Absztrakt *algebra*

- algebra: az algebrai struktúrák tudománya
- algebrai struktúra: műveletekkel felszerelt nemüres halmaz
- művelet: ?

Példa. Az összeadás művelet az egész számok halmazán.
$(3,8) \mapsto 11 \qquad \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, \ (a,b) \mapsto a+b$

Definíció. Kétváltozós $*$ művelet a nemüres A halmazon:

$$*: \ A \times A \longrightarrow A, \ (a,b) \mapsto a * b \quad \text{leképezés.}$$

Példa. Művelet-e a szorzás a negatív egész számok halmazán?
NEM, mert pl. $(-3) \cdot (-5) \notin \mathbb{Z}^-$.

Példa. Művelet-e az osztás a valós számok halmazán?
NEM, mert pl. $\sqrt{2}/0$ nem értelmezett.

Fontos, hogy:

- $a * b$ értelmezett legyen minden $a, b \in A$ esetén,
- $a * b$ egyértelműen meghatározott legyen minden $a, b \in A$ esetén,
- $a * b$ az A halmazba essen minden $a, b \in A$ esetén.

1. feladat

(a) Művelet-e az összeadás a hárommal osztható egész számok halmazán?
IGEN: $3k + 3\ell = 3\,(k + \ell)$ osztható 3-mal minden $k, \ell \in \mathbb{Z}$ esetén.

(b) Művelet-e az összeadás a hárommal nem osztható egész számok halmazán?
NEM: pl. $1 + 2 = 3$ nincs benne az alaphalmazban.

(c) Művelet-e az osztás a pozitív egész számok halmazán?
NEM: pl. $5/7$ nincs benne az alaphalmazban.

(d) Művelet-e az összeadás az $A = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}^+\}$ halmazon?
IGEN: ha $a + bi, c + di \in A$ (azaz $a, b, c, d \in \mathbb{R}^+$), akkor
$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)\,i \in A$ (mert $a + c, b + d \in \mathbb{R}^+$).

(e) Művelet-e $x * y = \sqrt{xy}$ a valós számok halmazán?
NEM: pl. $2 * (-3) = \sqrt{-6}$ nincs benne az alaphalmazban (vagy nem értelmezett).

(f) Művelet-e $x * y = \sqrt{xy}$ a komplex számok halmazán?
NEM: pl. $(2 - 4i) * (2 + i) = \sqrt{8 - 6i}$ nem egyértelmű, lehet $3 - i$ vagy $-3 + i$.

(g) Művelet-e a metszés az $\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}\}$ halmazon?
IGEN: a megadott hat halmaz közül bármely kettőnek a metszete megegyezik a hat halmaz valamelyikével (macerás esetvizsgálat).

Gyakorolj!

2. feladat.

(a) Művelet-e a szorzás a hárommal osztható egész számok halmazán?

(b) Művelet-e a szorzás a hárommal nem osztható egész számok halmazán?

(c) Művelet-e az összeadás a $[0, 1]$ intervallumon?

(d) Művelet-e a szorzás a $[0, 1]$ intervallumon?

(e) Művelet-e a szorzás az $A = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}^+\}$ halmazon?

(f) Művelet-e az egyesítés az $\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}\}$ halmazon?

Műveleti tulajdonságok

Legyen $*$ egy művelet az A halmazon.

- A $*$ művelet kommutatív, ha minden $a, b \in A$ esetén $a * b = b * a$.

  Pl. valós számok összeadása és szorzása kommutatív.

- A $*$ művelet asszociatív, ha minden $a, b, c \in A$ esetén $(a * b) * c = a * (b * c)$.

  Pl. valós számok összeadása és szorzása asszociatív.

- A $z \in A$ elem zéruselem, ha minden $a \in A$ esetén $a * z = z = z * a$.

  Pl. valós számok szorzásánál $z = 0$.

- Az $e \in A$ elem egységelem, ha minden $a \in A$ esetén $a * e = a = e * a$.

  Pl. valós számok szorzásánál $e = 1$, de összeadásánál $e = 0$.

- Ha e egységelem, akkor a és b egymás inverzei, amennyiben $a * b = e = b * a$.

  Pl. valós számok összeadásánál $b = -a$, szorzásánál $b = \frac{1}{a}$ (ha $a \neq 0$).

- A $*$ művelet kancellatív, ha minden $a, b, c \in A$ esetén
  $a * c = b * c \Longrightarrow a = b \quad \text{és} \quad c * a = c * b \Longrightarrow a = b$.

