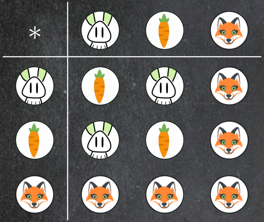
ALGEBRAI KONSTRUKCIÓK

Waldhauser Tamás

SZTE Bolyai Intézet

Tartalom

Asszociatív-e ez a művelet?



Asszociatív-e ez a művelet?

$*$	🐰	🥕	0
🐰	🥕	🐰	0
🥕	🐰	🥕	0
0	0	0	0

$\forall a$: $a *$ 🦊 $=$ 🦊 $* a =$ 🦊

$\forall a$: $a *$ 🥕 $=$ 🥕 $* a = a$

Asszociatív-e ez a művelet?

$*$		1	0
	1		0
1		1	0
0	0	0	0

$\forall a\colon\ a *$  $=$  $* a =$ 

$\forall a\colon\ a *$  $=$  $* a = a$

Asszociatív-e ez a művelet?

$*$	2	1	0
2	1	2	0
1	2	1	0
0	0	0	0

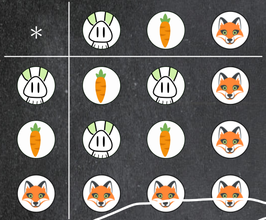
Asszociatív-e ez a művelet?

$\cdot$	$\overline{2}$	$\overline{1}$	$\overline{0}$
$\overline{2}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$	$\overline{0}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$

Asszociatív-e ez a művelet?

$\cdot$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$

Asszociatív-e ez a művelet? IGEN!

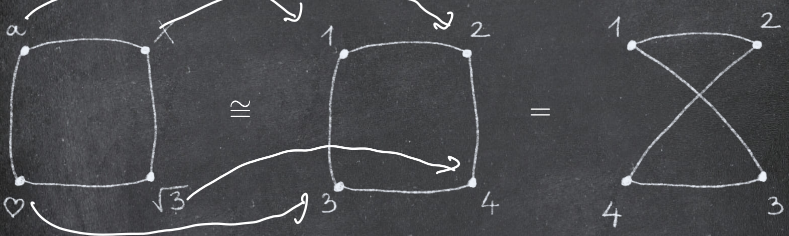


$\cong$

$\cdot$	$\overline{2}$	$\overline{1}$	$\overline{0}$
$\overline{2}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$	$\overline{0}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$

$=$

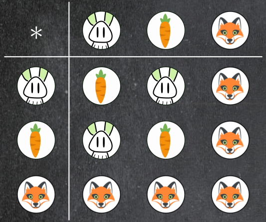
$\cdot$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$



izomorfizmus: $\varphi : \{a, X, \heartsuit, \sqrt{3}\} \to \{1,2,3,4\}$ bijekció,
ami megőrzi a struktúrát:

$$\forall u,v:\ \{u,v\} \in E(G) \iff \{u\varphi, v\varphi\} \in E(H)$$

Asszociatív-e ez a művelet? IGEN!

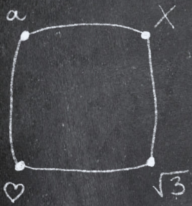


$\cong$

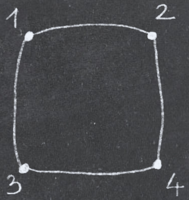
$\cdot$	$\overline{2}$	$\overline{1}$	$\overline{0}$
$\overline{2}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$	$\overline{0}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$

$=$

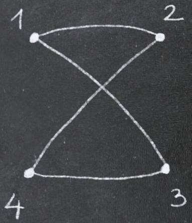
$\cdot$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$



$\cong$



$=$



izomorfizmus: φ : {, , } $\to \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}\}$ bijekció,
ami megőrzi a struktúrát:

$$\forall u, v, w:\ \ u * v = w \iff u\varphi \cdot v\varphi = \underbrace{w\varphi}_{(u*v)\varphi}$$

Definíció

Az $\mathbb{A} = (A; *)$ és $\mathbb{B} = (B; \circ)$ grupoidok izomorfak (jelölés: $\mathbb{A} \cong \mathbb{B}$), ha létezik $\mathbb{A} \to \mathbb{B}$ izomorfizmus, azaz olyan $\varphi\colon\ A \to B$ bijekció, amelyre

$$\forall a_1, a_2 \in A\colon\ (a_1 * a_2)\varphi = a_1\varphi \circ a_2\varphi.$$

$\mathbb{A}$

$$\begin{tikzcd} a_1, a_2 \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "*"'] & a_1\varphi, a_2\varphi \arrow[d, "\circ"] \\ a_1 * a_2 \arrow[r, "\varphi"'] & (a_1 * a_2)\varphi = a_1\varphi \circ a_2\varphi \end{tikzcd}$$

$\mathbb{B}$

Tétel

Izomorfizmusok szorzata és inverze is izomorfizmus.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{A} \arrow[r] \arrow[rr, bend right] & \mathbb{B} \arrow[r] & \mathbb{C} \end{tikzcd}$$

Következmény

Az izomorfia ekvivalenciareláció (grupoidok bármely halmazán).

