

Izomiaúrfizmus



\leftrightarrow	igaz	hamis
igaz	igaz	hamis
hamis	hamis	igaz

\cdot	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

izomorf csoportok

$+$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$

\otimes		
		
		

Az $\mathbb{A} = (\{ \text{🐈}, \text{🐈} \}; \otimes)$ és a $\mathbb{B} = (\{ \bar{0}, \bar{1} \}; +)$ csoportok szerkezete ugyanaz: ha \mathbb{A} műveletábrázatában minden -t átnevezünk $\bar{0}$ -ra, és minden -t átnevezünk $\bar{1}$ -re, akkor éppen \mathbb{B} műveletábrázatát kapjuk:

\otimes		
		
		

átnevezés
→

$+$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$

Ezt az „átnevezést” a

$$\varphi: \{ \text{🐈}, \text{🐈} \} \rightarrow \{ \bar{0}, \bar{1} \}, \quad \text{🐈} \mapsto \bar{0}, \quad \text{🐈} \mapsto \bar{1}$$

leképezéssel írhatjuk le. Az átnevezés „jogossága” pedig a következőképpen fogalmazható meg:

$$\forall a_1, a_2 \in \{ \text{🐈}, \text{🐈} \}: \quad (a_1 \otimes a_2) \varphi = (a_1 \varphi) + (a_2 \varphi).$$

Definíció. Az ilyen, **műveletekkel felcserélhető** bijekciót **izomorfizmusnak** nevezzük. Ha két algebra között van izomorfizmus, akkor azt mondjuk, hogy a két algebra **izomorf**.

1. feladat

Adjunk meg izomorfizmust az \mathbb{A} és \mathbb{B} grupoidok között.

$$(a) \mathbb{A} = (\{\text{igaz}, \text{hamis}\}; \leftrightarrow), \quad \mathbb{B} = (\mathbb{Z}_2; +)$$

Megoldás.

$$\text{igaz} \mapsto \bar{0}, \quad \text{hamis} \mapsto \bar{1}$$

$$(b) \mathbb{A} = (\{\text{igaz}, \text{hamis}\}; \wedge), \quad \mathbb{B} = (\mathbb{Z}_2; \cdot)$$

Megoldás.

$$\text{igaz} \mapsto \bar{1}, \quad \text{hamis} \mapsto \bar{0}$$

1. feladat

Adjunk meg izomorfizmust az \mathbb{A} és \mathbb{B} grupoidok között.

$$(c) \mathbb{A} = (\{1, -1, i, -i\}; \cdot), \quad \mathbb{B} = (\mathbb{Z}_4; +)$$

Megoldás.

$$\begin{array}{llll} 1 \mapsto \bar{0}, & -1 \mapsto \bar{2}, & i \mapsto \bar{1}, & -i \mapsto \bar{3} \\ i \mapsto \bar{1}, & -1 \mapsto \bar{2}, & -i \mapsto \bar{3}, & 1 \mapsto \bar{0} \end{array}$$

Tömörebben: $\varphi: \{1, -1, i, -i\} \rightarrow \mathbb{Z}_4, i^k \mapsto \bar{k}$.

Ez a leképezés azért bijektív, mert $\forall k, \ell \in \mathbb{Z}: i^k = i^\ell \iff k \equiv \ell \pmod{4}$.

A műveletekkel való felcserélhetőség pedig a hatványozás egyik azonosságán múlik:

$$(i^k \cdot i^\ell)\varphi = i^{k+\ell}\varphi = \overline{k+\ell} = \bar{k} + \bar{\ell} = i^k\varphi + i^\ell\varphi.$$

1. feladat.

Adjunk meg izomorfizmust az \mathbb{A} és \mathbb{B} grupoidok között.

(a) $\mathbb{A} = (\{\text{igaz, hamis}\}; \leftrightarrow)$, $\mathbb{B} = (\mathbb{Z}_2; +)$

(b) $\mathbb{A} = (\{\text{igaz, hamis}\}; \wedge)$, $\mathbb{B} = (\mathbb{Z}_2; \cdot)$

(c) $\mathbb{A} = (\{1, -1, i, -i\}; \cdot)$, $\mathbb{B} = (\mathbb{Z}_4; +)$

(d) $\mathbb{A} = (\{-1, 1\}; \cdot)$, $\mathbb{B} = (\mathbb{Z}_2; +)$

(e) $\mathbb{A} = (\{a, b, c, d\}; *)$, $\mathbb{B} = (\mathbb{Z}_4; \cdot)$

$*$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	c	d
c	c	c	c	c
d	d	d	c	c

2. feladat

Izomorf-e az \mathbb{A} grupoid \mathbb{B} és \mathbb{C} közül valamelyikkel? Ha igen, akkor adjunk meg egy izomorfizmust; ha nem, akkor indokoljuk meg, hogy miért nem.

$$(a) \mathbb{A} = (\{\text{igaz}, \text{hamis}\}; \rightarrow), \quad \mathbb{B} = (\{0, 1\}; \circ), \quad \mathbb{C} = (\{0, 1\}; *)$$

\circ	0	1	$*$	0	1
0	1	1	0	0	0
1	0	1	1	0	1

Megoldás.

$\mathbb{A} \cong \mathbb{B}$ a következő izomorfizmus mellett: igaz $\mapsto 1$, hamis $\mapsto 0$.

$\mathbb{A} \not\cong \mathbb{C}$, mert \mathbb{C} kommutatív, de \mathbb{A} nem.