  Pl. valós számoknál az összeadás kancellatív, de a szorzás nem.

Definiáljunk egy műveletet az $A = \{a, b, c, d\}$ halmazon. Összesen 16 helyen kell megadnunk a művelet eredményét, és mindig tetszőlegesen választhatunk az a, b, c, d elemek közül. Tehát $4^{16} = 4\,294\,967\,296$ lehetőség van. Íme egy ezek közül:

$$\begin{aligned} a*a=a,\ \ a*b=b,\ \ a*c=c,\ \ a*d=d,\\ b*a=b,\ \ b*b=a,\ \ b*c=c,\ \ b*d=d,\\ c*a=c,\ \ c*b=c,\ \ c*c=c,\ \ c*d=c,\\ d*a=d,\ \ d*b=d,\ \ d*c=c,\ \ d*d=c. \end{aligned}$$

Ezt áttekinthetőbb formában mutatja az alábbi műveletttáblázat:

*	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	c	d
c	c	c	c	c
d	d	d	c	c

3. feladat

Vizsgáljuk meg a tanult műveleti tulajdonságok szempontjából az $A = \{a, b, c, d\}$ halmazon az alábbi táblázattal definiált $*$ műveletet.

$*$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	c	d
c	c	c	c	c
d	d	d	c	c

- kommutativitás: teljesül (a táblázat szimmetrikus a főátlóra)
- asszociativitás: teljesül (nem látszik könnyen a táblázatból; később visszatérünk rá)
- zéruselem: c (sorában és oszlopában végig c van)
- egységelem: a (sora és oszlopa megegyezik a „fejléccel")
- inverzek: a inverze a, b inverze b, c-nek és d-nek nincs inverze
- kancellativitás (emlékeztető: $\blacktriangle * \heartsuit = \blacksquare * \heartsuit \Longrightarrow \blacktriangle = \blacksquare$):
  nem teljesül, pl. $a * c = b * c$.

3. feladat

$*$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	c	d
c	c	c	c	c
d	d	d	c	c

3. feladat

	1	3	0	2
1	1	3	0	2
3	3	1	0	2
0	0	0	0	0
2	2	2	0	0

3. feladat

$$\begin{array}{c|cccc} * & a & b & c & d \\ \hline a & a & b & c & d \\ b & b & a & c & d \\ c & c & c & c & c \\ d & d & d & c & c \end{array} \cong \begin{array}{c|cccc} & 1 & 3 & 0 & 2 \\ \hline 1 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 0 \end{array} = \begin{array}{c|cccc} & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 3 & 2 & 1 \end{array}$$

$$4 \equiv 0 \pmod 4 \qquad 6 \equiv 2 \pmod 4 \qquad 9 \equiv 1 \pmod 4$$

modulo 4 maradékosztályok szorzása: $\begin{array}{c|cccc} \cdot & \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} & \overline{3} \\ \hline \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} \\ \overline{1} & \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} & \overline{3} \\ \overline{2} & \overline{0} & \overline{2} & \overline{0} & \overline{2} \\ \overline{3} & \overline{0} & \overline{3} & \overline{2} & \overline{1} \end{array}$ $\quad \mathbb{Z}_4 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}\}$

Maradékosztályok

Definíció. A modulo m maradékosztályok halmaza: $\mathbb{Z}_m = \{\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{m-1}\}$.
A $\mathbb{Z}_m$ halmazon értelmezhetjük az összeadás és a szorzás műveletét:

$$\overline{a} + \overline{b} = \overline{a+b} \quad \text{és} \quad \overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{a \cdot b}.$$

Példa. $\mathbb{Z}_4$ összeadó- és szorzótáblája:

$+$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$

$\cdot$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$
$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$

Példa. Számolás $\mathbb{Z}_{15}$-ben:

- $\overline{7} + \overline{10} = \overline{17} = \overline{2}$
- $\overline{7} \cdot \overline{10} = \overline{70} = \overline{10}$
- $\overline{7}^{10} = \overline{7}^{2} = \overline{49} = \overline{4}$ (Euler–Fermat-tétel)

4. feladat

Vizsgáljuk meg a tanult műveleti tulajdonságok szempontjából az $A = \{a, b, c, d\}$ halmazon az alábbi táblázattal definiált $\circ$ műveletet.

