

# BEVEZETÉS A SZÁMELMÉLETBE

szorgalmi feladatok

(2014 őszi félév)

Waldhauser Tamás

## 1. Osztathóság, legnagyobb közös osztó, prímfaktorizáció az egész számok körében

**1. feladat** Igazolja, hogy  $7 \mid 10a + b \Leftrightarrow 7 \mid a - 2b$  teljesül minden  $a, b$  egész számra. Adjon ennek segítségével eljárást nagy számok 7-tel való osztathóságának eldöntésére. Például osztható-e 7-tel 334989655?

**2. feladat** Mutassa meg, hogy  $2^n - 1$  csak akkor lehet prím, ha  $n$  is az. (Mersenne-prímek)

**3. feladat** Mutassa meg, hogy  $2^n + 1$  csak akkor lehet prím, ha  $n$  kettőhatvány. (Fermat-prímek)

**4. feladat\*** Bizonyítsa be, hogy  $n \geq 2$  esetén  $\sum_{0 \leq k < \frac{n}{2}} \binom{n}{2k+1} 5^k$  osztható  $2^{n-1}$ -nel. (Segíthet, ha megsejtjük, hogy hányszor van meg benne a  $2^{n-1}$ . Ehhez számítsuk ki az összeget  $n = 2, 3, 4, 5, 6, \dots$ -ra, amíg észre nem veszünk valamit.)

**5. feladat\*** Legyen  $f$  egy olyan egész együtthatós másodfokú polinom, amelyre  $f(k)$  osztható 5-tel minden  $k$  egész számra. Mutassa meg, hogy  $f$  minden együtthatója 5-tel osztható. Mi a helyzet magasabbfokú polinomokkal? És ha 5 helyett más (prím)számot veszünk?

**6. feladat** Mely  $p$  prímszámokra lesz  $29p + 1$  négyzetszám?

**7. feladat** Bizonyítsa be, hogy bármely  $p$  prímszámra és  $k < p$  pozitív egészre  $\binom{p}{k}$  osztható  $p$ -vel.

**8. feladat** Legyenek  $a$  és  $b$  pozitív egész számok, amelyekre  $a^3 = b^2$  teljesül. Mutassa meg, hogy ekkor létezik olyan  $k$  pozitív egész, amelyre  $a = k^2$  és  $b = k^3$ .

**9. feladat\*** Jelölje  $\nu_p(n)$ -nel az  $n$  természetes szám prímtényezősz felbontásában a  $p$  prím kitevőjét. (Tehát  $\nu_p(n) = k$  akkor és csak akkor, ha  $p^k \mid n$  és  $p^{k+1} \nmid n$ .) Igazolja, hogy minden  $n$  pozitív egészre  $\nu_2((n+1) \cdot (n+2) \cdot \dots \cdot (2n)) = n$ .

**10. feladat\*** Bizonyítsa be Legendre képletét: minden  $n$  pozitív egészre  $\nu_p(n!) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$ . (Ez egy véges összeg!)

**11. feladat\*** Mutassa meg, hogy

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{n}{2^k} = n, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{2^k} \right\rfloor = n, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \left\lceil \frac{n}{2^k} \right\rceil = n - s(n),$$

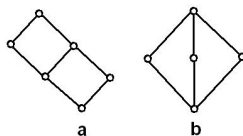
ahol  $s(n)$  az  $n$  szám kettes számrendszerbeli alakjában előforduló 1-es számjegyek száma,  $\lfloor x \rfloor$  pedig az  $x$  valós számhoz legközelebbi egész. (Mi köze a középső szummának az előző két feladathoz?)

**12. feladat** Határozza meg mindazokat az  $a, b$  természetes számokat, amelyekre  $(a, b) = 22$  és  $[a, b] = 264$  teljesül.

