BEVEZETÉS A SZÁMELMÉLETBE

feladatsor a kiemelt gyakorlathoz

(2012 őszi félév)

Waldhauser Tamás

1. Oszthatóság, legnagyobb közös osztó, prímfaktorizáció az egész számok körében

1. feladat$^{\circ}$ Bizonyítsa be nevezetes azonosságok segítségével (szorzattá alakítással), hogy $11^{n+2}+12^{2n+1}$ osztható 133-mal minden n természetes számra.

2. feladat$^{\circ}$ Bizonyítsa be teljes indukcióval, hogy $11^{n+2}+12^{2n+1}$ osztható 133-mal minden n természetes számra.

3. feladat Igazolja, hogy $7 \mid 10a+b \Leftrightarrow 7 \mid a-2b$ teljesül minden a, b egész számra. Adjon ennek segítségével eljárást nagy számok 7-tel való oszthatóságának eldöntésére. Például oszható-e 7-tel 334989655?

4. feladat Mutassa meg, hogy 2^n-1 csak akkor lehet prím, ha n is az. (Mersenne-prímek)

5. feladat Mutassa meg, hogy 2^n+1 csak akkor lehet prím, ha n kettőhatvány. (Fermat-prímek)

6. feladat Bizonyítsa be, hogy $n \geq 2$ esetén $\sum_{0\leq k<\frac{n}{2}} \binom{n}{2k+1} 5^k$ osztható 2^{n-1}-nel. (Segíthet, ha megsejtjük, hogy hányszor van meg benne a 2^{n-1}. Ehhez számítsuk ki az összeget $n = 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$-ra, amíg észre nem veszünk valamit.)

7. feladat Mely n pozitív egészekre igaz a következő állítás: $\forall a, b \in \mathbb{N}: \ 11 \mid a^n+b^n \implies 11 \mid a$ és $11 \mid b$?

8. feladat Legyen f egy olyan egész együtthatós polinom, amelyre $f(k)$ osztható 5-tel minden k egész számra. Mutassa meg, hogy f minden együtthatója 5-tel osztható. Mi a helyzet magasabbfokú polinomokkal? És ha 5 helyett más (prím)számot veszünk?

9. feladat$^{\circ}$ Bontsa prímtényezők szorzatára a 630 és 750 számokat, majd ennek segítségével határozza meg a legnagyobb közös osztójukat és a legkisebb közös többszörösüket.

10. feladat Bizonyítsa be, hogy bármely p prímszámra és $k<p$ pozitív egészre $\binom{p}{k}$ osztható p-vel.

11. feladat Legyenek a és b pozitív egész számok, amelyekre $a^3=b^2$ teljesül. Mutassa meg, hogy ekkor létezik olyan k pozitív egész, amelyre $a=k^2$ és $b=k^3$.

12. feladat Jelölje $\nu_p(n)$-nel az n természetes szám prímtényezős felbontásában a p prím kitevőjét. (Tehát $\nu_p(n)=k$ akkor és csak akkor, ha $p^k \mid n$ és $p^{k+1} \nmid n$.) Igazolja, hogy minden n pozitív egészre $\nu_2\big((n+1)\cdot(n+2)\cdot\ldots\cdot(2n)\big)=n$.

13. feladat Bizonyítsa be Legendre képletét: minden n pozitív egészre $\nu_p(n!)=\sum_{k=1}^{\infty}\left\lfloor \frac{n}{p^k}\right\rfloor$. (Ez egy véges összeg!)

14. feladat Mutassa meg, hogy

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{n}{2^k}=n, \quad \sum_{k=1}^{\infty}\left\lfloor \frac{n}{2^k}\right\rceil=n, \quad \sum_{k=1}^{\infty}\left\lfloor \frac{n}{2^k}\right\rfloor=n-s(n),$$

ahol $s(n)$ az n szám kettes számrendszerbeli alakjában előforduló 1-es számjegyek száma, $\lfloor x \rceil$ pedig az x valós számhoz legközelebbi egész. (Mi köze a középső szummának az előző két feladathoz?)

15. feladat Mutassa meg, hogy ha a és b relatív prímek, akkor $a+b$ és ab is azok.

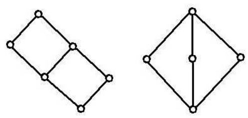
16. feladat Határozza meg az összes olyan n természetes számot, amelyre $1!+2!+3!+\cdots+n!$ négyzetszám.

