4. Hatványozás modulo m

84. feladat Mennyit ad 53-mal osztva maradékul $80^{\left(111^{50}\right)}$?

85. feladat Mennyit ad héttel osztva maradékul $11^{11} + 11^{11^2} + 11^{11^3} + \cdots 11^{11^{11}}$?

86. feladat Mennyit ad héttel osztva maradékul $111\ldots111$ (99 egyes)?

87. feladat Bizonyítsa be, hogy minden n természetes szám esetén az $n, n^8 - 1, n^8 + 1$ számok közül az egyik osztható 17-tel.

88. feladat Mutassa meg, hogy ha $(a, 100) = 1$, akkor $a^{20} \equiv 1 \pmod{100}$ teljesül. Hasonlítsa össze ezt az állítást az Euler-Fermat–tétellel.

89. feladat Igazolja, hogy $a^{561} \equiv a \pmod{561}$ bármely a egész számra.

90. feladat Bizonyítsa be, hogy ha n nem osztható se 2-vel se 5-tel, akkor van $99\cdots99$ alakú többszöröse.

91. feladat Legyen p és q két különböző prímszám. Mutassa meg, hogy $p^{q-1} + q^{p-1} \equiv 1 \pmod{pq}$.

92. feladat* Igazolja, hogy bármely p páratlan prímszámra $2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot \ldots \cdot (p-1)^2 \equiv (-1)^{\frac{p+1}{2}} \pmod{p}$.

93. feladat* Legyen $p > 3$ prímszám és $n = \frac{2^{2p}-1}{3}$. Bizonyítsa be, hogy $n \mid 2^n - 2$.

94. feladat* Legyen $m > 2$ olyan természetes szám, ami se kettővel, se öttel nem osztható. Ismeretes, hogy ekkor $\frac{1}{m}$ egy tiszta szakaszos végtelen tizedes tört. Igazolja, hogy a szakasz hossza nem más, mint $o_m(10)$. (Például $m = 7$ esetén $\frac{1}{7} = 0,\dot{1}42\,85\dot{7}$, vagyis a szakasz hossza 6, ami ugyanaz, mint 10 rendje modulo 7.)

95. feladat* Legyen $p > 5$ prímszám, és tegyük fel, hogy $\frac{1}{p}$ tizedestört alakja $0,\dot{a}_1\ldots a_n b_1 \ldots \dot{b}_n$, vagyis a szakasz hossza $2n$. Mutassa meg, hogy ekkor az $\overline{a_1 \ldots a_n} + \overline{b_1 \ldots b_n}$ szám csupa 9-es számjegyből áll. (Például $p = 7$ esetén $\frac{1}{7} = 0,\dot{1}42\,85\dot{7}$, és valóban $142 + 857 = 999$.)

96. feladat Mutassa meg, hogy 2 primitív gyök modulo 19, de nem primitív gyök modulo 17.

97. feladat Bizonyítsa be, hogy ha g primitív gyök modulo p, akkor g^{-1} is primitív gyök modulo p.

98. feladat Igazolja, hogy ha p páratlan prímszám és g primitív gyök modulo p, akkor $g^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod{p}$.

99. feladat Legyen p páratlan prímszám és legyenek g_1, g_2 primitív gyökök modulo p. Lehetséges-e, hogy $g_1 g_2$ is primitív gyök modulo p?

100. feladat Adjon képletet a $\left(\frac{3}{p}\right)$ Legendre-szimbólumra.

101. feladat Mely p prímszámokra oldható meg az $x^2 + x + 1 \equiv 0 \pmod{p}$ kongruencia?

102. feladat* Bizonyítsa be, hogy ha n páratlan szám, akkor $n^2 + 2$ minden osztója $8k + 1$ vagy $8k + 3$ alakú.

103. feladat* Oldja meg a 35. feladatot 11 helyett tetszőleges $4k + 3$ alakú prímszámra.

5. Számok felbontása hatványok összegére

104. feladat Határozza meg az összes primitív pitagoraszi számhármast amelyben szerepel a 12 (akár befogóként akár átfogóként).

105. feladat Határozza meg az összes pitagoraszi számhármast amelyben szerepel a 12 (akár befogóként akár átfogóként).

106. feladat Igazolja, hogy bármely (x, y, z) primitív pitagoraszi számhármasra $12 \mid xy$ és $60 \mid xyz$.

