

# BEVEZETÉS A SZÁMELMÉLETBE

feladatsor a kiemelt gyakorlathoz

(2013 őszi félév)

Waldhauser Tamás

## 1. Osztathóság, legnagyobb közös osztó, prímfaktorizáció az egész számok körében

**1. feladat**<sup>o</sup> Bizonyítsa be nevezetes azonosságok segítségével (szorzattá alakítással), hogy  $11^{n+2} + 12^{2n+1}$  osztható 133-mal minden  $n$  természetes számra.

**2. feladat**<sup>o</sup> Bizonyítsa be teljes indukcióval, hogy  $11^{n+2} + 12^{2n+1}$  osztható 133-mal minden  $n$  természetes számra.

**3. feladat** Igazolja, hogy  $7 \mid 10a + b \Leftrightarrow 7 \mid a - 2b$  teljesül minden  $a, b$  egész számra. Adjon ennek segítségével eljárást nagy számok 7-tel való osztathóságának eldöntésére. Például osztható-e 7-tel 334989655?

**4. feladat** Mutassa meg, hogy  $2^n - 1$  csak akkor lehet prím, ha  $n$  is az. (Mersenne-prímek)

**5. feladat** Mutassa meg, hogy  $2^n + 1$  csak akkor lehet prím, ha  $n$  kettőhatvány. (Fermat-prímek)

**6. feladat** Bizonyítsa be, hogy  $n \geq 2$  esetén  $\sum_{0 \leq k < \frac{n}{2}} \binom{n}{2k+1} 5^k$  osztható  $2^{n-1}$ -nel. (Segíthet, ha megsejtjük, hogy hányszor van meg benne a  $2^{n-1}$ . Ehhez számítsuk ki az összeget  $n = 2, 3, 4, 5, 6, \dots$ -ra, amíg észre nem veszünk valamit.)

**7. feladat** Mely  $n$  pozitív egészekre igaz a következő állítás:  $\forall a, b \in \mathbb{N} : 11 \mid a^n + b^n \implies 11 \mid a$  és  $11 \mid b$ ?

**8. feladat** Legyen  $f$  egy olyan egész együtthatós másodfokú polinom, amelyre  $f(k)$  osztható 5-tel minden  $k$  egész számra. Mutassa meg, hogy  $f$  minden együtthatója 5-tel osztható. Mi a helyzet magasabbfokú polinomokkal? És ha 5 helyett más (prím)számot veszünk?

**9. feladat**<sup>o</sup> Bontsa prímtenyezők szorzatára a 630 és 750 számokat, majd ennek segítségével határozza meg a legnagyobb közös osztójukat és a legkisebb közös többszörösüket.

**10. feladat** Bizonyítsa be, hogy bármely  $p$  prímszámra és  $k < p$  pozitív egészre  $\binom{p}{k}$  osztható  $p$ -vel.

**11. feladat** Legyenek  $a$  és  $b$  pozitív egész számok, amelyekre  $a^3 = b^2$  teljesül. Mutassa meg, hogy ekkor létezik olyan  $k$  pozitív egész, amelyre  $a = k^2$  és  $b = k^3$ .

**12. feladat** Jelölje  $\nu_p(n)$ -nel az  $n$  természetes szám prímtenyezős felbontásában a  $p$  prím kitevőjét. (Tehát  $\nu_p(n) = k$  akkor és csak akkor, ha  $p^k \mid n$  és  $p^{k+1} \nmid n$ .) Igazolja, hogy minden  $n$  pozitív egészre  $\nu_2((n+1) \cdot (n+2) \cdot \dots \cdot (2n)) = n$ .

**13. feladat** Bizonyítsa be Legendre képletét: minden  $n$  pozitív egészre  $\nu_p(n!) = \sum_{k=1}^{\infty} \lfloor \frac{n}{p^k} \rfloor$ . (Ez egy véges összeg!)