Példa

Adjunk meg izomorfizmust az $\mathbb{A} = (\{\mathtt{igaz}, \mathtt{hamis}\}; \leftrightarrow)$ és $\mathbb{B} = (\mathbb{Z}_2; +)$ grupoidok között.

$\leftrightarrow$	i	h
i	i	h
h	h	i

$\cdot$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$

Az izomorfizmus:

$$\varphi\colon \{\mathtt{i}, \mathtt{h}\} \to \{\bar{0}, \bar{1}\}, \quad \mathtt{i} \mapsto \bar{0},\ \mathtt{h} \mapsto \bar{1}.$$

Ellenőrzés:

$$\begin{aligned}
\bar{0} = (\overbrace{\mathtt{i} \leftrightarrow \mathtt{i}}^{\mathtt{i}})\varphi &= \overbrace{\mathtt{i}\varphi}^{\bar{0}} \cdot \overbrace{\mathtt{i}\varphi}^{\bar{0}} = \bar{0} \\
(\mathtt{i} \leftrightarrow \mathtt{h})\varphi &= \mathtt{i}\varphi \cdot \mathtt{h}\varphi \\
(\mathtt{h} \leftrightarrow \mathtt{i})\varphi &= \mathtt{h}\varphi \cdot \mathtt{i}\varphi \\
(\mathtt{h} \leftrightarrow \mathtt{h})\varphi &= \mathtt{h}\varphi \cdot \mathtt{h}\varphi
\end{aligned}$$

Példa

Adjunk meg izomorfizmust az $\mathbb{A} = (\{1, -1, i, -i\}; \cdot)$ és $\mathbb{B} = (\mathbb{Z}_4; +)$ grupoidok között.

$$
\begin{array}{cccc}
1 \mapsto \overline{0}, & -1 \mapsto \overline{2}, & i \mapsto \overline{1}, & -i \mapsto \overline{3} \\
i \mapsto \overline{1}, & -1 \mapsto \overline{2}, & -i \mapsto \overline{3}, & 1 \mapsto \overline{0}
\end{array}
$$

Tömörebben: $\varphi\colon \{1, -1, i, \underset{-i}{\cancel{-1}}\} \to \mathbb{Z}_4,\ \ i^k \mapsto \overline{k}.$

Ez a leképezés azért bijektív, mert
$\forall k, \ell \in \mathbb{Z}\colon\ \ i^k = i^\ell \iff k \equiv \ell \pmod 4)$

A műveletekkel való felcserélhetőség pedig a hatványozás egyik azonosságán múlik:

$$(\underset{a_1}{\underset{\shortparallel}{i^k}} \cdot \underset{a_2}{\underset{\shortparallel}{i^\ell}})\varphi = i^{k+\ell}\varphi = \overline{k+\ell} = \overline{k} + \overline{\ell} = \underset{a_1\varphi}{\underset{\shortparallel}{i^k\varphi}} + \underset{a_2\varphi}{\underset{\shortparallel}{i^\ell\varphi}}.$$

Példa

Izomorf-e az $\mathbb{A}$ grupoid $\mathbb{B}$ és $\mathbb{C}$ közül valamelyikkel?

$\mathbb{A} = (\{\texttt{igaz}, \texttt{hamis}\}; \to)$, $\quad \mathbb{B} = (\{0,1\}; \circ)$, $\quad \mathbb{C} = (\{0,1\}; *)$

$\circ$	0	1
0	1	1
1	0	1

$*$	0	1
0	0	0
1	0	1

$\mathbb{A} \cong \mathbb{B}$ a következő izomorfizmus mellett: $\texttt{igaz} \mapsto 1$, $\texttt{hamis} \mapsto 0$.

$\mathbb{A} \ncong \mathbb{C}$, mert $\mathbb{C}$ kommutatív, de $\mathbb{A}$ nem.

Tartalom

Definíció

Legyen $\mathbb{A} = (A; *)$ egy grupoid és $B \subseteq A$. Azt mondjuk, hogy a B részhalmaz zárt (a $*$ műveletre), ha

$$\forall b_1, b_2 \in B : \ b_1 * b_2 \in B.$$

Ha B *nemüres* zárt részhalmaz, akkor van értelme megszorítani a $*$ műveletet a B halmazra, és így egy $\mathbb{B} = (B; *)$ grupoidot kaptunk, amelyet $\mathbb{A}$ részalgebrájának nevezünk. Jelölés: $\mathbb{B} \leq \mathbb{A}$.

Példa

Keressünk részalgebrákat az alábbi grupoidban.

$*$	a	b	c	d
a	a	b	c	b
b	b	b	b	b
c	c	b	c	a
d	d	b	b	a

$\{a, b\}$ részalgebra

$\{a, c\}$ részalgebra

$\{c, d\}$ NEM részalgebra

Definíció

Legyen $\mathbb{A} = (A; *)$ egy grupoid és $\emptyset \neq B \subseteq A$. A B részhalmaz által generált részalgebrán az $\mathbb{A}$ algebra *legszűkebb* olyan részalgebráját értjük, ami tartalmazza B-t. Jelölés: $[B]$.

A B halmaz által generált részalgebra nem más, mint. . .