107. feladat Határozza meg az összes olyan pitagoraszi számhármast, amelynek elemei számtani sorozatot alkotnak.

108. feladat Bizonyítsa be, hogy minden n természetes számhoz létezik olyan pitagoraszi számhármas, hogy az általa meghatározott háromszog beírt körének sugara n.

BEVEZETÉS A SZÁMELMÉLETBE

szorgalmi feladatok

(2014 őszi félév)

Waldhauser Tamás

1. Oszthatóság, legnagyobb közös osztó, prímfaktorizáció az egész számok körében

1. feladat Igazolja, hogy $7 \mid 10a + b \Leftrightarrow 7 \mid a - 2b$ teljesül minden a, b egész számra. Adjon ennek segítségével eljárást nagy számok 7-tel való oszthatóságának eldöntésére. Például oszható-e 7-tel 334989655?

2. feladat Mutassa meg, hogy $2^n - 1$ csak akkor lehet prím, ha n is az. (Mersenne-prímek)

3. feladat Mutassa meg, hogy $2^n + 1$ csak akkor lehet prím, ha n kettőhatvány. (Fermat-prímek)

4. feladat* Bizonyítsa be, hogy $n \geq 2$ esetén $\sum_{0 \leq k < \frac{n}{2}} \binom{n}{2k+1} 5^k$ osztható 2^{n-1}-nel. (Segíthet, ha megsejtjük, hogy hányszor van meg benne a 2^{n-1}. Ehhez számítsuk ki az összeget $n = 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$-ra, amíg észre nem veszünk valamit.)

5. feladat* Legyen f egy olyan egész együtthatós másodfokú polinom, amelyre $f(k)$ osztható 5-tel minden k egész számra. Mutassa meg, hogy f minden együtthatója 5-tel osztható. Mi a helyzet magasabbfokú polinomokkal? És ha 5 helyett más (prím)számot veszünk?

6. feladat Mely p prímszámokra lesz $29p + 1$ négyzetszám?

7. feladat Bizonyítsa be, hogy bármely p prímszámra és $k < p$ pozitív egészre $\binom{p}{k}$ osztható p-vel.

8. feladat Legyenek a és b pozitív egész számok, amelyekre $a^3 = b^2$ teljesül. Mutassa meg, hogy ekkor létezik olyan k pozitív egész, amelyre $a = k^2$ és $b = k^3$.

9. feladat* Jelölje $\nu_p(n)$-nel az n természetes szám prímtényezős felbontásában a p prím kitevőjét. (Tehát $\nu_p(n) = k$ akkor és csak akkor, ha $p^k \mid n$ és $p^{k+1} \nmid n$.) Igazolja, hogy minden n pozitív egészre $\nu_2\big((n+1) \cdot (n+2) \cdot \ldots \cdot (2n)\big) = n$.

10. feladat* Bizonyítsa be Legendre képletét: minden n pozitív egészre $\nu_p(n!) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$. (Ez egy véges összeg!)

11. feladat* Mutassa meg, hogy

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{n}{2^k} = n, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{2^k} \right\rceil = n, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{2^k} \right\rfloor = n - s(n),$$

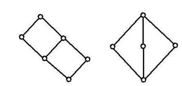
ahol $s(n)$ az n szám kettes számrendszerbeli alakjában előforduló 1-es számjegyek száma, $\lfloor x \rceil$ pedig az x valós számhoz legközelebbi egész. (Mi köze a középső szummának az előző két feladathoz?)

12. feladat Határozza meg mindazokat az a, b természetes számokat, amelyekre $(a, b) = 22$ és $[a, b] = 264$ teljesül.

13. feladat Határozza meg mindazokat az a, b természetes számokat, amelyekre $[a, b] = 720$ és $a + b = 98$.

14. feladat Rajzolja le az összes $2, 3$ illetve 4 pontú Hasse-diagramot.

15. feladat Van-e olyan n természetes szám, amelyre $(D_n; |)$ Hasse-diagramja a következő? Hány ilyen n szám van?



a b

16. feladat Rajzoljon olyan Hasse-diagramot, amelyben egyetlen minimális elem van, de nincs legkisebb elem.