**14. feladat** Mutassa meg, hogy

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{n}{2^k} = n, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \lfloor \frac{n}{2^k} \rfloor = n, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \lfloor \frac{n}{2^k} \rfloor = n - s(n),$$

ahol  $s(n)$  az  $n$  szám kettes számrendszerbeli alakjában előforduló 1-es számjegyek száma,  $\lfloor x \rfloor$  pedig az  $x$  valós számhoz legközelebbi egész. (Mi köze a középső szummának az előző két feladathoz?)

**15. feladat** Mutassa meg, hogy ha  $a$  és  $b$  relatív prímek, akkor  $a + b$  és  $ab$  is azok.

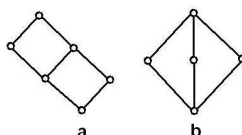
**16. feladat** Határozza meg az összes olyan  $n$  természetes számot, amelyre  $1! + 2! + 3! + \dots + n!$  négyzetszám.

**17. feladat**<sup>o</sup> Rajzolja fel az  $(A; |)$  részbenrendezett halmaz Hasse-diagramját, és határozza meg a minimális, maximális, legkisebb, legnagyobb elemeket, ahol  $A = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ .

**18. feladat**<sup>o</sup> Rajzolja fel az  $(D_{630} \cap D_{750}; |)$  részbenrendezett halmaz Hasse-diagramját. (Itt  $D_a$  az  $a$  természetes szám pozitív osztóinak halmazát jelöli.)

**19. feladat** Rajzolja le az összes 2, 3 illetve 4 pontú Hasse-diagramot.

**20. feladat** Van-e olyan  $n$  természetes szám, amelyre  $(D_n; |)$  Hasse-diagramja a következő? Hány ilyen  $n$  szám van?



**21. feladat** Rajzoljon olyan Hasse-diagramot, amelyben egyetlen minimális elem van, de nincs legkisebb elem.

- 22. feladat**<sup>o</sup> Számítsa ki az euklideszi algoritmussal 126 és 438 legnagyobb közös osztóját, majd adjon meg olyan  $x, y$  egész számokat, amelyekre  $126x + 438y = (126, 438)$ .
- 23. feladat** Mennyi  $a^n - 1$  és  $a^m - 1$  legnagyobb közös osztója?
- 24. feladat** Mely  $n$  természetes számok esetén lehet egyszerűsíteni a  $\frac{3n+2}{4n+1}$  törtet?
- 25. feladat** Legyen  $t(x) = \frac{1}{\{x\}}$ , ha  $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ . Egy  $\alpha$  valós számból kiindulva képezzük sorra a  $t(\alpha)$ ,  $t(t(\alpha))$ ,  $t(t(t(\alpha)))$ , ... számokat. Mutassa meg, hogy a sorozat akkor és csak akkor szakad meg, ha  $\alpha$  racionális szám.
- 26. feladat** Határozza meg a  $t(x)$  függvény *fixpontjait*, vagyis mindazokat az  $\alpha$  valós számokat, amelyekre  $t(\alpha) = \alpha$ .
- 27. feladat** Egy  $n$  oldal számú szabályos sokszög egyik csúcsában állok. A sokszög oldalainak hossza 1 mérföld, rajtam pedig hét mérföldes csizma van, így egy lépéssel a hetedik csúcsba jutok. Elindulok az egyik irányba, és addig meg se állok amíg vissza nem jutottam oda, ahonnan elindultam. Hány lépést fogok tenni? A csúcsok hányadrészt járom be?
- 28. feladat**<sup>o</sup> Kukutyinban 20 és 45 petákos érmék vannak forgalomban. Hogyan lehet ezekre felváltani 245 petákot? (Az összes megoldást határozza meg, ne csak egyet!)

## 2. Számelméleti kongruenciák

- 29. feladat**<sup>o</sup> Bizonyítsa be kongruenciák segítségével (teljes indukció nélkül), hogy  $11^{n+2} + 12^{2n+1}$  osztható 133-mal minden  $n$  természetes számra.
- 30. feladat** Határozza meg  $7 + 7^2 + 7^3 + \dots + 7^{4000}$  utolsó két számjegyét.
- 31. feladat** Bizonyítsa be, hogy a tízes számrendszerben felírt  $\overline{a_n \dots a_2 a_1 a_0}$  szám akkor és csak akkor osztható 37-tel, ha az

$$\overline{a_1 a_0} - \overline{a_2 a_2} + \overline{a_4 a_3} - \overline{a_5 a_5} + \dots$$

szám osztható 37-tel. Döntse el ennek segítségével, hogy osztható-e 37-tel 334989655?