- az összes B-t tartalmazó részalgebrák metszete;
- azon A-beli elemek halmaza, amelyek megkaphatók B elemeiből kiindulva a $*$ művelet véges számú alkalmazásával.

Ha $[B] = A$, akkor azt mondjuk, hogy B generátorrendszere $\mathbb{A}$-nak.

Példa

Generáljunk részalgebrákat az alábbi grupoidban.

$*$	a	b	c	d
a	a	b	c	b
b	b	b	b	b
c	c	b	c	a
d	d	b	b	a

$[c,d] = \{c,d,a,b\} = A$

$[a,b] = \{a,b\}$

$[a,d] = \{a,d,b\}$

Példa

Határozzuk meg az $(\mathbb{N};+)$ félcsoportban a $[2,9]$ részfélcsoportot.

Az a kérdés, milyen számokat lehet „felépíteni” a 2 és 9 számokból összeadással.

Próbálkozzunk: $[2,9]=\{2,9,11,4,13,20,\ldots\}=?$

Próbálkozzunk szisztematikusan:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & 14 & \cdots \\
9 & 11 & 13 & 15 & 17 & 19 & 21 & 23 & \cdots \\
18 & 20 & 22 & 24 & 26 & 28 & 30 & 32 & \cdots \\
27 & 29 & 31 & 33 & 35 & 37 & 39 & 41 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}$$

Tehát $[2,9]=\{2,4,6,8,9,10,11,12,13,14,15,\ldots\}=\mathbb{N}\setminus\{1,3,5,7\}$.

Példa

Határozzuk meg az $(\mathbb{N}; \cdot)$ félcsoportban a $[2, 9]$ részfélcsoportot.

Az a kérdés, milyen számokat lehet „felépíteni” a 2 és 9 számokból szorzással.

Ha k darab 2-est és ℓ darab 9-est szorzunk, akkor a $2^k \cdot 9^\ell = 2^k \cdot 3^{2\ell}$ számot kapjuk.

Tehát $[2, 9] = \{2^k \cdot 3^{2\ell} : k, \ell \in \mathbb{N}_0\}$. $\setminus \{1\}$

1-nél nagyobb

Szavakkal megfogalmazva: egy természetes szám akkor és csak akkor van benne a $[2, 9]$ félcsoportban, ha prímfelbontásában csak 2-es és 3-as szerepel, és 3 kitevője páros.

Tartalom

Emlékeztető

A számelméleti kongruenciareláció fontos tulajdonságai:

- ekvivalenciareláció (reflexív, szimmetrikus, tranzitív);
- „szabad'' kongruenciákat összeadni és összeszorozni:

$$\left.\begin{aligned} a_1 &\equiv b_1 \pmod{m} \\ a_2 &\equiv b_2 \pmod{m} \end{aligned}\right\} \implies \begin{aligned} a_1 + a_2 &\equiv b_1 + b_2 \pmod{m}, \\ a_1 \cdot a_2 &\equiv b_1 \cdot b_2 \pmod{m}. \end{aligned}$$

Ez a kompatibilitási tulajdonság lehetővé teszi, hogy maradékosztályokat reprezentánsaik segítségével adjunk és szorozzunk össze, és ezek a műveletek jóldefiniáltak lesznek.

Példa

Modulo 7 maradékosztályok összeadása:

$$\{\ldots,-5,2,9,16,\ldots\}+\{\ldots,-3,4,11,18,\ldots\}=\overline{2}+\overline{4}=\overline{6}=$$
$$=\{\ldots,-1,6,13,20,\ldots\}$$

$$\{\ldots,-5,2,9,16,\ldots\}+\{\ldots,-3,4,11,18,\ldots\}=\overline{9}+\overline{11}=\overline{20}=$$
$$=\{\ldots,-1,6,13,20,\ldots\}$$

Az eredmény nem függ a reprezentánsok választásától.

Példa

A $(\mathbb{Z}_3; +, \cdot)$ gyűrű művelettáblázatai:

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, \ldots\}$$

$+$	${\color{blue}\blacksquare}$	${\color{red}\blacksquare}$	${\color{green}\blacksquare}$
${\color{blue}\blacksquare}$	${\color{blue}\blacksquare}$	${\color{red}\blacksquare}$	${\color{green}\blacksquare}$
${\color{red}\blacksquare}$	${\color{red}\blacksquare}$	${\color{green}\blacksquare}$	${\color{blue}\blacksquare}$
${\color{green}\blacksquare}$	${\color{green}\blacksquare}$	${\color{blue}\blacksquare}$	${\color{red}\blacksquare}$

$\cdot$	${\color{blue}\blacksquare}$	${\color{red}\blacksquare}$	${\color{green}\blacksquare}$
${\color{blue}\blacksquare}$	${\color{blue}\blacksquare}$	${\color{blue}\blacksquare}$	${\color{blue}\blacksquare}$
${\color{red}\blacksquare}$	${\color{blue}\blacksquare}$	${\color{red}\blacksquare}$	${\color{green}\blacksquare}$
${\color{green}\blacksquare}$	${\color{blue}\blacksquare}$	${\color{green}\blacksquare}$	${\color{red}\blacksquare}$