17. feladat$^{\circ}$ Rajzolja fel az $(A; \mid)$ részbenrendezett halmaz Hasse-diagramját, és határozza meg a minimális, maximális, legkisebb, legnagyobb elemeket, ahol $A=\{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$.

18. feladat$^{\circ}$ Rajzolja fel az $(D_{630}\cap D_{750}; \mid)$ részbenrendezett halmaz Hasse-diagramját. (Itt D_a az a természetes szám pozitív osztóinak halmazát jelöli.)

19. feladat Rajzolja le az összes $2, 3$ illetve 4 pontú Hasse-diagramot.

20. feladat Van-e olyan n természetes szám, amelyre $(D_n; \mid)$ Hasse-diagramja a következő? Hány ilyen n szám van?



a **b**

21. feladat Rajzoljon olyan Hasse-diagramot, amelyben egyetlen minimális elem van, de nincs legkisebb elem.

22. feladat$^{\text{O}}$ Számítsa ki az euklideszi algoritmussal 126 és 438 legnagyobb közös osztóját, majd adjon meg olyan x, y egész számokat, amelyekre $126x + 438y = (126, 438)$.

23. feladat Mennyi $a^n - 1$ és $a^m - 1$ legnagyobb közös osztója?

24. feladat Mely n természetes számok esetén lehet egyszerűsíteni a $\frac{3n+2}{4n+1}$ törtet?

25. feladat Legyen $t(x) = \frac{1}{\{x\}}$, ha $x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}$. Egy α valós számból kiindulva képezzük sorra a $t(\alpha),\ t(t(\alpha)),\ t(t(t(\alpha))),\ \ldots$ számokat. Mutassa meg, hogy a sorozat akkor és csak akkor szakad meg, ha α racionális szám.

26. feladat Határozza meg a $t(x)$ függvény *fixpontjait*, vagyis mindazokat az α valós számokat, amelyekre $t(\alpha) = \alpha$.

27. feladat Egy n oldalszámú szabályos sokszög egyik csúcsában állok. A sokszög oldalainak hossza 1 mérföld, rajtam pedig hétmérföldes csizma van, így egy lépéssel a hetedik csúcsba jutok. Elindulok az egyik irányba, és addig meg se állok amíg vissza nem jutottam oda, ahonnan elindultam. Hány lépést fogok tenni? A csúcsok hányadrészét járom be?

28. feladat$^{\text{O}}$ Kukutyinban 20 és 45 petákos érmék vannak forgalomban. Hogyan lehet ezekre felváltani 245 petákot? (Az összes megoldást határozza meg, ne csak egyet!)

2. Számelméleti kongruenciák

29. feladat$^{\text{O}}$ Bizonyítsa be kongruenciák segítségével (teljes indukció <u>nélkül</u>), hogy $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ osztható 133-mal minden n természetes számra.

30. feladat Határozza meg $7 + 7^2 + 7^3 + \cdots + 7^{4000}$ utolsó két számjegyét.

31. feladat Bizonyítsa be, hogy a tízes számrendszerben felírt $\overline{a_n \cdots a_2 a_1 a_0}$ szám akkor és csak akkor osztható 37-tel, ha az

$$\overline{a_1 a_0} - \overline{a_2 a_2} + \overline{a_4 a_3} - \overline{a_5 a_5} + \cdots$$

szám osztható 37-tel. Döntse el ennek segítségével, hogy oszható-e 37-tel 334989655?

32. feladat Mutassa meg, hogy ha m páratlan prímhatvány, akkor az $x^2 \equiv 1 \pmod{m}$ kongruenciának csak két megoldása van: $x \equiv \pm 1 \pmod{m}$. Igaz marad-e az állítás, ha m nem prímhatvány?

33. feladat Négy egymást követő pozitív egész közül legalább az egyik összetett, hasonlóan öt egymást követő páratlan szám közül legalább az egyik összetett (ugye?). Mutassa meg, hogy tetszőleges pozitív egészekből álló számtani sorozathoz lehet találni olyan K számot, hogy a számtani sorozat bármely K egymást követő tagja között van összetett szám.

34. feladat$^{\text{O}}$ Adja meg az $A = \{2, 3, 8, 9, 14, 15, 19, 26\}$ alaphalmazon értelmezett

$$\rho = \{(a, b) : a \text{ és } b \text{ nem relatív prím}\} \subseteq A \times A$$

ekvivalenciarelációhoz tartozó osztályozást.