**13. feladat** Határozza meg mindazokat az  $a, b$  természetes számokat, amelyekre  $[a, b] = 720$  és  $a + b = 98$ .

**14. feladat** Rajzolja le az összes 2, 3 illetve 4 pontú Hasse-diagramot.

**15. feladat** Van-e olyan  $n$  természetes szám, amelyre  $(D_n; |)$  Hasse-diagramja a következő? Hány ilyen  $n$  szám van?



**16. feladat** Rajzoljon olyan Hasse-diagramot, amelyben egyetlen minimális elem van, de nincs legkisebb elem.

**17. feladat** Január hatodikán négy hajó futott be Boston kikötőjébe. Az egyik hajó négyhetente tér vissza Bostonba, a másik minden nyolcadik héten, a harmadik és a negyedik pedig 12 illetve 16 hetente. Találkoznak-e még idén ebben a kikötőben?

**18. feladat** Mutassa meg, hogy ha  $a$  és  $b$  relatív prímek, akkor  $a + b$  és  $ab$  is azok.

**19. feladat** Egy négyjegyű számmal osztva 25707 32-t, 37568 pedig 43-at ad maradékul. Melyik ez a négyjegyű szám?

**20. feladat** Mennyi lehet két szomszédos Fibonacci-szám legnagyobb közös osztója?

**21. feladat\*** Bizonyítsa be, hogy ha az  $a > b > 0$  számokon végrehajtott euklideszi algoritmus pontosan  $n$  lépésből áll, akkor  $a \geq F_{n+2}$  és  $b \geq F_{n+1}$ , ahol  $F_n$  az  $n$ -edik Fibonacci-szám ( $F_0 = 0, F_1 = 1, F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ ).

**22. feladat\*** Mennyi  $a^n - 1$  és  $a^m - 1$  legnagyobb közös osztója?

**23. feladat** Mely  $n$  természetes számok esetén lehet egyszerűsíteni a  $\frac{3n+2}{4n+1}$  törtet?

**24. feladat\*** Legyen  $t(x) = \frac{1}{\{x\}}$ , ha  $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ . Egy  $\alpha$  valós számból kiindulva képezzük sorra a  $t(\alpha)$ ,  $t(t(\alpha))$ ,  $t(t(t(\alpha)))$ , ... számokat. Mutassa meg, hogy a sorozat akkor és csak akkor szakad meg, ha  $\alpha$  racionális szám.

**25. feladat\*** Határozza meg a  $t(x)$  függvény *fixpontjait*, vagyis mindazokat az  $\alpha$  valós számokat, amelyekre  $t(\alpha) = \alpha$ .

**26. feladat** Száz szál virágot vásároltunk három különböző fajtából, összesen 30000 forintért. Az egyes virágfajták ára darabonként rendre 130, 190 és 320 forint. Mennyit vettünk az egyes fajtákból?

## 2. Számelméleti kongruenciák

**27. feladat** Határozza meg  $7 + 7^2 + 7^3 + \dots + 7^{4000}$  utolsó két számjegyét.

**28. feladat** Bizonyítsa be, hogy a tízes számrendszerben felírt  $\overline{a_n \dots a_2 a_1 a_0}$  szám akkor és csak akkor osztható 37-tel, ha az

$$\overline{a_1 a_0} - \overline{a_2 a_1} + \overline{a_3 a_2} - \overline{a_4 a_3} + \dots$$

szám osztható 37-tel. Döntse el ennek segítségével, hogy osztható-e 37-tel 334989655?

**29. feladat** Mutassa meg, hogy ha  $m$  páratlan prímhatvány, akkor az  $x^2 \equiv 1 \pmod{m}$  kongruenciának csak két megoldása van:  $x \equiv \pm 1 \pmod{m}$ . Igaz marad-e az állítás, ha  $m$  nem prímhatvány?

**30. feladat** Igazolja, hogy a 11, 111, 1111, ... sorozatban nincs négyzetszám.

**31. feladat** Határozza meg az összes olyan  $n$  természetes számot, amelyre  $1! + 2! + 3! + \dots + n!$  négyzetszám.