17. feladat Január hatodikán négy hajó futott be Boston kikötőjébe. Az egyik hajó négyhetente tér vissza Bostonba, a másik minden nyolcadik héten, a harmadik és a negyedik pedig 12 illetve 16 hetente. Találkoznak-e még idén ebben a kikötőben?

18. feladat Mutassa meg, hogy ha a és b relatív prímek, akkor $a + b$ és ab is azok.

19. feladat Egy négyjegyű számmal osztva 25707 32-t, 37568 pedig 43-at ad maradékul. Melyik ez a négyjegyű szám?

20. feladat Mennyi lehet két szomszédos Fibonacci-szám legnagyobb közös osztója?

21. feladat* Bizonyítsa be, hogy ha az $a > b > 0$ számokon végrehajtott euklideszi algoritmus pontosan n lépésből áll, akkor $a \geq F_{n+2}$ és $b \geq F_{n+1}$, ahol F_n az n-edik Fibonacci-szám ($F_0 = 0, F_1 = 1, F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$).

22. feladat* Mennyi $a^n - 1$ és $a^m - 1$ legnagyobb közös osztója?

23. feladat Mely n természetes számok esetén lehet egyszerűsíteni a $\frac{3n+2}{4n+1}$ törtet?

24. feladat* Legyen $t(x) = \frac{1}{\{x\}}$, ha $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$. Egy α valós számból kiindulva képezzük sorra a $t(\alpha)$, $t(t(\alpha))$, $t(t(t(\alpha)))$, $\ldots$ számokat. Mutassa meg, hogy a sorozat akkor és csak akkor szakad meg, ha α racionális szám.

25. feladat* Határozza meg a $t(x)$ függvény *fixpontjait*, vagyis mindazokat az α valós számokat, amelyekre $t(\alpha) = \alpha$.

26. feladat Száz szál virágot vásároltunk három különböző fajtából, összesen 30000 forintért. Az egyes virágfajták ára darabonként rendre $130, 190$ és 320 forint. Mennyit vettünk az egyes fajtákból?

2. Számelméleti kongruenciák

27. feladat Határozza meg $7 + 7^2 + 7^3 + \cdots + 7^{4000}$ utolsó két számjegyét.

28. feladat Bizonyítsa be, hogy a tízes számrendszerben felírt $\overline{a_n \cdots a_2 a_1 a_0}$ szám akkor és csak akkor osztható 37-tel, ha az

$$\overline{a_1 a_0} - \overline{a_2 a_2} + \overline{a_4 a_3} - \overline{a_5 a_5} + \cdots$$

szám osztható 37-tel. Döntse el ennek segítségével, hogy oszható-e 37-tel 334989655?

29. feladat Mutassa meg, hogy ha m páratlan prímhatvány, akkor az $x^2 \equiv 1 \pmod m$ kongruenciának csak két megoldása van: $x \equiv \pm 1 \pmod m$. Igaz marad-e az állítás, ha m nem prímhatvány?

30. feladat Igazolja, hogy a $11,\ 111,\ 1111,\ \ldots$ sorozatban nincs négyzetszám.

31. feladat Határozza meg az összes olyan n természetes számot, amelyre $1! + 2! + 3! + \cdots + n!$ négyzetszám.

32. feladat Bizonyítsa be, hogy a Fibonacci-sorozat minden negyedik tagja osztható hárommal.

33. feladat Milyen számjegyeket kell írni a és b helyére, hogy $\overline{1456ab}$ osztható legyen 41-gyel?

34. feladat* Négy egymást követő pozitív egész közül legalább az egyik összetett, hasonlóan öt egymást követő páratlan szám közül legalább az egyik összetett (ugye?). Mutassa meg, hogy tetszőleges pozitív egészekből álló számtani sorozathoz lehet találni olyan K számot, hogy a számtani sorozat bármely K egymást követő tagja között van összetett szám.

35. feladat* Mely n pozitív egészekre igaz a következő állítás: $\forall a, b \in \mathbb{N}:\ 11 \mid a^n + b^n \implies 11 \mid a$ és $11 \mid b$?

36. feladat Adjon meg olyan egész számokat, amelyek teljes maradékrendszert alkotnak modulo 8, és egyúttal redukált maradékrendszert alkotnak modulo 15.

37. feladat Hány ekvivalenciareláció adható meg egy kételemű alaphalmazon? És három- illetve négyelemű halmazon?