35. feladat$^{\text{O}}$ Legyen ρ az $x \rho y \iff x^2 = y^2$ formulával definiált ekvivalenciareláció a $\mathbb{Z}_5$ halmazon. Sorolja fel a ρ reláció összes elemét és adja meg a hozzá tartozó osztályozást.

36. feladat Megadható-e egy 8 elemű alaphalmazon olyan ekvivalenciareláció, amely pontosan 40 elempárból áll? És olyan, ami pontosan 41 elempárból áll?

37. feladat Melyek azok a relációk, amelyek egyszerre szimmetrikusak és antiszimmetrikusak is?

38. feladat$^{\text{O}}$ Oldja meg a $24x \equiv 84 \pmod{45}$ kongruenciát. (A megoldásokat az eredeti modulus szerint kell megadni!) Hány megoldás van modulo 45?

39. feladat$^{\text{O}}$ Határozza meg a $\overline{6}^{-2}$ hatványt $\mathbb{Z}_{13}$-ban.

40. feladat Igazolja, hogy bármely $m, k \in \mathbb{N}$ és $\overline{a} \in \mathbb{Z}_m$ esetén $\left(\overline{a}^k\right)^{-1} = \left(\overline{a}^{-1}\right)^k$.

41. feladat$^{\text{O}}$ Oldja meg a $4x \equiv 7 \pmod{9}, 10x \equiv 4 \pmod{12}$ kongruenciarendszert.

42. feladat Ha egy kosár tojást 2, 3, 4, 5 vagy 6-osával ürítünk ki, rendre 1, 2, 3, 4, 5 tojás marad benne. Ha azonban 7-esével vesszük ki a tojásokat, akkor egy sem marad benne. Legalább hány tojás lehet a kosárban?

43. feladat$^{\text{O}}$ Oldja meg az $x \equiv a \pmod{3},\ x \equiv b \pmod{5},\ x \equiv c \pmod{7}$ paraméteres kongruenciarendszert.

44. feladat Oldja meg a $73x \equiv 1 \pmod{247}$ kongruenciát. (Útmutatás: Vizsgáljuk külön modulo 13 és modulo 19 a kongruenciát, majd ezek megoldásaiból „gyúrjuk össze” az eredeti kongruencia megoldását a kínai maradéktétel segítségével.)

45. feladat Melyek azok a természetes számok, amelyek négyzete tízes számrendszerben 29-re végződik? (Akárcsak az előző feladatnál, itt is használható a kínai maradéktétel.)

46. feladat Hány olyan n egész szám van, melyre $10^{2012} \mid n^2 - n$ és $0 < n < 10^{2012}$?

47. feladat$^{\circ}$ Mennyit ad maradékul 31-gyel osztva $33 \cdot \ldots \cdot 59$?

48. feladat Mutassa meg, hogy ha $n > 4$ összetett szám, akkor $(n-1)! \equiv 0 \pmod{n}$. (Ebből következik, hogy Wilson tételének a megfordítása is igaz.)

49. feladat Bizonyítsa be, hogy $\left(\left(\frac{p-1}{2}\right)!\right)^2 \equiv (-1)^{\frac{p+1}{2}} \pmod{p}$ tetszőleges páratlan p prímszámra.

50. feladat Bizonyítsa be, hogy $\binom{n}{p} \equiv \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor \pmod{p}$ minden p prímszámra és $n > p$ természetes számra.

51. feladat$^{\circ}$ Teljes maradékrendszer-e $1, 11, 21, 31, \ldots, 751, 761$ modulo 77?

52. feladat$^{\circ}$ Redukált maradékrendszer-e $15, 35, 55, \ldots, 315$ modulo 32?

53. feladat$^{\circ}$ Mennyit ad 40-nel osztva maradékul 13^{158}?

54. feladat$^{\circ}$ Mennyit ad 53-mal osztva maradékul $80^{\left(111^{50}\right)}$?

55. feladat Mennyit ad héttel osztva maradékul $111 \ldots 111$ (99 egyes)?

56. feladat Bizonyítsa be, hogy minden n pozitív egész esetén az $n, n^8 - 1, n^8 + 1$ számok közül az egyik osztható 17-tel.

57. feladat Mutassa meg, hogy ha $(a, 100) = 1$, akkor $a^{20} \equiv 1 \pmod{100}$ teljesül. Hasonlítsa össze ezt az állítást az Euler-Fermat–tétellel.

58. feladat Igazolja, hogy $a^{561} \equiv a \pmod{561}$ bármely a egész számra.