**32. feladat** Bizonyítsa be, hogy a Fibonacci-sorozat minden negyedik tagja osztható hárommal.

**33. feladat** Milyen számjegyeket kell írni  $a$  és  $b$  helyére, hogy  $\overline{1456ab}$  osztható legyen 41-gyel?

**34. feladat\*** Négy egymást követő pozitív egész közül legalább az egyik összetett, hasonlóan öt egymást követő páratlan szám közül legalább az egyik összetett (ugye?). Mutassa meg, hogy tetszőleges pozitív egészekből álló számtani sorozathoz lehet találni olyan  $K$  számot, hogy a számtani sorozat bármely  $K$  egymást követő tagja között van összetett szám.

**35. feladat\*** Mely  $n$  pozitív egészekre igaz a következő állítás:  $\forall a, b \in \mathbb{N} : 11 \mid a^n + b^n \implies 11 \mid a$  és  $11 \mid b$ ?

**36. feladat** Adjon meg olyan egész számokat, amelyek teljes maradékrendszert alkotnak modulo 8, és egyúttal redukált maradékrendszert alkotnak modulo 15.

**37. feladat** Hány ekvivalenciareláció adható meg egy kételemű alaphalmazon? És három- illetve négyelemű halmazon?

**38. feladat** Megadható-e egy 8 elemű alaphalmazon olyan ekvivalenciareláció, amely pontosan 40 elempárból áll? És olyan, ami pontosan 41 elempárból áll?

**39. feladat** Melyek azok a relációk, amelyek egyszerre szimmetrikusak és antiszimmetrikusak is?

**40. feladat** Mennyit ad 73-mal osztva  $x$  maradékul, ha  $x^{99} \equiv 22 \pmod{73}$  és  $x^{100} \equiv 69 \pmod{73}$ ?

**41. feladat** Igazolja, hogy bármely  $m, k \in \mathbb{N}$  és  $\bar{a} \in \mathbb{Z}_m^*$  esetén  $(\bar{a}^k)^{-1} = (\bar{a}^{-1})^k$ .

**42. feladat** Mennyit ad maradékul 31-gyel osztva  $33 \cdot \dots \cdot 59$ ?

**43. feladat** Mutassa meg, hogy ha  $n > 4$  összetett szám, akkor  $(n-1)! \equiv 0 \pmod{n}$ . (Ebből következik, hogy Wilson tételének a megfordítása is igaz.)

**44. feladat\*** Bizonyítsa be, hogy  $\left(\left(\frac{p-1}{2}\right)!\right)^2 \equiv (-1)^{\frac{p+1}{2}} \pmod{p}$  tetszőleges páratlan  $p$  prímszámra.

**45. feladat\*** Bizonyítsa be, hogy  $\binom{n}{p} \equiv \lfloor \frac{n}{p} \rfloor \pmod{p}$  minden  $p$  prímszámra és  $n > p$  természetes számra.

**46. feladat** Bizonyítsa be, hogy  $(2p-1)! - p$  osztható  $p^2$ -tel bármely  $p$  prímszám esetén.

**47. feladat** Egy tizenhéttagú kalózcsoport egy zsák aranypénzt lopott. Amikor megpróbálták egyenlően elosztani, azt tapasztalták, hogy három aranypénz kimaradt. A kimaradt aranyak fölötti vitában egy kalózt megöltek. Ezután újraosztották egyenlő arányban a zsákmányt, s most tíz arany maradt ki. Az e fölötti vitában egy újabb kalózt öltek meg, s ezután már el tudták osztani a lopott aranyat úgy, hogy mindenki ugyanannyit kapott. Legkevesebb hány aranypénzt zsákmányoltak? (Segítség: ez egy ókori kínai probléma.)

**48. feladat** Ha egy kosár tojást 2, 3, 4, 5 vagy 6-osával ürítünk ki, rendre 1, 2, 3, 4, 5 tojás marad benne. Ha azonban 7-esével vesszük ki a tojásokat, akkor egy sem marad benne. Legalább hány tojás lehet a kosárban?