- 32. feladat** Mutassa meg, hogy ha  $m$  páratlan prímhatvány, akkor az  $x^2 \equiv 1 \pmod{m}$  kongruenciának csak két megoldása van:  $x \equiv \pm 1 \pmod{m}$ . Igaz marad-e az állítás, ha  $m$  nem prímhatvány?
- 33. feladat** Négy egymást követő pozitív egész közül legalább az egyik összetett, hasonlóan öt egymást követő páratlan szám közül legalább az egyik összetett (ugye?). Mutassa meg, hogy tetszőleges pozitív egészekből álló számtani sorozathoz lehet találni olyan  $K$  számot, hogy a számtani sorozat bármely  $K$  egymást követő tagja között van összetett szám.
- 34. feladat**<sup>o</sup> Adja meg az  $A = \{2, 3, 8, 9, 14, 15, 19, 26\}$  alaphalmazon értelmezett

$$\rho = \{(a, b) : a \text{ és } b \text{ nem relatív prím}\} \subseteq A \times A$$

ekvivalenciarelációhoz tartozó osztályozást.

- 35. feladat**<sup>o</sup> Határozza meg a  $\varphi: \mathbb{Z}_5 \rightarrow \mathbb{Z}_5, x \mapsto x^2$  leképezés magját. Sorolja fel a  $\ker \varphi$  reláció összes elemét és adja meg a hozzá tartozó osztályozást.
- 36. feladat** Megadható-e egy 8 elemű alaphalmazon olyan ekvivalenciareláció, amely pontosan 40 elempárból áll? És olyan, ami pontosan 41 elempárból áll?
- 37. feladat** Melyek azok a relációk, amelyek egyszerre szimmetrikusak és antiszimmetrikusak is?
- 38. feladat**<sup>o</sup> Oldja meg a  $24x \equiv 84 \pmod{45}$  kongruenciát. (A megoldásokat az eredeti modulus szerint kell megadni!) Hány megoldás van modulo 45?
- 39. feladat**<sup>o</sup> Határozza meg a  $\bar{6}^{-2}$  hatványt  $\mathbb{Z}_{13}$ -ban.
- 40. feladat** Igazolja, hogy bármely  $m, k \in \mathbb{N}$  és  $\bar{a} \in \mathbb{Z}_m^*$  esetén  $(\bar{a}^k)^{-1} = (\bar{a}^{-1})^k$ .
- 41. feladat**<sup>o</sup> Oldja meg a  $4x \equiv 7 \pmod{9}, 10x \equiv 4 \pmod{12}$  kongruenciarendszert.
- 42. feladat** Ha egy kosár tojást 2, 3, 4, 5 vagy 6-osával ürítünk ki, rendre 1, 2, 3, 4, 5 tojás marad benne. Ha azonban 7-esével vesszük ki a tojásokat, akkor egy sem marad benne. Legalább hány tojás lehet a kosárban?
- 43. feladat**<sup>o</sup> Oldja meg az  $x \equiv a \pmod{3}, x \equiv b \pmod{5}, x \equiv c \pmod{7}$  paraméteres kongruenciarendszert.
- 44. feladat** Oldja meg a  $73x \equiv 1 \pmod{247}$  kongruenciát. (Útmutatás: Vizsgáljuk külön modulo 13 és modulo 19 a kongruenciát, majd ezek megoldásából „gyúrjuk össze” az eredeti kongruencia megoldását a kínai maradéktétel segítségével.)
- 45. feladat** Melyek azok a természetes számok, amelyek négyzete tízes számrendszerben 29-re végződik? (Akárcsak az előző feladatnál, itt is használható a kínai maradéktétel.)
- 46. feladat** Hány olyan  $n$  egész szám van, melyre  $10^{2012} \mid n^2 - n$  és  $0 < n < 10^{2012}$ ?

