ha egy összefüggő gráfban minden csúcs foka páros, akkor van benne zárt Euler-vonal.

Bizonyítás: algoritmust adunk.



Bővítés:

Ha z bejárta G-t, akkor z zárt Euler-vonal.

Különben:

Bővít(z)*:*

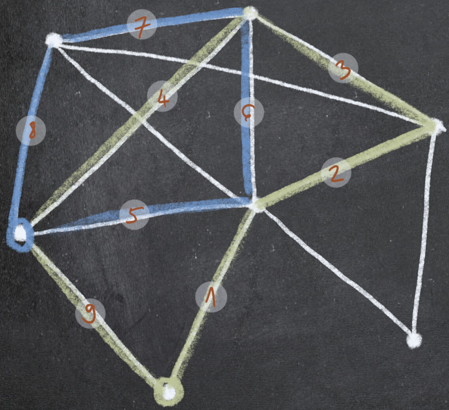
legyen v' bejárt csúcs, amely érintkezik bejáratlan éllel

Keres$(G \setminus z, v') \to z'$ zárt séta

Tétel (Hierholzer, kb. 1871)

Ha egy összefüggő gráfban minden csúcs foka páros, akkor van benne zárt Euler-vonal.

Bizonyítás: algoritmust adunk.

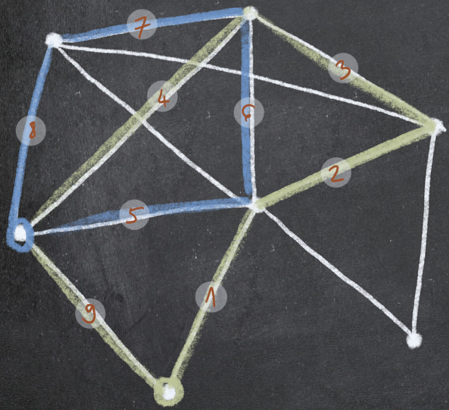


Bővítés:
Ha z bejárta G-t, akkor z zárt Euler-vonal.
Különben:
Bővít(z):
legyen v' bejárt csúcs, amely érintkezik bejáratlan éllel
Keres$(G \setminus z, v') \to z'$ zárt séta
$z := z$ kibővítése z'-vel

Tétel (Hierholzer, kb. 1871)

Ha egy összefüggő gráfban minden csúcs foka páros, akkor van benne zárt Euler-vonal.

Bizonyítás: algoritmust adunk.

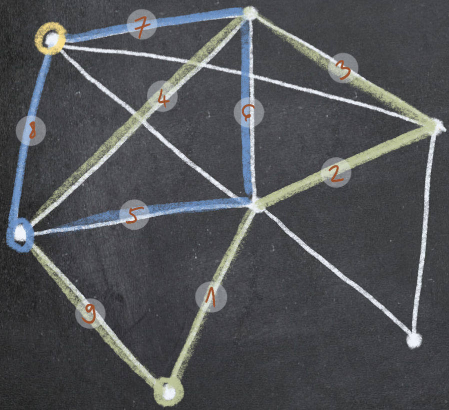


Bővítés:
Ha z bejárta G-t, akkor z zárt Euler-vonal.
Különben:
Bővít(z):
legyen v' bejárt csúcs, amely érintkezik bejáratlan éllel
Keres$(G \setminus z, v') \to z'$ zárt séta
$z := z$ kibővítése z'-vel
Ugrás a ‘Bővítés’-re.

Tétel (Hierholzer, kb. 1871)

Ha egy összefüggő gráfban minden csúcs foka páros, akkor van benne zárt Euler-vonal.

Bizonyítás: algoritmust adunk.