**49. feladat** Oldja meg a  $73x \equiv 1 \pmod{247}$  kongruenciát. (Útmutatás: Vizsgáljuk külön modulo 13 és modulo 19 a kongruenciát, majd ezek megoldásaiból „gyúrjuk össze” az eredeti kongruencia megoldását a kínai maradéktétel segítségével.)

**50. feladat** Melyek azok a természetes számok, amelyek négyzete tízes számrendszerben 29-re végződik? (Akárcsak az előző feladatnál, itt is használható a kínai maradéktétel.)

**51. feladat\*** Hány olyan  $n$  egész szám van, melyre  $10^{2012} \mid n^2 - n$  és  $0 < n < 10^{2012}$ ?

### 3. Számelméleti függvények

- 52. feladat** Melyik az a legkisebb természetes szám, amelynek pontosan 25 osztója van?
- 53. feladat** Mennyi lehet az  $n$  természetes szám értéke, ha  $\sigma(n) = 307$ ?
- 54. feladat** Bizonyítsa be, hogy tetszőleges rögzített  $k \geq 2$  esetén a  $\tau(n) = k$  egyenletnek végtelen sok megoldása van, míg a  $\sigma(n) = k$  egyenletnek csak véges sok.
- 55. feladat** Mennyi lehet az  $n$  természetes szám értéke, ha  $\varphi(n) = 1210$ ?
- 56. feladat** Igazolja, hogy az  $n = 1, 2$  esetek kivételével  $\varphi(n)$  sosem páratlan.
- 57. feladat** Oldja meg a  $\varphi(2n) = n$  egyenletet a természetes számok halmazán.
- 58. feladat** Oldja meg a  $\varphi(n) = n - 2$  egyenletet a természetes számok halmazán.
- 59. feladat\*** Legyen  $A$  az az  $n \times n$ -es mátrix, amelyben az  $i$ -edik sor  $j$ -edik eleme  $\ln k(i, j)$ . Határozza meg  $A$  determinánsát.
- 60. feladat** Bizonyítsa be, hogy minden  $n$  természetes számra teljesül a  $\varphi(n^2) = n\varphi(n)$  egyenlőség.
- 61. feladat** Melyek azok a természetes számok, amelyeknek páratlan sok osztójuk van?
- 62. feladat** Gondoltam egy számot, összeszoroztam az osztóit, és az eredmény 8000 lett. Melyik számra gondoltam?
- 63. feladat\*** Mutassa meg, hogy bármilyen számot is írunk a 8000 helyébe az előző feladatban, a megoldás mindig egyértelmű lesz (ha létezik egyáltalán).
- 64. feladat** Igazolja, hogy minden  $n$  természetes számra  $\tau(n) < 2\sqrt{n}$ .
- 65. feladat\*** Melyek azok az  $n$  természetes számok, amelyekre  $\tau(n) \geq 2\sqrt{n} - 1$ ?
- 66. feladat\*** Bizonyítsa be, hogy a  $\{\tau(n^2 + 1)\}_{n=n_0}^{\infty}$  sorozat nem szigorúan monoton semmilyen  $n_0$  természetes számra.
- 67. feladat\*** Mutassa meg, hogy egy természetes szám annyiféleképp állítható elő egymást követő természetes számok összegeként, ahány páratlan osztója van.
- 68. feladat** Igazolja, hogy minden  $n$  természetes számra  $\tau(n) + \varphi(n) \leq n + 1$ . Mikor áll fenn egyenlőség?
- 69. feladat** Bizonyítsa be, hogy  $3 \mid \sigma(3n - 1)$  minden  $n$  természetes számra.
- 70. feladat** Oldja meg a  $\sigma(n) = n + 3$  egyenletet a természetes számok halmazán.
- 71. feladat\*** Oldja meg a  $\sigma(n) = n + 10$  egyenletet a természetes számok halmazán.
- 72. feladat** Oldja meg az  $n + \tau(n) = \sigma(n)$  egyenletet a természetes számok halmazán.
- 73. feladat\*** Nevezzük az  $n$  számot furcsának, ha  $\sigma(n) \geq 2n$  és  $n$  nem áll elő néhány valódi osztójának összegeként. Mutassa meg, hogy végtelen sok furcsa szám van. (Egy ötlet: ha  $n$  furcsa, és  $p$  elég nagy prímszám, akkor  $pn$  is furcsa.)
- 74. feladat** Mennyi lehet  $n$  értéke, ha  $\varphi(n) = 40$ , és  $\sigma(n) = n + 1$ ?
- 75. feladat** Oldja meg a  $\mu(x) + 2 = \mu(6x)$  egyenletet a természetes számok halmazán.
- 76. feladat** Bizonyítsa be, hogy ha  $n$  páratlan szám, akkor  $\mu(n^2 + 3) = 0$ .
- 77. feladat\*** Mutassa meg, hogy a  $\mu(1), \mu(2), \mu(3), \dots$  sorozatban lehet találni tetszőlegesen sok egymást követő nullát.
- 78. feladat** Jelölje az  $f$  gyengén multiplikatív számelméleti függvény összegzési függvényét  $F$ . Határozza meg  $F(45)$  értékét, ha  $f(3) = 2, f(5) = 7, f(45) = 21$ .
- 79. feladat** Jelölje az előző feladatbeli  $f$  függvény megfordítási függvényét  $\epsilon$ . Határozza meg  $\epsilon(45)$  értékét.
- 80. feladat** Határozza meg a  $\rho(n) = \frac{1}{n}$  számelméleti függvény összegzési függvényét, és írja rá fel a Möbius-féle inverziós formulát.
- 81. feladat** Határozza meg a