- 47. feladat**<sup>o</sup> Mennyit ad maradékul 31-gyel osztva  $33 \cdot \dots \cdot 59$ ?
- 48. feladat** Mutassa meg, hogy ha  $n > 4$  összetett szám, akkor  $(n-1)! \equiv 0 \pmod{n}$ . (Ebből következik, hogy Wilson tételének a megfordítása is igaz.)
- 49. feladat** Bizonyítsa be, hogy  $\left(\left(\frac{p-1}{2}\right)!\right)^2 \equiv (-1)^{\frac{p+1}{2}} \pmod{p}$  tetszőleges páratlan  $p$  prímszámmra.
- 50. feladat** Bizonyítsa be, hogy  $\binom{n}{p} \equiv \lfloor \frac{n}{p} \rfloor \pmod{p}$  minden  $p$  prímszámmra és  $n > p$  természetes számmra.
- 51. feladat**<sup>o</sup> Teljes maradékrendszer-e  $1, 11, 21, 31, \dots, 751, 761$  modulo  $77$ ?
- 52. feladat**<sup>o</sup> Redukált maradékrendszer-e  $15, 35, 55, \dots, 315$  modulo  $32$ ?
- 53. feladat**<sup>o</sup> Mennyit ad 40-nel osztva maradékul  $13^{158}$ ?
- 54. feladat**<sup>o</sup> Mennyit ad 53-mal osztva maradékul  $80^{(111^{50})}$ ?
- 55. feladat** Mennyit ad héttel osztva maradékul  $111 \dots 111$  (99 egyes)?
- 56. feladat** Bizonyítsa be, hogy minden  $n$  pozitív egész esetén az  $n, n^8 - 1, n^8 + 1$  számok közül az egyik osztható 17-tel.
- 57. feladat** Mutassa meg, hogy ha  $(a, 100) = 1$ , akkor  $a^{20} \equiv 1 \pmod{100}$  teljesül. Hasonlítsa össze ezt az állítást az Euler-Fermat-tétellel.
- 58. feladat** Igazolja, hogy  $a^{561} \equiv a \pmod{561}$  bármely  $a$  egész számmra.
- 59. feladat** Bizonyítsa be, hogy ha  $n$  nem osztható se 2-vel se 5-tel, akkor van  $99 \dots 99$  alakú többszöröse.
- 60. feladat** Igazolja, hogy bármely  $p$  páratlan prímszámmra  $2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot \dots \cdot (p-1)^2 \equiv (-1)^{\frac{p+1}{2}} \pmod{p}$ .
- 61. feladat** Legyen  $p > 3$  prímszám és  $n = \frac{2^{2p}-1}{3}$ . Bizonyítsa be, hogy  $n \mid 2^n - 2$ .