38. feladat Megadható-e egy 8 elemű alaphalmazon olyan ekvivalenciareláció, amely pontosan 40 elempárból áll? És olyan, ami pontosan 41 elempárból áll?

39. feladat Melyek azok a relációk, amelyek egyszerre szimmetrikusak és antiszimmetrikusak is?

40. feladat Mennyit ad 73-mal osztva x maradékul, ha $x^{99} \equiv 22 \pmod{73}$ és $x^{100} \equiv 69 \pmod{73}$?

41. feladat Igazolja, hogy bármely $m, k \in \mathbb{N}$ és $\overline{a} \in \mathbb{Z}_m^*$ esetén $\left(\overline{a}^k\right)^{-1} = \left(\overline{a}^{-1}\right)^k$.

42. feladat Mennyit ad maradékul 31-gyel osztva $33 \cdot \ldots \cdot 59$?

43. feladat Mutassa meg, hogy ha $n > 4$ összetett szám, akkor $(n-1)! \equiv 0 \pmod n$. (Ebből következik, hogy Wilson tételének a megfordítása is igaz.)

44. feladat* Bizonyítsa be, hogy $\left(\left(\frac{p-1}{2}\right)!\right)^2 \equiv (-1)^{\frac{p+1}{2}} \pmod p$ tetszőleges páratlan p prímszámra.

45. feladat* Bizonyítsa be, hogy $\binom{n}{p} \equiv \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor \pmod p$ minden p prímszámra és $n > p$ természetes számra.

46. feladat Bizonyítsa be, hogy $(2p-1)! - p$ osztható p^2-tel bármely p prímszám esetén.

47. feladat Egy tizenhéttagú kalózcsapat egy zsák aranypénzt lopott. Amikor megpróbálták egyenlően elosztani, azt tapasztalták, hogy három aranypénz kimaradt. A kimaradt aranyak fölötti vitában egy kalózt megöltek. Ezután újraosztották egyenlő arányban a zsákmányt, s most tíz arany maradt ki. Az e fölötti vitában egy újabb kalózt öltek meg, s ezután már el tudták osztani a lopott aranyat úgy, hogy mindenki ugyanannyit kapott. Legkevesebb hány aranypénzt zsákmányoltak? (Segítség: ez egy ókori kínai probléma.)

48. feladat Ha egy kosár tojást 2, 3, 4, 5 vagy 6-osával ürítünk ki, rendre 1, 2, 3, 4, 5 tojás marad benne. Ha azonban 7-esével vesszük ki a tojásokat, akkor egy sem marad benne. Legalább hány tojás lehet a kosárban?

49. feladat Oldja meg a $73x \equiv 1 \pmod{247}$ kongruenciát. (Útmutatás: Vizsgáljuk külön modulo 13 és modulo 19 a kongruenciát, majd ezek megoldásaiból „gyúrjuk össze" az eredeti kongruencia megoldását a kínai maradéktétel segítségével.)

50. feladat Melyek azok a természetes számok, amelyek négyzete tízes számrendszerben 29-re végződik? (Akárcsak az előző feladatnál, itt is használható a kínai maradéktétel.)

51. feladat* Hány olyan n egész szám van, melyre $10^{2012} \mid n^2 - n$ és $0 < n < 10^{2012}$?

3. Számelméleti függvények

52. feladat Melyik az a legkisebb természetes szám, amelynek pontosan 25 osztója van?

53. feladat Mennyi lehet az n természetes szám értéke, ha $\sigma(n) = 307$?

54. feladat Bizonyítsa be, hogy tetszőleges rögzített $k \geq 2$ esetén a $\tau(n) = k$ egyenletnek végtelen sok megoldása van, míg a $\sigma(n) = k$ egyenletnek csak véges sok.

55. feladat Mennyi lehet az n természetes szám értéke, ha $\varphi(n) = 1210$?

56. feladat Igazolja, hogy az $n = 1, 2$ esetek kivételével $\varphi(n)$ sosem páratlan.

57. feladat Oldja meg a $\varphi(2n) = n$ egyenletet a természetes számok halmazán.

58. feladat Oldja meg a $\varphi(n) = n - 2$ egyenletet a természetes számok halmazán.