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p, & \text{ha } n = p^\alpha \text{ (} p \text{ prímszám)} \\ 0, & \text{ha } n \text{ nem prímszám} \end{cases}$$

képlettel definiált számelméleti függvény (Mangoldt-féle függvény) összegzési függvényét, és írja rá fel a Möbius-féle inverziós formulát.

- 82. feladat** Bizonyítsa be, hogy minden  $n$  természetes számra  $\sum_{d|n} \tau(d) \frac{n}{d} = \sum_{d|n} \sigma(d)$ . (Útmutatás: Igazoljuk, hogy mind a bal-, mind a jobboldal gyengén multiplikatív számelméleti függvényt határoz meg. Ezután elegendő prímszámokra igazolni az egyenlőséget.)

- 83. feladat** Adjon új (egyszerűbb) megoldást az előző feladatra a konvolúció műveletének asszociativitására támaszkodva.

#### 4. Hatványozás modulo $m$

- 84. feladat** Mennyit ad 53-mal osztva maradékul  $80^{(111^{50})}$ ?
- 85. feladat** Mennyit ad héttel osztva maradékul  $11^{11} + 11^{11^2} + 11^{11^3} + \dots + 11^{11^{11}}$ ?
- 86. feladat** Mennyit ad héttel osztva maradékul  $111 \dots 111$  (99 egyes)?
- 87. feladat** Bizonyítsa be, hogy minden  $n$  természetes szám esetén az  $n, n^8 - 1, n^8 + 1$  számok közül az egyik osztható 17-tel.
- 88. feladat** Mutassa meg, hogy ha  $(a, 100) = 1$ , akkor  $a^{20} \equiv 1 \pmod{100}$  teljesül. Hasonlítsa össze ezt az állítást az Euler-Fermat-tétellel.
- 89. feladat** Igazolja, hogy  $a^{561} \equiv a \pmod{561}$  bármely  $a$  egész számra.
- 90. feladat** Bizonyítsa be, hogy ha  $n$  nem osztható se 2-vel se 5-tel, akkor van  $99 \dots 99$  alakú többszöröse.
- 91. feladat** Legyen  $p$  és  $q$  két különböző prímszám. Mutassa meg, hogy  $p^{q-1} + q^{p-1} \equiv 1 \pmod{pq}$ .
- 92. feladat\*** Igazolja, hogy bármely  $p$  páratlan prímszámra  $2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot \dots \cdot (p-1)^2 \equiv (-1)^{\frac{p+1}{2}} \pmod{p}$ .
- 93. feladat\*** Legyen  $p > 3$  prímszám és  $n = \frac{2^{2p}-1}{3}$ . Bizonyítsa be, hogy  $n \mid 2^n - 2$ .
- 94. feladat\*** Legyen  $m > 2$  olyan természetes szám, ami se kettővel, se ötten nem osztható. Ismeretes, hogy ekkor  $\frac{1}{m}$  egy tiszta szakaszos végtelen tizedes tört. Igazolja, hogy a szakasz hossza nem más, mint  $o_m(10)$ . (Például  $m = 7$  esetén  $\frac{1}{7} = 0,14285\dot{7}$ , vagyis a szakasz hossza 6, ami ugyanaz, mint 10 rendje modulo 7.)