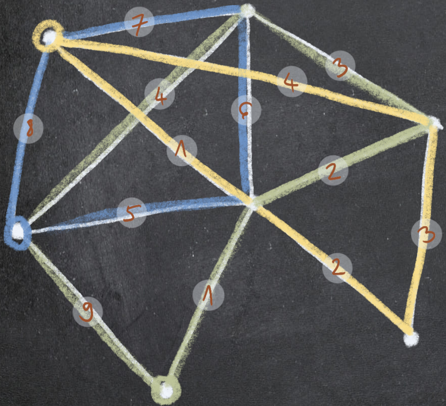


Bővítés:
Ha z bejárta G-t, akkor z zárt Euler-vonal.
Különben:
Bővít(z):
legyen v' bejárt csúcs, amely érintkezik bejáratlan éllel
Keres$(G \setminus z, v') \to z'$ zárt séta
$z := z$ kibővítése z'-vel
Ugrás a 'Bővítés'-re.

Tétel (Hierholzer, kb. 1871)

Ha egy összefüggő gráfban minden csúcs foka páros, akkor van benne zárt Euler-vonal.

Bizonyítás: algoritmust adunk.

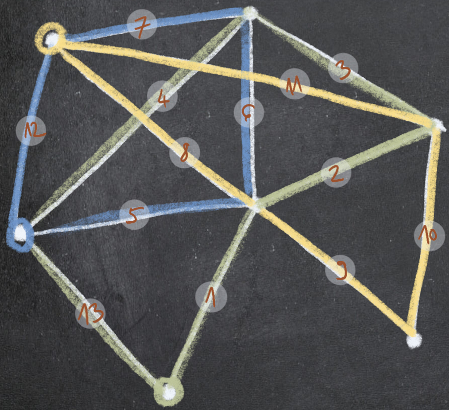


Bővítés:
Ha z bejárta G-t, akkor z zárt Euler-vonal.
Különben:
Bővít(z):
legyen v' bejárt csúcs, amely érintkezik bejáratlan éllel
Keres$(G \setminus z, v') \to z'$ zárt séta
$z := z$ kibővítése z'-vel
Ugrás a 'Bővítés'-re.

Tétel (Hierholzer, kb. 1871)

Ha egy összefüggő gráfban minden csúcs foka páros, akkor van benne zárt Euler-vonal.

Bizonyítás: algoritmust adunk.



Bővítés:
Ha z bejárta G-t, akkor z zárt Euler-vonal.
Különben:
Bővít(z)*:*
legyen v' bejárt csúcs, amely érintkezik bejáratlan éllel
Keres$(G \setminus z, v') \to z'$ zárt séta
$z := z$ kibővítése z'-vel
Ugrás a 'Bővítés'-re.

Tétel

Ha egy összefüggő gráfban 2 páratlan fokú csúcs van, akkor van benne Euler-vonal.

Hogyan főz teát a matematikus és a fizikus?
Mindketten vizet öntenek a kannába, meggyújtják a gázt, ráteszik a kannát, felforralják a vizet, beleteszik a teát.
Hogyan változik a megoldás, ha a kannában már van víz?
A fizikus meggyújtja a gázt, ráteszi a kannát, felforralja a vizet, beleteszi a teát.
A matematikus kiönti a vizet a kannából, és ezzel visszavezeti a problémát a korábban már megoldott feladatra.

Bizonyítás. Kössük össze a 2 páratlan fokú csúcsot egy új éllel. A kapott gráfban van zárt Euler-vonal. Vegyük ki ebből a vonalból az új élt $\rightarrow$ nyílt Euler-vonal.

Hamilton-út

Gyakoribb, hogy nem éleket (útvonalakat), hanem csúcsokat (helyszíneket) szeretnénk látogatni.

Egy nevezetes optimalizálási feladat: az utazóügynök probléma (TSP)
Egy utazóügynöknek végig kell látogatnia néhány várost. Melyik a leggyorsabb útvonal?

Egy rokon probléma: egy gráfban végig szeretnénk látogatni az összes csúcsot. Megtehetjük-e ezt optimálisan – mindet csak egyszer érintve?

Definíció

Hamilton-út: olyan G-beli út, amely minden csúcson áthalad.

Hamilton-kör: olyan G-beli kör, amely minden csúcson áthalad.

Feladat

Keress Hamilton-utakat és köröket a leírásban található linken!

Hamilton-út

Hamilton-út illetve kör létezésére nincsen sem szükséges és elegendő feltétel, és a keresés is lassú (ún. NP-teljes probléma).