59. feladat Bizonyítsa be, hogy ha n nem osztható se 2-vel se 5-tel, akkor van $99 \cdots 99$ alakú többszöröse.

60. feladat Igazolja, hogy bármely p páratlan prímszámra $2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot \ldots \cdot (p-1)^2 \equiv (-1)^{\frac{p+1}{2}} \pmod{p}$.

61. feladat Legyen $p > 3$ prímszám és $n = \frac{2^{2p}-1}{3}$. Bizonyítsa be, hogy $n \mid 2^n - 2$.

3. Számelméleti függvények

62. feladat$^{\circ}$ Melyik az a legkisebb természetes szám, amelynek pontosan 25 osztója van?

63. feladat$^{\circ}$ Mennyi lehet az n természetes szám értéke, ha $\sigma(n) = 307$?

64. feladat Bizonyítsa be, hogy tetszőleges rögzített $k \geq 2$ esetén a $\tau(n) = k$ egyenletnek végtelen sok megoldása van, míg a $\sigma(n) = k$ egyenletnek csak véges sok.

65. feladat$^{\circ}$ Oldja meg a $\mu(x) + 2 = \mu(6x)$ egyenletet a természetes számok halmazán.

66. feladat Oldja meg a $\varphi(n) = n - 2$ egyenletet a természetes számok halmazán.

67. feladat Mi történik, ha egy számra sokszor egymás után alkalmazzuk az Euler-féle φ függvényt?

68. feladat Legyen A az az $n \times n$-es mátrix, amelyben az i-edik sor j-edik eleme $\operatorname{lnko}(i, j)$. Határozza meg A determinánsát.

69. feladat Melyek azok a természetes számok, amelyeknek páratlan sok osztójuk van?

70. feladat Gondoltam egy számot, összeszoroztam az osztóit, és az eredmény 8000 lett. Melyik számra gondoltam?

71. feladat Mutassa meg, hogy bármilyen számot is írunk a 8000 helyébe az előző feladatban, a megoldás mindig egyértelmű lesz (ha létezik egyáltalán).

72. feladat Mutassa meg, hogy az n szám osztóinak szorzata $n^{\frac{\tau(n)}{2}}$.

73. feladat Igazolja, hogy minden n természetes számra $\tau(n) < 2\sqrt{n}$.

74. feladat Melyek azok az n természetes számok, amelyekre $\tau(n) \geq 2\sqrt{n} - 1$?

75. feladat Bizonyítsa be, hogy a $\left\{\tau\left(n^2+1\right)\right\}_{n=n_0}^{\infty}$ sorozat nem szigorúan monoton semmilyen n_0 természetes számra.

76. feladat Igazolja, hogy minden n természetes számra $\tau(n) + \varphi(n) \leq n + 1$. Mikor áll fenn egyenlőség?

77. feladat Mutassa meg, hogy egy természetes szám annyiféleképp állítható elő egymást követő természetes számok összegeként, ahány páratlan osztója van.

78. feladat Bizonyítsa be, hogy $3 \mid \sigma(3n-1)$ minden n természetes számra.

79. feladat Oldja meg a $\sigma(n) = n + 10$ egyenletet a természetes számok halmazán.

80. feladat Nevezzük az n számot furcsának, ha $\sigma(n) \geq 2n$ és n nem áll elő néhány valódi osztójának összegeként. Mutassa meg, hogy végtelen sok furcsa szám van. (Egy ötlet: ha n furcsa, és p elég nagy prímszám, akkor pn is furcsa.)

81. feladat Mutassa meg, hogy a $\mu(1)\,,\ \mu(2)\,,\ \mu(3)\,,\ \ldots$ sorozatban lehet találni tetszőlegesen sok egymást követő nullát.

82. feladat$^{\circ}$ Jelölje az f gyengén multiplikatív számelméleti függvény összegzési függvényét F. Határozza meg $F(45)$ értékét, ha $f(3) = 2, f(5) = 7, f(45) = 21$.

83. feladat$^{\circ}$ Jelölje az előző feladatbeli f függvény megfordítási függvényét $\mathfrak{f}$. Határozza meg $\mathfrak{f}(45)$ értékét.

84. feladat Határozza meg a $\rho(n) = \frac{1}{n}$ számelméleti függvény összegzési függvényét, és írja rá fel a Möbius-féle inverziós formulát.

85. feladat Határozza meg a

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p, & \text{ha } n = p^{\alpha} \ (p \text{ prímszám}) \\ 0, & \text{ha } n \text{ nem prímhatvány} \end{cases}$$

képlettel definiált számelméleti függvény (Mangoldt-féle függvény) összegzési függvényét, és írja rá fel a Möbius-féle inverziós formulát.

