BEVEZETÉS A SZÁMELMÉLETBE
ELŐVIZSGA, 2012.12.05.

Név: ....

EHA: ....

I.	II.A	II.B	Σ

Tudnivalók: A vizsga két részből áll, és a második résznél két feladatsor (II.A és II.B) közül lehet választani. A fenti táblázatban húzza át választásának megfelelően a II.A és II.B oszlopok egyikét. (Például ha a II.A feladatsort oldotta meg, akkor a II.B oszlopot húzza ki.)
Az I. részben el kell dönteni, hogy igazak-e a megadott állítások. A választ nem kell indokolni, csak I (igaz) vagy H (hamis) betűt kell írni az állítás sorszáma előtti pontozott vonalra. Minden jó válaszért 2 pont, minden rossz válaszért -1 pont jár. A maximálisan szerezhető 20 pontból legalább 8-at el kell érni, ellenkező esetben a vizsga a II. résztől függetlenül sikertelen.
A II. részben először néhány definíciót és tételt kell kimondani, majd egy tételt be kell bizonyítani. Minden definíció és tételkimondás 2 pontot ér, a bizonyításra pedig a II.A részben 3 pontot, a II.B részben 6 pontot lehet kapni. Értelmes, kerek mondatokban és pontosan, egyértelműen fogalmazzon, ügyeljen a logikai kapcsolatokat leíró kifejezések („bármely", „létezik", „és", „vagy", „ha ..., akkor ...", stb.) helyes használatára, valamint arra, hogy ne hagyjon ki semmilyen feltevést, kikötést. A bizonyítás logikus lépések sora legyen, ahol minden lépés meg van indokolva a korábbi lépések vagy korábban tanult ismeretek alapján.
Ha d jelöli a definíciókra és tételkimondásokra kapott pontszámot, b pedig a bizonyításra kapott pontszámot, akkor a II. rész összpontszáma $d + d \cdot b$ (maximum 40, illetve 42 pont), és ehhez adódik még hozzá az I. rész pontszáma (maximum 20 pont). Az összesen megszerezhető 60 pontból legalább 24-et kell elérni; ellenkező esetben a vizsga automatikusan sikertelen.
A vizsgán semmilyen segédeszköz nem használható, még függvénytáblázat, számológép, mobiltelefon sem. Bármiféle nem megengedett segédeszköz használata esetén a vizsga érdemjegye elégtelen. A rendelkezésre álló idő 90 perc.

I. RÉSZ

Igazak-e a következő állítások?

..... **1.** Ha egy részbenrendezett halmaznak két minimális eleme van, akkor nincs legkisebb eleme.

..... **2.** Ha egy tetszőleges a egész számra $20 \mid a$ és $30 \mid a$ is teljesül, akkor $50 \mid a$.

..... **3.** Tetszőleges $a, m, k \in \mathbb{Z}, m \geq 2, \operatorname{lnko}(a, m) = 1$ esetén $k > o_m(a) \implies a^k \not\equiv 1 \pmod{m}$.

..... **4.** $|\mathbb{Z}_{121}^*| = |\mathbb{Z}_{110}|$

..... **5.** 8219 tökéletes szám.

..... **6.** Minden n természetes számra $\sum\limits_{d|n} d\mu\left(\frac{n}{d}\right) = \varphi(n)$.

..... **7.** Az $ax + by = c$ kétismeretlenes lineáris diofantoszi egyenlet akkor és csak akkor oldható meg, ha $\operatorname{lkkt}(a, b) \mid c$.

..... **8.** Tetszőleges $a, b, x, y \in \mathbb{Z}$ esetén $ax + by = 1 \implies \operatorname{lnko}(a, b) = 1$.

..... **9.** Végtelen sok $4k + 2$ alakú prímszám létezik.

..... **10.** Tökéletes számon olyan n természetes számot értünk, melyre $\varphi(n) = 2n$.

Piszkozat helye.

II.A RÉSZ

1. Definiálja a prímszám fogalmát.

2. Mit értünk az a egész szám modulo m maradékosztályán?

3. Mondja ki a lineáris kongruencia megoldhatóságának szükséges és elegendő feltételét.

4. Definiálja maradékosztály multiplikatív inverzének fogalmát.

5. Mondja ki Wilson tételét.

6. Bizonyítsa be Wilson tételét.

II.B RÉSZ

1. Definiálja a négyzetes maradék és a négyzetes nemmaradék fogalmát.

2. Mondja ki a $\left(\frac{-1}{p}\right)$ Legendre-szimbólumról szóló tételt.

3. Mondja ki a Fermat-féle két négyzetszám tételt (tetszőleges természetes számra, nem csak prímekre).

4. Bizonyítsa be, hogy minden $4k+1$ alakú prím előáll két négyzetszám összegeként. (Minkowski tételét bizonyítás nélkül fel lehet használni, de ha használja, akkor mondja ki.)

Ide írja a bizonyítást.