$\circ$	a	b	c	d
a	c	a	b	b
b	a	b	c	d
c	b	c	b	a
d	b	d	c	a

- kommutativitás: nem teljesül, pl. $c \circ d = a$ és $d \circ c = c$
- asszociativitás: nem teljesül, pl. $(c \circ c) \circ d = b \circ d = d$ és $c \circ (c \circ d) = c \circ a = b$
- zéruselem: nincs
- egységelem: b (sora és oszlopa megegyezik a „fejléccel")
- inverzek: a inverzei c és d, b inverze b, c inverzei a és c, d inverze a
- kancellativitás (emlékeztető: $\blacktriangle \circ \heartsuit = \blacksquare \circ \heartsuit \Longrightarrow \blacktriangle = \blacksquare$):
  nem teljesül, pl. $a \circ c = a \circ d$.

5. feladat

Írjuk fel a $\mathbb{Z}_5$ halmazon a szorzás művelettáblázatát, és vizsgáljuk meg a tanult műveleti tulajdonságok szempontjából.

$\cdot$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{1}$	$\overline{3}$
$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{1}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$
$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$

- kommutativitás: teljesül
- asszociativitás: teljesül
- zéruselem: $\overline{0}$
- egységelem: $\overline{1}$
- inverzek: $\overline{1}$ inverze $\overline{1}$, $\overline{2}$ inverze $\overline{3}$, $\overline{3}$ inverze $\overline{2}$, $\overline{4}$ inverze $\overline{4}$, $\overline{0}$-nak nincs inverze
- kancellativitás: nem teljesül, pl. $\overline{0} \cdot \overline{1} = \overline{0} \cdot \overline{2}$.

6. feladat

Írjuk fel a $\mathcal{P}(\{u,v\})$ halmazon az egyesítés művelettáblázatát, és vizsgáljuk meg a tanult műveleti tulajdonságok szempontjából.

$\cup$	$\emptyset$	$\{u\}$	$\{v\}$	$\{u,v\}$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\{u\}$	$\{v\}$	$\{u,v\}$
$\{u\}$	$\{u\}$	$\{u\}$	$\{u,v\}$	$\{u,v\}$
$\{v\}$	$\{v\}$	$\{u,v\}$	$\{v\}$	$\{u,v\}$
$\{u,v\}$	$\{u,v\}$	$\{u,v\}$	$\{u,v\}$	$\{u,v\}$

- kommutativitás: teljesül
- asszociativitás: teljesül
- zéruselem: $\{u,v\}$
- egységelem: $\emptyset$
- inverzek: $\emptyset$ inverze $\emptyset$, senki másnak nincs inverze
- kancellativitás: nem teljesül, pl. $\{u\}\cup\{v\}=\{u\}\cup\{u,v\}$.

Gyakorolj!

7. feladat. Írjuk fel a $\{1, -1, i, -i\}$ halmazon a szorzás művelettáblázatát, és vizsgáljuk meg a tanult műveleti tulajdonságok szempontjából.

8. feladat. Írjuk fel az $\{\texttt{igaz}, \texttt{hamis}\}$ halmazon az implikáció művelettáblázatát, és vizsgáljuk meg a tanult műveleti tulajdonságok szempontjából.

9. feladat. Írjuk fel az $\{1, 2, 3\}$ halmazon az $x \sqcap y = \min\{x, y\}$ művelet művelettáblázatát, és vizsgáljuk meg a tanult műveleti tulajdonságok szempontjából.

10. feladat. Vizsgáljuk meg a tanult műveleti tulajdonságok szempontjából az $A = \{u, v, w\}$ halmazon az alábbi táblázattal definiált $\diamond$ műveletet.

$\diamond$	u	v	w
u	v	w	u
v	w	u	v
w	u	v	w

11. feladat

Vizsgáljuk meg a tanult műveleti tulajdonságok szempontjából az egész számok halmazán értelmezett $a \bullet b = a + b + 23$ műveletet.

- kommutativitás: teljesül
- asszociativitás: teljesül

  $(a \bullet b) \bullet c = (a + b + 23) \bullet c = (a + b + 23) + c + 23 = a + b + c + 46$

  $a \bullet (b \bullet c) = a + (b \bullet c) + 23 = a + (b + c + 23) + 23 = a + b + c + 46$
- zéruselem: nincs

  Ha z zéruselem, akkor minden a egész számra $a \bullet z = z$, azaz $a + z + 23 = z$. De ez nem igaz minden a-ra (csak $a = -23$-ra).
- egységelem: -23

  Akkor és csak akkor lesz e egységelem, ha minden a egész számra $a \bullet e = a$, azaz $a + e + 23 = a$. Ha $e = -23$, akkor ez valóban igaz minden a-ra.
- inverzek: a inverze $-46 - a$ minden a-ra

  Akkor és csak akkor lesz b inverze a-nak, ha minden $a \bullet b = e = -23$, azaz $a + b + 23 = -23$. Ez $b = -46 - a$ esetén igaz.
- kancellativitás: teljesül

  $a \bullet c = b \bullet c \implies a + c + 23 = b + c + 23 \implies a = b$

12. feladat

Vizsgáljuk meg a tanult műveleti tulajdonságok szempontjából az egész számok halmazán értelmezett $a \otimes b = b + 2$ műveletet.