${\color{blue}\blacksquare} = \{\ldots, -3, 0, 3, 6, 9, \ldots\}$

${\color{red}\blacksquare} = \{\ldots, -2, 1, 4, 7, 10, \ldots\}$

${\color{green}\blacksquare} = \{\ldots, -1, 2, 5, 8, 11, \ldots\}$

Definíció

Legyen $\mathbb{A} = (A; *)$ egy grupoid, és legyen $\sim$ egy ekvivalenciareláció az A halmazon. Azt mondjuk, hogy $\sim$ kongruenciarelációja az $\mathbb{A}$ algebrának, ha tetszőleges $a_1, a_2, b_1, b_2 \in A$ elemek esetén

$$\left.\begin{array}{l} a_1 \sim b_1 \\ a_2 \sim b_2 \end{array}\right\} \implies a_1 * a_2 \ \sim \ b_1 * b_2.$$

Definíció

Legyen $\mathbb{A} = (A; *)$ egy grupoid, és legyen $\mathcal{C}$ egy osztályozás az A halmazon. Azt mondjuk, hogy $\mathcal{C}$ kompatibilis osztályozása az $\mathbb{A}$ algebrának, ha tetszőleges $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$ osztályokhoz létezik egy olyan $D \in \mathcal{C}$ osztály, amelyre

$$\{\, a_1 * a_2 \mid a_1 \in C_1,\, a_2 \in C_2 \,\} \subseteq D = C_1 \circledast C_2.$$

Trivialitás

Egy ekvivalenciareláció akkor és csak akkor kongruencia, ha a hozzá tartozó osztályozás kompatibilis.

Definíció

Legyen $\mathbb{A} = (A; *)$ egy grupoid, legyen $\sim$ egy kongruenciarelációja $\mathbb{A}$-nak, és legyen $\mathcal{C} = A/{\sim}$ a megfelelő kompatibilis osztályozás.
Értelmezzük a kongruenciaosztályok halmazán a $\circledast$ műveletet a következőképpen: tetszőleges $C_1, C_2 \in A/{\sim}$ esetén legyen $C_1 \circledast C_2$ az az egyértelműen meghatározott $D \in A/{\sim}$ kongruenciaosztály, amelyre

$$\{\, a_1 * a_2 \mid a_1 \in C_1,\ a_2 \in C_2 \,\} \subseteq D.$$

Az így kapott $\mathbb{A}/{\sim} = (A/{\sim}; \circledast)$ algebrát nevezzük az $\mathbb{A}$ algebra $\sim$ kongruencia szerinti faktoralgebrájának.

Megjegyzés

Általában $\overline{a}$ jelöli az $a \in A$ elem $\sim$ szerinti ekvivalenciaosztályát. Ezzel a jelöléssel a faktoralgebra művelete így definiálható:

$$\overline{a_1} \circledast \overline{a_2} = \overline{a_1 * a_2}.$$

Az osztályozás kompatibilitása garantálja, hogy ez a művelet jóldefiniált, azaz az eredmény nem függ a reprezentánsok választásától.

Példa

Kompatibilis osztályozása-e $\mathcal{C} = \{\{a, b\}, \{c, d\}, \{e\}\}$ az alábbi grupoidnak? Ha igen, írjuk fel az $\mathbb{A}/\sim$ faktoralgebra műveleti táblázatát.

$$\mathbb{A} = \begin{array}{c|ccccc} * & a & b & c & d & e \\ \hline a & c & b & c & c & e \\ b & a & c & c & e & c \\ c & a & e & c & c & e \\ d & a & d & c & d & d \\ e & a & c & c & e & c \end{array}$$

Nem, pl. $a \sim b$ és $c \sim d$, de $a * c \nsim b * d$ (azaz ■ $\circledast$ ■ nem jóldefiniált).

Példa

Kompatibilis osztályozása-e $\mathcal{C} = \big\{\{a\}, \{b, c, d, e\}\big\}$ az alábbi grupoidnak? Ha igen, írjuk fel az $\mathbb{A}/\!\sim$ faktoralgebra művelettáblázatát.

$\mathbb{A} =$

$*$	a	b	c	d	e
a	c	b	c	c	e
b	a	c	c	e	c
c	a	e	c	c	e
d	a	d	c	d	d
e	a	c	c	e	c

Igen, bármely két szín szorzata jóldefiniált:

$${\color{red}\blacksquare} \circledast {\color{red}\blacksquare} = {\color{blue}\blacksquare}, \quad {\color{red}\blacksquare} \circledast {\color{blue}\blacksquare} = {\color{blue}\blacksquare}, \quad {\color{blue}\blacksquare} \circledast {\color{red}\blacksquare} = {\color{red}\blacksquare}, \quad {\color{blue}\blacksquare} \circledast {\color{blue}\blacksquare} = {\color{blue}\blacksquare}.$$

Példa

Kompatibilis osztályozása-e $\mathcal{C} = \{\{a\}, \{b, c, d, e\}\}$ az alábbi grupoidnak? Ha igen, írjuk fel az $\mathbb{A}/\sim$ faktoralgebra műveletttáblázatát.

