Bevezetés a számelméletbe (tudnivalók a vizsgáról)

Waldhauser Tamás

2012 őszi félév

A végső (le)számolás

Legyen *gy* a gyakorlaton, *v* pedig a vizsgán nyújtott teljesítmény százalékban kifejezve, és legyen $sz = \dfrac{gy + v}{2}$.
Ekkor a végső jegy:

$$j = \begin{cases} 1, & \text{ha } gy < 40 \text{ vagy } v < 40; \\ \left\lfloor (sz - 31) \cdot 0,09 \right\rceil, & \text{ha } gy \geq 40 \text{ és } v \geq 40. \end{cases}$$

HF: Legalább mennyinek kell lennie *sz*-nek, hogy meglegyen a kettes?

A vizsga

A vizsgán 60 pontot lehet szerezni az alábbi bontásban:

- I. rész: tíz eldöntendő kérdés (igaz/hamis) $\longrightarrow$ 20 pont,
- II. rész: definíció/tétel kimondások + egy biz. $\longrightarrow$ 40 pont.
- Az I. rész beugró jellegű: ha kevesebb, mint 8 pont,
  akkor a vizsga a II. résztől függetlenül sikertelen.
- A II. résznél két lehetőség (II.A és II.B) közül lehet választani.

I. rész

Tíz állításról kell eldönteni, hogy igaz-e vagy sem; a választ nem kell indokolni. Minden jó válaszért 2 pont, minden rossz válaszért -1 pont jár $\longrightarrow$ t pont $(t \leq 20)$.

HF: véletlenszerű tippelés esetén mennyi a pontszám várható értéke?

1. $2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^5$ előáll két négyzetszám összegeként.
2. $\mathbb{Z}_{10}^{*} = \left\{\overline{11}, \overline{-31}, \overline{1683}, \overline{777}\right\}$.
3. Tetszőleges $a, m, k \in \mathbb{Z}$, $m \geq 2$, $\operatorname{lnko}(a, m) = 1$ esetén $k > o_m(a) \implies a \not\equiv 1 \pmod{m}$.
4. Tetszőleges p prímszám és $a, b \in \mathbb{N}$ esetén $p = ab \implies p \mid a$ vagy $p \mid b$.
5. ...

II.A rész

- Öt definíció, illetve tétel pontos kimondása (2-2 pont) $\longrightarrow$ d pont ($d \leq 10$), és
- egy tétel részletes bizonyítása $\longrightarrow$ b pont ($b \leq 3$).
- A II. rész összpontszáma $d + d \cdot b$ pont (maximum $10 + 10 \cdot 3 = 40$ pont).
- Mindent kerek, értelmes magyar nyelvű mondatokban kell megfogalmazni. Például:

  $$\forall a \in \mathbb{Z}\ \forall b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\ \exists! q, r \in \mathbb{Z}:\ a = bq + r \text{ és } 0 \leq r < |b|\,.$$

- A bizonyításnál fel lehet használni azokat a segédtételeket, amelyeket előadáson használtunk, de egyértelműen hivatkozni kell rájuk, és megindokolni, hogy miért és hogyan alkalmazhatóak az adott helyzetben.

II.A rész (egy példa)

1. Definiálja a modulo m kongruenciarelációt. (2 pont)
2. Definiálja a redukált maradékrendszer fogalmát. (2 pont)
3. Definiálja az Euler-féle φ függvényt. (2 pont)
4. Mondja ki a $\varphi(n)$ kiszámításáról szóló tételt (n prímtényezős felbontásának segítségével). (2 pont)
5. Mondja ki az Euler–Fermat-tételt. (2 pont)

Biz. Bizonyítsa be az Euler–Fermat-tételt. (3 pont)

II.B rész

- Három definíció, illetve tétel pontos kimondása (2-2 pont) $\longrightarrow$ d pont ($d \leq 6$), és
- egy tétel részletes bizonyítása $\longrightarrow$ b pont ($b \leq 6$).
- A II. rész összpontszáma $d + d \cdot b$ pont (maximum $6 + 6 \cdot 6 = 42$ pont).

Példa:

1. Definiálja a primitív pitagoraszi számhármas fogalmát. (2 pont)
2. Mondja ki a primitív pitagoraszi számhármasokat leíró tételt. (2 pont)
3. Mondja ki a nagy Fermat-tételt. (2 pont)

Biz. Bizonyítsa be a nagy Fermat-tételt az $n = 4$ esetben. (6 pont)