### 3. Számelméleti függvények

- 62. feladat**<sup>o</sup> Melyik az a legkisebb természetes szám, amelynek pontosan 25 osztója van?
- 63. feladat**<sup>o</sup> Mennyi lehet az  $n$  természetes szám értéke, ha  $\sigma(n) = 307$ ?
- 64. feladat** Bizonyítsa be, hogy tetszőleges rögzített  $k \geq 2$  esetén a  $\tau(n) = k$  egyenletnek végtelen sok megoldása van, míg a  $\sigma(n) = k$  egyenletnek csak véges sok.
- 65. feladat**<sup>o</sup> Oldja meg a  $\mu(x) + 2 = \mu(6x)$  egyenletet a természetes számok halmazán.
- 66. feladat** Oldja meg a  $\varphi(n) = n - 2$  egyenletet a természetes számok halmazán.
- 67. feladat** Mi történik, ha egy számra sokszor egymás után alkalmazzuk az Euler-féle  $\varphi$  függvényt?
- 68. feladat** Legyen  $A$  az az  $n \times n$ -es mátrix, amelyben az  $i$ -edik sor  $j$ -edik eleme  $\ln k(i, j)$ . Határozza meg  $A$  determinánsát.
- 69. feladat** Melyek azok a természetes számok, amelyeknek páratlan sok osztójuk van?
- 70. feladat** Gondoltam egy számot, összeszoroztam az osztóit, és az eredmény 8000 lett. Melyik számra gondoltam?
- 71. feladat** Mutassa meg, hogy bármilyen számot is írunk a 8000 helyébe az előző feladatban, a megoldás mindig egyértelmű lesz (ha létezik egyáltalán).
- 72. feladat** Mutassa meg, hogy az  $n$  szám osztóinak szorzata  $n^{\frac{\tau(n)}{2}}$ .
- 73. feladat** Igazolja, hogy minden  $n$  természetes számmra  $\tau(n) < 2\sqrt{n}$ .
- 74. feladat** Melyek azok az  $n$  természetes számok, amelyekre  $\tau(n) \geq 2\sqrt{n} - 1$ ?
- 75. feladat** Bizonyítsa be, hogy a  $\{\tau(n^2 + 1)\}_{n=n_0}^{\infty}$  sorozat nem szigorúan monoton semmilyen  $n_0$  természetes számmra.
- 76. feladat** Igazolja, hogy minden  $n$  természetes számmra  $\tau(n) + \varphi(n) \leq n + 1$ . Mikor áll fenn egyenlőség?
- 77. feladat** Mutassa meg, hogy egy természetes szám annyiféleképp állítható elő egymást követő természetes számok összegeként, ahány páratlan osztója van.
- 78. feladat** Bizonyítsa be, hogy  $3 \mid \sigma(3n - 1)$  minden  $n$  természetes számmra.
- 79. feladat** Oldja meg a  $\sigma(n) = n + 10$  egyenletet a természetes számok halmazán.
- 80. feladat** Nevezzük az  $n$  számot furcsának, ha  $\sigma(n) \geq 2n$  és  $n$  nem áll elő néhány valódi osztójának összegeként. Mutassa meg, hogy végtelen sok furcsa szám van. (Egy ötlet: ha  $n$  furcsa, és  $p$  elég nagy prímszám, akkor  $pn$  is furcsa.)

- 81. feladat** Mutassa meg, hogy a  $\mu(1), \mu(2), \mu(3), \dots$  sorozatban lehet találni tetszőlegesen sok egymást követő nullát.
- 82. feladat**<sup>o</sup> Jelölje az  $f$  gyengén multiplikatív számelméleti függvény összegzési függvényét  $F$ . Határozza meg  $F(45)$  értékét, ha  $f(3) = 2, f(5) = 7, f(45) = 21$ .
- 83. feladat**<sup>o</sup> Jelölje az előző feladatbeli  $f$  függvény megfordítási függvényét  $\iota$ . Határozza meg  $\iota(45)$  értékét.
- 84. feladat** Határozza meg a  $\rho(n) = \frac{1}{n}$  számelméleti függvény összegzési függvényét, és írja rá fel a Möbius-féle inverziós formulát.

**85. feladat** Határozza meg a

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p, & \text{ha } n = p^\alpha \text{ (} p \text{ prímszám)} \\ 0, & \text{ha } n \text{ nem prímszám} \end{cases}$$

képlettel definiált számelméleti függvény (Mangoldt-féle függvény) összegzési függvényét, és írja rá fel a Möbius-féle inverziós formulát.

- 86. feladat** Bizonyítsa be, hogy minden  $n$  természetes számra  $\sum_{d|n} \tau(d) \frac{n}{d} = \sum_{d|n} \sigma(d)$ . (Útmutatás: Igazoljuk, hogy mind a bal-, mind a jobboldal gyengén multiplikatív számelméleti függvényt határoz meg. Ezután elegendő prímszámokra igazolni az egyenlőséget.)
- 87. feladat** Adjon új (egyszerűbb) megoldást az előző feladatra a konvolúció műveletének asszociativitására támaszkodva.