86. feladat Bizonyítsa be, hogy minden n természetes számra $\sum_{d|n} \tau(d)\,\frac{n}{d} = \sum_{d|n} \sigma(d)$. (Útmutatás: Igazoljuk, hogy mind a bal-, mind a jobboldal gyengén multiplikatív számelméleti függvényt határoz meg. Ezután elegendő prímhatványokra igazolni az egyenlőséget.)

87. feladat Adjon új (egyszerűbb) megoldást az előző feladatra a konvolúció műveletének asszociativitására támaszkodva.

4. Hatványozás modulo m

88. feladat$^{\circ}$ Számítsa ki 2 rendjét modulo 21.

89. feladat Legyen $m > 2$ olyan természetes szám, ami se kettővel, se öttel nem osztható. Ismeretes, hogy ekkor $\frac{1}{m}$ egy tiszta szakaszos végtelen tizedes tört. Igazolja, hogy a szakasz hossza nem más, mint $o_m(10)$. (Például $m = 7$ esetén $\frac{1}{7} = 0,\dot{1}42\,85\dot{7}$, vagyis a szakasz hossza 6, ami ugyanaz, mint 10 rendje modulo 7.)

90. feladat Legyen $p > 5$ prímszám, és tegyük fel, hogy $\frac{1}{p}$ tizedestört alakja $0,\dot{a}_1 \ldots a_n b_1 \ldots \dot{b}_n$, vagyis a szakasz hossza $2n$. Mutassa meg, hogy ekkor az $\overline{a_1 \ldots a_n} + \overline{b_1 \ldots b_n}$ szám csupa 9-es számjegyből áll. (Például $p = 7$ esetén $\frac{1}{7} = 0,\dot{1}42\,85\dot{7}$, és valóban $142 + 857 = 999$.)

91. feladat$^{\circ}$ Mutassa meg, hogy 2 primitív gyök modulo 19, de nem primitív gyök modulo 17.

92. feladat Legyen p páratlan prímszám és legyenek g_1, g_2 primitív gyökök modulo p. Lehetséges-e, hogy $g_1 g_2$ is primitív gyök modulo p?

93. feladat$^{\circ}$ Oldja meg indextáblázat segítségével a $3x^6 \equiv 1 \pmod{11}$ kongruenciát.

94. feladat$^{\circ}$ Oldja meg indextáblázat segítségével a $3 \cdot 5^x \equiv 20 \pmod{11}$ kongruenciát.

95. feladat$^{\circ}$ Számítsa ki a $\left(\frac{173}{181}\right)$ Legendre-szimbólum értékét a négyzetes reciprocitási tétel felhasználása nélkül.

96. feladat$^{\circ}$ Számítsa ki a $\left(\frac{103}{151}\right)$ Legendre-szimbólum értékét a négyzetes reciprocitási tétel felhasználásával.

97. feladat Adjon képletet a $\left(\frac{3}{p}\right)$ Legendre-szimbólumra.

98. feladat Mely p prímszámokra oldható meg az $x^2 + x + 1 \equiv 0 \pmod{p}$ kongruencia?

99. feladat Bizonyítsa be, hogy ha n páratlan szám, akkor $n^2 + 2$ minden osztója $8k + 1$ vagy $8k + 3$ alakú.

100. feladat Oldja meg a 7. feladatot 11 helyett tetszőleges $4k + 3$ alakú prímszámra.

5. Számok felbontása hatványok összegére

101. feladat$^{\circ}$ Határozza meg az összes primitív pitagoraszi számhármast amelyben szerepel a 12 (akár befogóként akár átfogóként).

102. feladat Határozza meg az összes pitagoraszi számhármast amelyben szerepel a 12 (akár befogóként akár átfogóként).

103. feladat Igazolja, hogy bármely (x, y, z) primitív pitagoraszi számhármasra $12 \mid xy$ és $60 \mid xyz$.

104. feladat Határozza meg az összes olyan pitagoraszi számhármast, amelynek elemei számtani sorozatot alkotnak.

105. feladat Bizonyítsa be, hogy minden n természetes számhoz létezik olyan pitagoraszi számhármas, hogy az általa meghatározott háromszog beírt körének sugara n.

106. feladat$^{\circ}$ Felbontható-e 117000 két négyzetszám összegére? Ha igen, adja is meg egy felbontását.