$\mathbb{A} =$

$*$	a	b	c	d	e
a	c	b	c	c	e
b	a	c	c	e	c
c	a	e	c	c	e
d	a	d	c	d	d
e	a	c	c	e	c

$\circledast$	🟥	🟦
🟥	🟦	🟦
🟦	🟥	🟦

Példa

Kompatibilis osztályozása-e $\mathcal{C} = \{\{a\}, \{b, c, d, e\}\}$ az alábbi grupoidnak? Ha igen, írjuk fel az $\mathbb{A}/\sim$ faktoralgebra művelettáblázatát.

$$\mathbb{A} = \begin{array}{c|ccccc} * & a & b & c & d & e \\ \hline a & c & b & c & c & e \\ b & a & c & c & e & c \\ c & a & e & c & c & e \\ d & a & d & c & d & d \\ e & a & c & c & e & c \end{array}$$

$\{a\} \circledast \{b, c, d, e\}$

$\neq$

$\{b, c, e\}$

$$\mathbb{A}/\sim \; = \begin{array}{c|cc} \circledast & \{a\} & \{b, c, d, e\} \\ \hline \{a\} & \{b, c, d, e\} & \{b, c, d, e\} \\ \{b, c, d, e\} & \{a\} & \{b, c, d, e\} \end{array}$$

Példa

Kompatibilis osztályozása-e $\mathcal{C} = \{\{a\}, \{b, c, d, e\}\}$ az alábbi grupoidnak? Ha igen, írjuk fel az $\mathbb{A}/\sim$ faktoralgebra művelettáblázatát.

$$\mathbb{A} = \begin{array}{c|ccccc} * & a & b & c & d & e \\ \hline a & c & b & c & c & e \\ b & a & c & c & e & c \\ c & a & e & c & c & e \\ d & a & d & c & d & d \\ e & a & c & c & e & c \end{array}$$

$$\mathbb{A}/\sim \; = \begin{array}{c|cc} \circledast & U & V \\ \hline U & V & V \\ V & U & V \end{array}, \quad \text{ahol } U = \{a\} \text{ és } V = \{b, c, d, e\}.$$

Példa

Kompatibilis osztályozása-e $\mathcal{C} = \big\{\{a\}, \{b, c, d, e\}\big\}$ az alábbi grupoidnak? Ha igen, írjuk fel az $\mathbb{A}/\!\sim$ faktoralgebra művesettáblázatát.

$$\mathbb{A} = \begin{array}{c|ccccc} * & a & b & c & d & e \\ \hline a & c & b & c & c & e \\ b & a & c & c & e & c \\ c & a & e & c & c & e \\ d & a & d & c & d & d \\ e & a & c & c & e & c \end{array}$$

$$\mathbb{A}/\!\sim \;=\; \begin{array}{c|cc} \circledast & \overline{a} & \overline{b} \\ \hline \overline{a} & \overline{b} & \overline{b} \\ \overline{b} & \overline{a} & \overline{b} \end{array}, \qquad \text{ahol } \overline{a} = \{a\} \text{ és } \overline{b} = \{b, c, d, e\}.$$

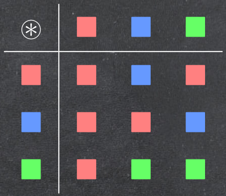
Pl. $\overline{a} \circledast \overline{a} = \overline{a * a} = \overline{c} = \overline{b}$.

Példa

Kompatibilis osztályozása-e $\mathcal{C} = \{\{a, c\}, \{b, e\}, \{d\}\}$ az alábbi grupoidnak? Ha igen, írjuk fel az $\mathbb{A}/\!\sim$ faktoralgebra művelettáblázatát.

$\mathbb{A} =$

$*$	a	b	c	d	e
a	c	b	c	c	e
b	a	c	c	e	c
c	a	e	c	c	e
d	a	d	c	d	d
e	a	c	c	e	c



Példa

Kompatibilis osztályozása-e $\mathcal{C} = \{\{a, c\}, \{b, e\}, \{d\}\}$ az alábbi grupoidnak? Ha igen, írjuk fel az $\mathbb{A}/\!\sim$ faktoralgebra műveleттáblázatát.

$$\mathbb{A} = \begin{array}{c|ccccc} * & a & b & c & d & e \\ \hline a & c & b & c & c & e \\ b & a & c & c & e & c \\ c & a & e & c & c & e \\ d & a & d & c & d & d \\ e & a & c & c & e & c \end{array}$$

$$\mathbb{A}/\!\sim\; = \begin{array}{c|ccc} \circledast & \{a, c\} & \{b, e\} & \{d\} \\ \hline \{a, c\} & \{a, c\} & \{b, e\} & \{a, c\} \\ \{b, e\} & \{a, c\} & \{a, c\} & \{b, e\} \\ \{d\} & \{a, c\} & \{d\} & \{d\} \end{array}$$

Példa

Kompatibilis osztályozása-e $\mathcal{C} = \{\{a, c\}, \{b, e\}, \{d\}\}$ az alábbi grupoidnak? Ha igen, írjuk fel az $\mathbb{A}/\!\sim$ faktoralgebra művelettáblázatát.