- 95. feladat\*** Legyen  $p > 5$  prímszám, és tegyük fel, hogy  $\frac{1}{p}$  tizedestört alakja  $0, \dot{a}_1 \dots a_n b_1 \dots \dot{b}_n$ , vagyis a szakasz hossza  $2n$ . Mutassa meg, hogy ekkor az  $\overline{a_1 \dots a_n} + \overline{b_1 \dots b_n}$  szám csupa 9-es számjegyből áll. (Például  $p = 7$  esetén  $\frac{1}{7} = 0,14285\dot{7}$ , és valóban  $142 + 857 = 999$ .)
- 96. feladat** Mutassa meg, hogy 2 primitív gyök modulo 19, de nem primitív gyök modulo 17.
- 97. feladat** Bizonyítsa be, hogy ha  $g$  primitív gyök modulo  $p$ , akkor  $g^{-1}$  is primitív gyök modulo  $p$ .
- 98. feladat** Igazolja, hogy ha  $p$  páratlan prímszám és  $g$  primitív gyök modulo  $p$ , akkor  $g^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod{p}$ .
- 99. feladat** Legyen  $p$  páratlan prímszám és legyenek  $g_1, g_2$  primitív gyökök modulo  $p$ . Lehetséges-e, hogy  $g_1 g_2$  is primitív gyök modulo  $p$ ?
- 100. feladat** Adjon képletet a  $\left(\frac{3}{p}\right)$  Legendre-szimbólumra.
- 101. feladat** Mely  $p$  prímszámokra oldható meg az  $x^2 + x + 1 \equiv 0 \pmod{p}$  kongruencia?
- 102. feladat\*** Bizonyítsa be, hogy ha  $n$  páratlan szám, akkor  $n^2 + 2$  minden osztója  $8k + 1$  vagy  $8k + 3$  alakú.
- 103. feladat\*** Oldja meg a 35. feladatot 11 helyett tetszőleges  $4k + 3$  alakú prímszámra.

#### 5. Számok felbontása hatványok összegére

- 104. feladat** Határozza meg az összes primitív pitagoraszi számhármast amelyben szerepel a 12 (akár befogóként akár átfogóként).
- 105. feladat** Határozza meg az összes pitagoraszi számhármast amelyben szerepel a 12 (akár befogóként akár átfogóként).
- 106. feladat** Igazolja, hogy bármely  $(x, y, z)$  primitív pitagoraszi számhármásra  $12 \mid xy$  és  $60 \mid xyz$ .
- 107. feladat** Határozza meg az összes olyan pitagoraszi számhármast, amelynek elemei számtani sorozatot alkotnak.
- 108. feladat** Bizonyítsa be, hogy minden  $n$  természetes számhoz létezik olyan pitagoraszi számhármast, hogy az általa meghatározott háromszög beírt körének sugara  $n$ .