2. feladat

Izomorf-e az \mathbb{A} grupoid \mathbb{B} és \mathbb{C} közül valamelyikkel? Ha igen, akkor adjunk meg egy izomorfizmust; ha nem, akkor indokoljuk meg, hogy miért nem.

$$(b) \mathbb{A} = (\{1, 2, 3\}; \min), \quad \mathbb{B} = (\{0, 1, 2\}; \oplus), \quad \mathbb{C} = (\{0, 1, 2\}; *)$$

\oplus	0	1	2	$*$	0	1	2
0	0	1	2	0	0	0	0
1	1	1	1	1	0	1	2
2	2	1	2	2	0	2	0

Megoldás.

$\mathbb{A} \cong \mathbb{B}$ a következő izomorfizmus mellett: $1 \mapsto 1, 2 \mapsto 2, 3 \mapsto 0$.

$\mathbb{A} \not\cong \mathbb{C}$, mert \mathbb{A} -ban minden elem „négyzete” saját maga: $\min(a, a) = a$ minden a -ra, de \mathbb{C} -ben ez nem igaz, pl. $2 * 2 = 0$.

2. feladat

Izomorf-e az \mathbb{A} grupoid \mathbb{B} és \mathbb{C} közül valamelyikkel? Ha igen, akkor adjunk meg egy izomorfizmust; ha nem, akkor indokoljuk meg, hogy miért nem.

$$(c) \mathbb{A} = (\mathcal{P}(\{1, 2\}); \cup), \quad \mathbb{B} = (\{0, 1, 2, 3\}; \oplus), \quad \mathbb{C} = (\{0, 1, 2, 3\}; *)$$

\oplus		0	1	2	3		$*$		0	1	2	3
0		0	1	3	1		0		0	1	0	1
1		1	1	1	1		1		1	1	1	1
2		3	1	2	0		2		0	1	2	3
3		1	1	0	3		3		1	1	3	3

Megoldás.

$\mathbb{A} \not\cong \mathbb{B}$, mert \mathbb{A} -ban van egységelem (\emptyset), de \mathbb{B} -ben nincs.

$\mathbb{A} \cong \mathbb{C}$, a következő izomorfizmus mellett: $\emptyset \mapsto 2$, $\{1\} \mapsto 0$, $\{2\} \mapsto 3$, $\{1, 2\} \mapsto 1$

2. feladat.

Izomorf-e az \mathbb{A} grupoid \mathbb{B} és \mathbb{C} közül valamelyikkel? Ha igen, akkor adjunk meg egy izomorfizmust; ha nem, akkor indokoljuk meg, hogy miért nem.

$$(a) \mathbb{A} = (\{\text{igaz}, \text{hamis}\}; \rightarrow), \quad \mathbb{B} = (\{0, 1\}; \circ), \quad \mathbb{C} = (\{0, 1\}; *)$$

\circ		0	1
		0	1
0		1	1
1		0	1

$*$		0	1
		0	1
0		0	0
1		0	1

$$(b) \mathbb{A} = (\{1, 2, 3\}; \min), \quad \mathbb{B} = (\{0, 1, 2\}; \oplus), \quad \mathbb{C} = (\{0, 1, 2\}; *)$$

\oplus		0	1	2
		0	1	2
0		0	1	2
1		1	1	1
2		2	1	2

$*$		0	1	2
		0	1	2
0		0	0	0
1		0	1	2
2		0	2	0

2. feladat.

Izomorf-e az \mathbb{A} grupoid \mathbb{B} és \mathbb{C} közül valamelyikkel? Ha igen, akkor adjunk meg egy izomorfizmust; ha nem, akkor indokoljuk meg, hogy miért nem.

$$(c) \mathbb{A} = (\mathcal{P}(\{1, 2\}); \cup), \quad \mathbb{B} = (\{0, 1, 2, 3\}; \oplus), \quad \mathbb{C} = (\{0, 1, 2, 3\}; *)$$

\oplus	0	1	2	3
0	0	1	3	1
1	1	1	1	1
2	3	1	2	0
3	1	1	0	3

$*$	0	1	2	3
0	0	1	0	1
1	1	1	1	1
2	0	1	2	3
3	1	1	3	3

$$(d) \mathbb{A} = (\{\text{igaz}, \text{hamis}\}; \vee), \quad \mathbb{B} = (\{0, 1\}; \diamond), \quad \mathbb{C} = (\{0, 1\}; \otimes)$$

\diamond	0	1
0	1	0
1	0	0

\otimes	0	1
0	0	1
1	1	1

2. feladat.

Izomorf-e az \mathbb{A} grupoid \mathbb{B} és \mathbb{C} közül valamelyikkel? Ha igen, akkor adjunk meg egy izomorfizmust; ha nem, akkor indokoljuk meg, hogy miért nem.

$$(e) \mathbb{A} = (\{-1, 0, 1\}; \cdot), \quad \mathbb{B} = (\{0, 1, 2\}; \otimes), \quad \mathbb{C} = (\{0, 1, 2\}; \circ)$$

\oplus	0	1	2
0	0	1	2
1	1	0	2
2	2	2	2

\circ	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	0

$$(f) \mathbb{A} = (\{1, 2, 3, 4\}; \cdot), \quad \mathbb{B} = (\{0, 1, 2, 3\}; \diamond), \quad \mathbb{C} = (\{0, 1, 2, 3\}; \oplus)$$

\diamond	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

\oplus	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	0	3	2
2	2	3	0	1
3	3	2	1	0