59. feladat* Legyen A az az $n \times n$-es mátrix, amelyben az i-edik sor j-edik eleme $\operatorname{lnko}(i, j)$. Határozza meg A determinánsát.

60. feladat Bizonyítsa be, hogy minden n természetes számra teljesül a $\varphi\left(n^2\right) = n\varphi(n)$ egyenlőség.

61. feladat Melyek azok a természetes számok, amelyeknek páratlan sok osztójuk van?

62. feladat Gondoltam egy számot, összeszoroztam az osztóit, és az eredmény 8000 lett. Melyik számra gondoltam?

63. feladat* Mutassa meg, hogy bármilyen számot is írunk a 8000 helyébe az előző feladatban, a megoldás mindig egyértelmű lesz (ha létezik egyáltalán).

64. feladat Igazolja, hogy minden n természetes számra $\tau(n) < 2\sqrt{n}$.

65. feladat* Melyek azok az n természetes számok, amelyekre $\tau(n) \geq 2\sqrt{n} - 1$?

66. feladat* Bizonyítsa be, hogy a $\left\{\tau\left(n^2+1\right)\right\}_{n=n_0}^{\infty}$ sorozat nem szigorúan monoton semmilyen n_0 természetes számra.

67. feladat* Mutassa meg, hogy egy természetes szám annyiféleképp állítható elő egymást követő természetes számok összegeként, ahány páratlan osztója van.

68. feladat Igazolja, hogy minden n természetes számra $\tau(n) + \varphi(n) \leq n + 1$. Mikor áll fenn egyenlőség?

69. feladat Bizonyítsa be, hogy $3 \mid \sigma(3n-1)$ minden n természetes számra.

70. feladat Oldja meg a $\sigma(n) = n + 3$ egyenletet a természetes számok halmazán.

71. feladat* Oldja meg a $\sigma(n) = n + 10$ egyenletet a természetes számok halmazán.

72. feladat Oldja meg az $n + \tau(n) = \sigma(n)$ egyenletet a természetes számok halmazán.

73. feladat* Nevezzük az n számot furcsának, ha $\sigma(n) \geq 2n$ és n nem áll elő néhány valódi osztójának összegeként. Mutassa meg, hogy végtelen sok furcsa szám van. (Egy ötlet: ha n furcsa, és p elég nagy prímszám, akkor pn is furcsa.)

74. feladat Mennyi lehet n értéke, ha $\varphi(n) = 40$, és $\sigma(n) = n + 1$?

75. feladat Oldja meg a $\mu(x) + 2 = \mu(6x)$ egyenletet a természetes számok halmazán.

76. feladat Bizonyítsa be, hogy ha n páratlan szám, akkor $\mu\left(n^2+3\right) = 0$.

77. feladat* Mutassa meg, hogy a $\mu(1),\ \mu(2),\ \mu(3),\ \ldots$ sorozatban lehet találni tetszőlegesen sok egymást követő nullát.

78. feladat Jelölje az f gyengén multiplikatív számelméleti függvény összegzési függvényét F. Határozza meg $F(45)$ értékét, ha $f(3) = 2, f(5) = 7, f(45) = 21$.

79. feladat Jelölje az előző feladatbeli f függvény megfordítási függvényét ι. Határozza meg $\iota(45)$ értékét.

80. feladat Határozza meg a $\rho(n) = \frac{1}{n}$ számelméleti függvény összegzési függvényét, és írja rá fel a Möbius-féle inverziós formulát.

81. feladat Határozza meg a

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p, & \text{ha } n = p^\alpha \ (p \text{ prímszám}) \\ 0, & \text{ha } n \text{ nem prímhatvány} \end{cases}$$

képlettel definiált számelméleti függvény (Mangoldt-féle függvény) összegzési függvényét, és írja rá fel a Möbius-féle inverziós formulát.

82. feladat Bizonyítsa be, hogy minden n természetes számra $\sum_{d \mid n} \tau(d) \frac{n}{d} = \sum_{d \mid n} \sigma(d)$. (Útmutatás: Igazoljuk, hogy mind a bal-, mind a jobboldal gyengén multiplikatív számelméleti függvényt határoz meg. Ezután elegendő prímhatványokra igazolni az egyenlőséget.)

83. feladat Adjon új (egyszerűbb) megoldást az előző feladatra a konvolúció műveletének asszociativitására támaszkodva.