$$\mathbb{A} = \begin{array}{c|ccccc} * & a & b & c & d & e \\ \hline a & c & b & c & c & e \\ b & a & c & c & e & c \\ c & a & e & c & c & e \\ d & a & d & c & d & d \\ e & a & c & c & e & c \end{array}$$

$$\mathbb{A}/\!\sim \; = \begin{array}{c|ccc} \circledast & U & V & W \\ \hline U & U & V & U \\ V & U & U & V \\ W & U & W & W \end{array}, \quad \text{ahol } U = \{a, c\},\ V = \{b, e\},\ W = \{d\}.$$

Példa

Kompatibilis osztályozása-e $\mathcal{C} = \{\{a, c\}, \{b, e\}, \{d\}\}$ az alábbi grupoidnak? Ha igen, írjuk fel az $\mathbb{A}/\!\sim$ faktoralgebra művelettáblázatát.

$$\mathbb{A} = \begin{array}{c|ccccc} * & a & b & c & d & e \\ \hline a & c & b & c & c & e \\ b & a & c & c & e & c \\ c & a & e & c & c & e \\ d & a & d & c & d & d \\ e & a & c & c & e & c \end{array}$$

$$\mathbb{A}/\!\sim \; = \begin{array}{c|ccc} \circledast & \overline{a} & \overline{b} & \overline{d} \\ \hline \overline{a} & \overline{a} & \overline{b} & \overline{a} \\ \overline{b} & \overline{a} & \overline{a} & \overline{b} \\ \overline{d} & \overline{a} & \overline{d} & \overline{d} \end{array}, \quad \text{ahol } \overline{a} = \{a, c\},\ \overline{b} = \{b, e\} \text{ és } \overline{d} = \{d\}.$$

Példa

Határozzuk meg az $(\mathbb{R};\cdot)$ algebra $\sim$ szerinti faktoralgebráját, ahol

$$a \sim b \iff \operatorname{sgn} a = \operatorname{sgn} b.$$

$$\mathbb{R}/\!\sim\; = \{\, \mathbb{R}^+, \mathbb{R}^-, \{0\} \,\}$$

$$(\mathbb{R};\cdot)/\!\sim\; = \begin{array}{c|ccc} \cdot & \{0\} & \mathbb{R}^+ & \mathbb{R}^- \\ \hline \{0\} & \{0\} & \{0\} & \{0\} \\ \mathbb{R}^+ & \{0\} & \mathbb{R}^+ & \mathbb{R}^- \\ \mathbb{R}^- & \{0\} & \mathbb{R}^- & \mathbb{R}^+ \end{array} \cong \begin{array}{r|rrr} \cdot & 0 & +1 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ +1 & 0 & +1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & +1 \end{array}$$

$(\{0,1,-1\};\cdot) \leq (\mathbb{R};\cdot)$

Példa

Határozzuk meg az $(\mathbb{R};+)$ algebra $\sim$ szerinti faktoralgebráját, ahol

$$a \sim b \iff \operatorname{sgn} a = \operatorname{sgn} b.$$

Ez nem kongruencia, mert az összeg előjelét nem határozza meg egyértelműen az összeadandók előjele.

Például $2 \sim 5$ és $-6 \sim -4$, de $\underbrace{(2+(-6))}_{\shortparallel \atop -4} \nsim \underbrace{(5+(-4))}_{\shortparallel \atop +1}$.

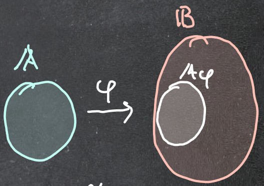
Tartalom

Definíció

Legyen $\mathbb{A} = (A; *)$ és $\mathbb{B} = (B; \circ)$ két grupoid. Azt mondjuk, hogy a $\varphi\colon A \to B$ leképezés homomorfizmus $\mathbb{A}$-ról $\mathbb{B}$-be, ha φ felcserélhető a műveletekkel, azaz

$$\forall a_1, a_2 \in A: \quad (a_1 * a_2)\varphi \; = \; a_1\varphi \circ a_2\varphi.$$

Ha létezik $\varphi\colon \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ szürjektív homorfizmus, akkor azt mondjuk, hogy $\mathbb{B}$ homomorf képe $\mathbb{A}$-nak.



$$\mathbb{A} \xrightarrow{\cong} \mathbb{A}\varphi \le \mathbb{B}$$

Speciális homomorifzmusok:

- bijektív homomorfizmus = izomorfizmus,
- injektív homomorfizmus = beágyazás,
- $\mathbb{A} \to \mathbb{A}$ homomorfizmus = endomorfizmus,
- bijektív $\mathbb{A} \to \mathbb{A}$ homomorfizmus = automorfizmus.

Tétel

Homomorfizmusok szorzata is homomorfizmus.