#### 4. Hatványozás modulo $m$

- 88. feladat**<sup>o</sup> Számítsa ki 2 rendjét modulo 21.
- 89. feladat** Legyen  $m > 2$  olyan természetes szám, ami se kettővel, se öttel nem osztható. Ismeretes, hogy ekkor  $\frac{1}{m}$  egy tiszta szakaszos végtelen tizedes tört. Igazolja, hogy a szakasz hossza nem más, mint  $o_m(10)$ . (Például  $m = 7$  esetén  $\frac{1}{7} = 0,142857$ , vagyis a szakasz hossza 6, ami ugyanaz, mint 10 rendje modulo 7.)
- 90. feladat** Legyen  $p > 5$  prímszám, és tegyük fel, hogy  $\frac{1}{p}$  tizedestört alakja  $0, \dot{a}_1 \dots a_n b_1 \dots \dot{b}_n$ , vagyis a szakasz hossza  $2n$ . Mutassa meg, hogy ekkor az  $\overline{a_1 \dots a_n + b_1 \dots b_n}$  szám csupa 9-es számjegyből áll. (Például  $p = 7$  esetén  $\frac{1}{7} = 0,142857$ , és valóban  $142 + 857 = 999$ .)
- 91. feladat**<sup>o</sup> Mutassa meg, hogy 2 primitív gyök modulo 19, de nem primitív gyök modulo 17.
- 92. feladat** Legyen  $p$  páratlan prímszám és legyenek  $g_1, g_2$  primitív gyökök modulo  $p$ . Lehetséges-e, hogy  $g_1 g_2$  is primitív gyök modulo  $p$ ?
- 93. feladat**<sup>o</sup> Oldja meg indextáblázat segítségével a  $3x^6 \equiv 1 \pmod{11}$  kongruenciát.
- 94. feladat**<sup>o</sup> Oldja meg indextáblázat segítségével a  $3 \cdot 5^x \equiv 20 \pmod{11}$  kongruenciát.
- 95. feladat**<sup>o</sup> Számítsa ki a  $\left(\frac{173}{181}\right)$  Legendre-szimbólum értékét a négyzetes reciprocitási tétel felhasználása nélkül.
- 96. feladat**<sup>o</sup> Számítsa ki a  $\left(\frac{103}{151}\right)$  Legendre-szimbólum értékét a négyzetes reciprocitási tétel felhasználásával.
- 97. feladat** Adjon képletet a  $\left(\frac{3}{p}\right)$  Legendre-szimbólumra.
- 98. feladat** Mely  $p$  prímszámokra oldható meg az  $x^2 + x + 1 \equiv 0 \pmod{p}$  kongruencia?
- 99. feladat** Bizonyítsa be, hogy ha  $n$  páratlan szám, akkor  $n^2 + 2$  minden osztója  $8k + 1$  vagy  $8k + 3$  alakú.
- 100. feladat** Oldja meg a 7. feladatot 11 helyett tetszőleges  $4k + 3$  alakú prímszámmal.

#### 5. Számok felbontása hatványok összegére

- 101. feladat**<sup>o</sup> Határozza meg az összes primitív pitagoraszi számhármast amelyben szerepel a 12 (akár befogóként akár átfogóként).
- 102. feladat** Határozza meg az összes pitagoraszi számhármast amelyben szerepel a 12 (akár befogóként akár átfogóként).
- 103. feladat** Igazolja, hogy bármely  $(x, y, z)$  primitív pitagoraszi számhármásra  $12 \mid xy$  és  $60 \mid xyz$ .
- 104. feladat** Határozza meg az összes olyan pitagoraszi számhármast, amelynek elemei számtani sorozatot alkotnak.
- 105. feladat** Bizonyítsa be, hogy minden  $n$  természetes számhoz létezik olyan pitagoraszi számhármast, hogy az általa meghatározott háromszög beírt körének sugara  $n$ .
- 106. feladat**<sup>o</sup> Felbontható-e 117000 két négyzetszám összegére? Ha igen, adja is meg egy felbontását.