- kommutativitás: nem teljesül, pl. $5 \otimes 8 = 10$ és $8 \otimes 5 = 7$
- asszociativitás: nem teljesül, pl. $(1 \otimes 2) \otimes 3 = 5$ és $1 \otimes (2 \otimes 3) = 1 \otimes 5 = 7$
  $(a \otimes b) \otimes c = c + 2$
  $a \otimes (b \otimes c) = b \otimes c + 2 = (c + 2) + 2 = c + 4$
- zéruselem: nincs
  Ha z zéruselem, akkor minden a egész számra $a \otimes z = z$, azaz $z + 2 = z$.
- egységelem: nincs
  Ha e egységelem, akkor minden a egész számra $a \otimes e = a$, azaz $e + 2 = a$. Bármit is választunk e-nek, ez csak egyetlen a-ra fog teljesülni.
- inverzek: ha nincs egységelem, akkor nincs értelme inverzekről beszélni
- kancellativitás: nem teljesül, pl. $2 \otimes 6 = 3 \otimes 6$

13. feladat

Vizsgáljuk meg a tanult műveleti tulajdonságok szempontjából a valós számok halmazán értelmezett $a \star b = 12 - 3a - 3b + a \cdot b$ műveletet.

- kommutativitás: teljesül
- asszociativitás: teljesül

$$\begin{aligned}(a \star b) \star c &= (12 - 3a - 3b + ab) \star c = \\ &= 12 - 3(12 - 3a - 3b + ab) - 3c + (12 - 3a - 3b + ab) \cdot c = \\ &= -24 + 9a + 9b + 9c - 3ab - 3bc - 3ac + abc\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a \star (b \star c) &= a \star (12 - 3b - 3c + bc) = \\ &= 12 - 3a - 3(12 - 3b - 3c + bc) + a \cdot (12 - 3b - 3c + bc) = \\ &= -24 + 9a + 9b + 9c - 3ab - 3bc - 3ac + abc\end{aligned}$$

- zéruselem: 3

  Akkor és csak akkor lesz z zéruselem, ha minden a valós számra $a \star z = z$:

$$\begin{aligned}\forall a \in \mathbb{R}: &\quad 12 - 3a - 3z + az = z \\ \forall a \in \mathbb{R}: &\quad a(z-3) = 4z - 12 \\ \forall a \in \mathbb{R}: &\quad a(3-3) = 4 \cdot 3 - 12\end{aligned}$$

13. feladat

- egységelem: 4

  Akkor és csak akkor lesz e egységelem, ha minden a valós számra $a \star e = a$:

$$\begin{aligned} \forall a \in \mathbb{R}: \quad 12 - 3a - 3e + ae &= a \\ \forall a \in \mathbb{R}: \quad a(e-4) &= 3e - 12 \\ \forall a \in \mathbb{R}: \quad a(4-4) &= 3 \cdot 4 - 12 \end{aligned}$$

- inverzek: 3 kivételével mindenkinek van inverze, a inverze $\dfrac{3a-8}{a-3}$ ha $a \neq 3$

  Akkor és csak akkor lesz b inverze a-nak, ha $a \star b = e = 4$:

$$\begin{aligned} 12 - 3a - 3b + ab &= 4 \\ b(a-3) &= 3a - 8 \\ b &= \frac{3a-8}{a-3} \text{ ha } a \neq 3 \end{aligned}$$

- kancellativitás: nem teljesül, pl. $0 \star 3 = 1 \star 3$

Gyakorolj!

14. feladat. Vizsgáljuk meg a tanult műveleti tulajdonságok szempontjából az egész számok halmazán értelmezett $a \oplus b = a$ műveletet.

15. feladat. Vizsgáljuk meg a tanult műveleti tulajdonságok szempontjából az egész számok halmazán a kivonás műveletét.

16. feladat. Vizsgáljuk meg a tanult műveleti tulajdonságok szempontjából a valós számok halmazán értelmezett $a \triangle b = ab - 2(a + b) + 6$ műveletet.