Szükséges feltételek:

- Ha G-ben van Hamilton-kör, akkor bármely csúcsát elhagyva összefüggő marad.
- Ha G-ben van Hamilton-út, akkor bármely csúcsát elhagyva legfeljebb két komponensre esik szét.

Egy elégséges feltétel: (bizonyítás nélkül)

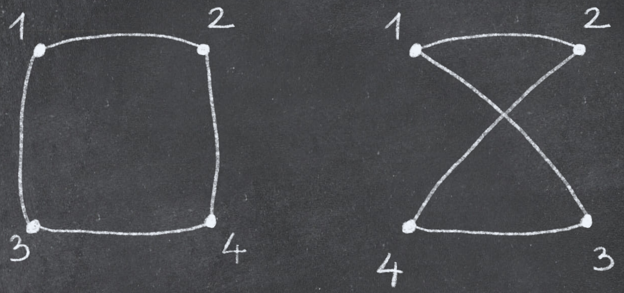
Tétel (Dirac, 1952)

Ha $G = (V, E)$ egyszerű, $|V|$ legalább 3 és bármely $v \in V$ csúcsra $d(v) \geq \frac{|V|}{2}$, akkor G-ben van Hamilton-kör.

Tartalom

Síkgráf

Láttuk: ugyanannak a gráfnak többféle lerajzolása is van.



Definíció

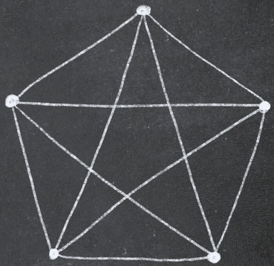
G síkgráf (vagy síkbarajzolható), ha le lehet úgy rajzolni, hogy az élek csak a csúcsokban találkozzanak.

Feladat

Próbáld a leírásban található linken síkbarajzolni a megadott gráfokat!

Két nem-síkgráf

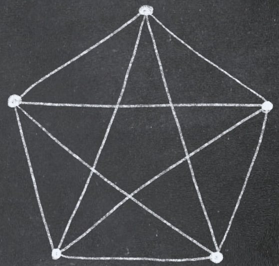
$K_{3,3}$, avagy a 3 ház-3 kút gráf



K_5, avagy az 5-csúcsú teljes gráf

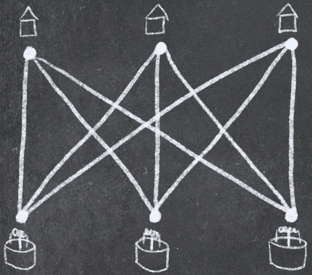
Két nem-síkgráf

$K_{3,3}$, avagy a 3 ház-3 kút gráf

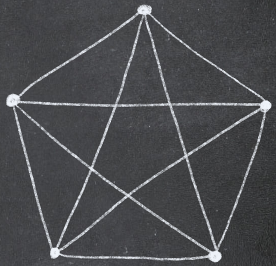


K_5, avagy az 5-csúcsú teljes gráf

Két nem-síkgráf

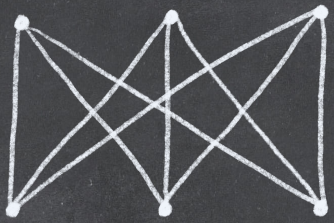


$K_{3,3}$, avagy a 3 ház-3 kút gráf

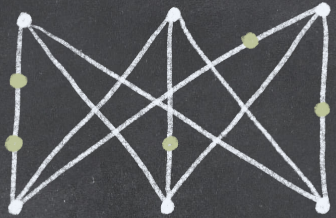


K_5, avagy az 5-csúcsú teljes gráf

Hát még mi nem síkgráf?

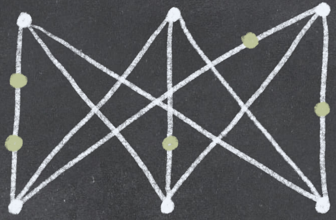


Hát még mi nem síkgráf?



