BEVEZETÉS A SZÁMELMÉLETBE

VIZSGA (MINTA)

Név: ....

EHA: ....

1.	2.	3.	4.	5.	Σ

Tudnivalók: A félévközi írásbeli vizsgadolgozat egyrészt beugró jellegű, másrészt az elért pontszám hozzáadódik a gyakorlat során szerzett pontszámhoz. Ha a vizsgadolgozattal megszerzett pontszáma nem éri el a 12 pontot (30 pontból), ha az elért összpontszáma 40-nél kevesebb (100 pontból), vagy ha nem teljesítette a zárthelyi dolgozatokra, elektronikus tesztekre vagy a házi feladatokra vonatkozó egyéb előírásokat, akkor nem jelentkezhet szóbeli vizsgára, illetve ha feljelentkezik, akkor a vizsga érdemjegye automatikusan elégtelen.
Az 1. feladatban a megadott állítások előtt lévő pontozott vonalra írt I, illetve H betűvel jelezze, hogy az állítás igaz-e vagy hamis. Ennél a feladatnál a választ nem kell indokolnia. Az öt állítására 10, 8, 5, 2, illetve 0 pontot kap aszerint, hogy 5, 4, 3, 2 vagy kevesebb jó választ adott.
A 2–5. feladatoknál indoklást, levezetést is kell írni; megoldását a feladat szövege utáni üres helyre írja. Ezekre a feladatokra 5-5 pont jár, ha helyes megoldást adott és válaszát helyesen indokolta. Az egész dolgozatban ügyeljen arra, hogy egyértelmű legyen, mi tartozik az egyes feladatok megoldásához.
A vizsgán semmilyen segédeszköz nem használható, még függvénytáblázat, számológép, mobiltelefon sem. Bármiféle nem megengedett segédeszköz használata esetén a vizsga érdemjegye elégtelen. A rendelkezésre álló idő 45 perc.

---

1. feladat (10 pont)

Igazak-e a következő állítások?

..... **(a)** Az $1, 133, 265, 397, \ldots$ és az $1, 151, 301, 451, \ldots$ számtani sorozatok második közös tagja 19801.

..... **(b)** Minden n természetes számra $\sum_{d|n} d\mu\left(\frac{n}{d}\right) = \varphi(n)$.

..... **(c)** Ötvennyolc olyan k egész szám van 1 és 1000 között, amelyre $51 \mid 9k$ teljesül.

..... **(d)** Tetszőleges a, b, c, d egész számok esetén $ab + cd = 1 \implies a \perp c$.

..... **(e)** Tetszőleges a egész szám és a-hoz relatív prím m modulus esetén, ha a primitív gyök modulo m, akkor $o_m(a) \mid \varphi(m)$.

Piszkozat helye

2. feladat (5 pont)

Bizonyítsa be, hogy $11^{1002} + 12^{2001}$ osztható 133-mal.

3. feladat (5 pont)

Oldja meg az alábbi kongruenciarendszert (a, b, c egész paraméterek).

$$x \equiv a \pmod 4$$
$$x \equiv b \pmod 5$$
$$x \equiv c \pmod 7$$

4. feladat (5 pont)

Igaz-e tetszőleges a egész szám esetén, hogy ha $a \equiv 100 \pmod{2014}$, akkor a nem lehet osztható hárommal? Ha igaz, bizonyítsa be; ha nem, adjon egy ellenpéldát.

5. feladat (5 pont)

Léteznek-e olyan a, b, c egész számok, amelyekre az $ax + by = c$ diofantoszi egyenletnek pontosan 2014 megoldása van (az egész számok körében)? Ha igen, adjon meg egy példát; ha nem, bizonyítsa be, hogy valóban nem léteznek.

Piszkozat helye