Példák

- $\varphi\colon (\mathbb{R}^+;\cdot) \to (\mathbb{R};+),\ x \mapsto \log x$ — izomorfizmus
- $\varphi\colon (\mathbb{C};+,\cdot) \to (\mathbb{C};+,\cdot),\ z \mapsto \overline{z}$ — automorfizmus
- $\varphi\colon (\mathbb{C};+) \to (\mathbb{C};+),\ z \mapsto \operatorname{Re} z$ — endomorfizmus
- $\varphi\colon (\mathbb{C};+) \to (\mathbb{R};+),\ z \mapsto \operatorname{Re} z$ — szürjektív homomorfizmus
- $\varphi\colon (\mathbb{C};\cdot) \to (\mathbb{R};\cdot),\ z \mapsto \operatorname{Re} z$ — nem homomorfizmus
- $\varphi\colon (\mathbb{R};+,\cdot) \to (\mathbb{C};+,\cdot),\ x \mapsto x$ — beágyazás
- $\varphi\colon (\mathbb{R}^{n\times n};\cdot) \to (\mathbb{R};\cdot),\ M \mapsto \det M$ — szürjektív homomorfizmus
- $\varphi\colon (C[0,1];+) \to (\mathbb{R};+),\ f \mapsto \int_0^1 f(x)dx$ — szürjektív homomorfizmus

$\int(f+g) = \int f + \int g$

Definíció

Legyen $\sim$ kongruenciája az $\mathbb{A}$ algebrának. Ekkor a

$$\nu\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}/\!\sim, \ a \mapsto \overline{a}$$

leképezés szürjektív homomorfizmus (ugye?), amelyet a $\sim$ kongruenciához tartozó természetes homomorfizmusnak nevezünk.

Példa

$\mathbb{A}$	a	b	c	d	e
a	c	b	c	c	e
b	a	c	c	e	c
c	a	e	c	c	e
d	a	d	c	d	d
e	a	c	c	e	c

$\xrightarrow{\nu}$

$\mathbb{A}/\!\sim$	U	V	W
U	U	V	U
V	U	U	V
W	U	W	W

$$a\nu = U, \ \ b\nu = V, \ \ c\nu = U, \ \ d\nu = W, \ \ e\nu = V$$

Példa

Tekintsük az alábbi homomorfizmust.

$$\mathbb{A} = \begin{array}{c|cccc} * & a & b & c & d \\ \hline a & d & d & a & a \\ b & d & d & b & b \\ c & a & a & c & c \\ d & a & b & c & d \end{array} \xrightarrow{\varphi} \begin{array}{c|ccc} \circ & u & v & w \\ \hline u & v & u & w \\ v & w & w & v \\ w & u & v & w \end{array} = \mathbb{B}$$

$= A\varphi$

$$a\varphi = v,\ b\varphi = v,\ c\varphi = w,\ d\varphi = w$$

$$\begin{aligned} (a * a)\varphi &\stackrel{?}{=} a\varphi \circ a\varphi \\ (a * b)\varphi &\stackrel{?}{=} a\varphi \circ b\varphi \\ &\vdots \\ (d * d)\varphi &\stackrel{?}{=} d\varphi \circ d\varphi \end{aligned}$$

Definíció

A $\varphi\colon A \to B$ leképezés magján az alábbi $\ker\varphi$ ekvivalenciarelációt értjük:

$$\ker\varphi = \left\{(a_1, a_2) : a_1\varphi = a_2\varphi\right\} \subseteq A \times A.$$

Tétel (Homomorfiatétel)

Ha $\varphi\colon \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ homomorfizmus, akkor. . .

(a) $\mathbb{A}\varphi \leq \mathbb{B}$, azaz φ értékkészlete részalgebrája $\mathbb{B}$-nek;

(b) $\ker\varphi$ kongruenciája $\mathbb{A}$-nak;

(c) $\mathbb{A}/\ker\varphi \cong \mathbb{A}\varphi$, azaz a mag szerinti faktoralgebra izomorf a homomorf képpel.

Következmény (Homomorfiatétel)

Ha $\varphi\colon \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ szürjektív homomorfizmus, akkor $\mathbb{A}/\ker\varphi \cong \mathbb{B}$.

Következmény

A homomorf képek és a faktoralgebrák „lényegében” ugyanazok:

- minden faktoralgebra homomorf kép; $\mathbb{A}/\sim\, = \mathbb{A}\nu$
- minden homomorf kép izomorf egy faktoralgebrával. $\mathbb{A}\varphi \cong \mathbb{A}/\ker\varphi$

A homomorfiatétel szerint minden homomorfizmus felfogható egy faktorizálás és egy beágyazás egymásutánjaként.

$$\mathbb{A} = \begin{array}{c|cccc} * & a & b & c & d \\ \hline a & d & d & a & a \\ b & d & d & b & b \\ c & a & a & c & c \\ d & a & b & c & d \end{array} \xrightarrow{\varphi} \begin{array}{c|ccc} \circ & u & v & w \\ \hline u & v & u & w \\ v & w & w & v \\ w & u & v & w \end{array} = \mathbb{B}$$

ν $\qquad$ β $\qquad$ $V/$

$$\mathbb{A}/\ker\varphi = \begin{array}{c|cc} * & \overline{a} & \overline{c} \\ \hline \overline{a} & \overline{c} & \overline{a} \\ \overline{c} & \overline{a} & \overline{c} \end{array} \cong \begin{array}{c|cc} \circ & v & w \\ \hline v & w & v \\ w & v & w \end{array} = \mathbb{A}\varphi$$

Példa

Írjuk fel a homomorfiatételt a

$$\mathrm{sgn}\colon (\mathbb{R};\cdot) \to (\mathbb{R};\cdot)$$

homomorfizmusra.