A G gráf egy felosztása: bizonyos élekre új csúcsokat biggyesztünk, így több élre osztva őket

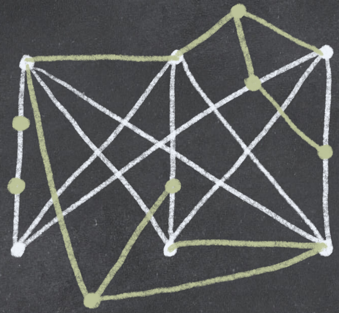
Hát még mi nem síkgráf?



A G gráf egy felosztása: bizonyos élekre új csúcsokat biggyesztünk, így több élre osztva őket

Vegyük észre: ha G nem síkgráf, akkor a felosztásai sem síkgráfok.

Hát még mi nem síkgráf?



A G gráf egy felosztása: bizonyos élekre új csúcsokat biggyesztünk, így több élre osztva őket

Vegyük észre: ha G nem síkgráf, akkor a felosztásai sem síkgráfok.

Továbbá ha G-nek van nem síkbarajzolható részgráfja, akkor G sem síkgráf.

Minden más síkgráf

Tétel (Kuratowski, 1930)

G pontosan akkor síkgráf, ha nem található meg benne részgráfként K_5 *vagy* $K_{3,3}$ *valamely felosztása.*

Tartalom

Feladat

Rajzold le (izomorfiától eltekitve) az összes olyan 5-csúcsú gráfot, amely összefüggő, és nem tartalmaz kört (azaz körmentes).

Fák

Definíció

A körmentes, összefüggő gráfokat fáknak nevezzük.
A körmentes gráfokat erdőnek nevezzük, hiszen az összefüggő komponensei fák.

Tétel

A következők ekvivalensek tetszőleges $G = (V, E)$ gráf esetén:

1. *G fa (összefüggő, körmentes)*
2. *G összefüggő, és bármely élt elvéve G-ből a kapott gráf nem összefüggő*
3. *G körmentes, és G-hez tetszőlges módon új élt adva az új gráfban lesz kör*

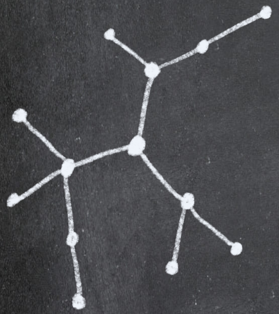
Bizonyítás.
1 $\iff$ 2: ha G össszefüggő és e él G-ben, akkor $G \setminus e$ összefüggő $\iff$ tartalmaz utat e két végpontja között $\iff$ G-ben van e-t tartalmazó kör.

1 $\iff$ 3: ha G körmentes és $u \neq v$ csúcsok, akkor $G \cup \{u, v\}$-ben van kör $\iff$ G-ben van út u-ból v-be.

Még élek?

Feladat

Egy fának n csúcsa van. Hány éle lehet?

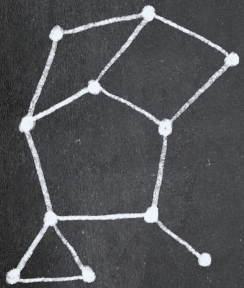


Feladat

Egy erdőnek n csúcsa van és k komponense. Hány éle lehet?

Feszítőfa

Tetszőleges G összefüggő gráfban elkezdhetjük egy adott csúcsból ‘feltérképezni’ a többit:



Így kapunk egy fát, amely G-nek részgráfja, és minden csúcsát tartalmazza: feszítőfa.

Ha G nem összefüggő, akkor minden komponensének van feszítőfája (feszítőerdő).

Tétel

A következők ekvivalensek tetszőleges véges $G = (V, E)$ gráf esetén:

1. *G fa*
2. *G összefüggő, és eggyel kevesebb éle van, mint csúcsa*
3. *G körmentes, és eggyel kevesebb éle van, mint csúcsa*

Bizonyítás.
$1 \iff 2$: ha G összefüggő, akkor G fa $\iff$ minden élét tartalmazza egy (az egyetlen) feszítőfája $\iff$ $|V| - 1$ éle van.

$1 \iff 3$: G körmentes $\iff$ erdő. Ha k komponense van, akkor $|V| - k$ éle. Egy komponens $\iff$ $|V| - 1$ él.