Az értékkészlet: $\mathbb{R}\varphi = \{-1, 0, +1\}$.

A maghoz tartozó osztályozás: $\mathbb{R}/\ker\mathrm{sgn} = \left\{\, \mathbb{R}^-, \{0\}, \mathbb{R}^+ \,\right\}$.

A mag szerinti faktoralgebra

$$(\mathbb{R};\cdot)/\ker\mathrm{sgn} = \begin{array}{c|ccc} \cdot & \{0\} & \mathbb{R}^+ & \mathbb{R}^- \\ \hline \{0\} & \{0\} & \{0\} & \{0\} \\ \mathbb{R}^+ & \{0\} & \mathbb{R}^+ & \mathbb{R}^- \\ \mathbb{R}^- & \{0\} & \mathbb{R}^- & \mathbb{R}^+ \end{array} \cong \begin{array}{r|rrr} \cdot & 0 & +1 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ +1 & 0 & +1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & +1 \end{array} \leq (\mathbb{R};\cdot)$$

Tartalom

Definíció

Az $\mathbb{A} = (A; *)$ és $\mathbb{B} = (B; \circ)$ grupoidok **direkt szorzata** az $\mathbb{A} \times \mathbb{B} = (A \times B; \otimes)$ grupoid, amelynek műveletét az alábbi módon értelmezzük:

$$(a_1, b_1) \otimes (a_2, b_2) = (a_1 * a_2, b_1 \circ b_2) \qquad (a_1, a_2 \in A, b_1, b_2 \in B).$$

Példák

- térbeli vektorok az összeadás műveletével: $(\mathbb{R}; +) \times (\mathbb{R}; +) \times (\mathbb{R}; +) = (\mathbb{R}; +)^3$
- $(\mathbb{C}; +) \cong (\mathbb{R}; +) \times (\mathbb{R}; +) = (\mathbb{R}; +)^2$
- $(\mathbb{R}^{2\times 2}; +) \cong (\mathbb{R}; +) \times (\mathbb{R}; +) \times (\mathbb{R}; +) \times (\mathbb{R}; +) = (\mathbb{R}; +)^4$
- $(\mathcal{P}(U); \cap) \cong (\mathbb{Z}_2; \cdot)^n$, ha $|U| = n$
- $(\mathcal{P}(U); ?) \cong (\mathbb{Z}_2; +)^n$, ha $|U| = n$
- ha $\mathrm{lnko}(m, n) = 1$, akkor $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_{mn}$

Tétel

Az alábbi leképezések (projekciók) szürjektív homomorfizmusok:

$$\pi_1 \colon \mathbb{A} \times \mathbb{B} \to \mathbb{A}, \quad (a, b) \mapsto a;$$
$$\pi_2 \colon \mathbb{A} \times \mathbb{B} \to \mathbb{B}, \quad (a, b) \mapsto b.$$

Következésképp $\mathbb{A}$ és $\mathbb{B}$ is izomorf $\mathbb{A} \times \mathbb{B}$ egy-egy faktoralgebrájával.

Példa

Mivel 2 és 3 relatív prímek, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \overset{\to}{\cong} \mathbb{Z}_6$. A fentiek szerint $\mathbb{Z}_2$ és $\mathbb{Z}_3$ is megkapható $\mathbb{Z}_6$ faktoralgebrájaként:

- $\mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{Z}_6/\sim$, ahol a $\sim$ kongruenciarelációnak megfelelő osztályozás: $\mathcal{C} = \{\{\underbrace{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}}_{\hookrightarrow (\bar{0}, \sqcup)}\}, \{\underbrace{\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}}_{\hookrightarrow (\bar{1}, \sqcup)}\}\};$
- $\mathbb{Z}_3 \cong \mathbb{Z}_6/\sim$, ahol a $\sim$ kongruenciarelációnak megfelelő osztályozás: $\mathcal{C} = \{\{\underbrace{\bar{0}, \bar{3}}_{\downarrow (\sqcup, \bar{0})}\}, \{\underbrace{\bar{1}, \bar{4}}_{\downarrow (\sqcup, \bar{1})}\}, \{\underbrace{\bar{2}, \bar{5}}_{\downarrow (\sqcup, \bar{2})}\}\}.$

Tartalom

Kérdés

Adott $\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2, \ldots$ algebrákból kiindulva milyen algebrákat tudunk felépíteni a tanult konstrukciókkal (részalgebra, faktoralgebra, direkt szorzat)?

Részleges válasz

Ha $\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2, \ldots$ mind kommutatívak (asszociatívak, ...), de $\mathbb{B}$ nem, akkor a $\mathbb{B}$ algebrát biztosan nem lehet megkapni.

Teljes válasz: Birkhoff tétele

A $\mathbb{B}$ algebra akkor és csak akkor kapható meg az $\mathbb{A}_i$ $(i \in I)$ algebrákból direkt szorzat, részalgebra és homomorf kép képzésével, ha $\mathbb{B}$ kielégít minden olyan azonosságot, amelyet az $\mathbb{A}_i$ algebrák kielégítenek.