BEVEZETÉS A SZÁMELMÉLETBE

feladatsor a gyakorlathoz

(2012 őszi félév)

Waldhauser Tamás

1. Oszthatóság, legnagyobb közös osztó, prímfaktorizáció az egész számok körében

1. feladat$^{\circ}$ Bizonyítsa be nevezetes azonosságok segítségével (szorzattá alakítással), hogy $11^{n+2}+12^{2n+1}$ osztható 133-mal minden n természetes számra.

2. feladat$^{\circ}$ Bizonyítsa be teljes indukcióval, hogy $11^{n+2}+12^{2n+1}$ osztható 133-mal minden n természetes számra.

3. feladat Igazolja, hogy $7 \mid 10a+b \Leftrightarrow 7 \mid a-2b$ teljesül minden a,b egész számra. Adjon ennek segítségével eljárást nagy számok 7-tel való oszthatóságának eldöntésére. Például oszható-e 7-tel 334989655?

4. feladat Mutassa meg, hogy 2^n-1 csak akkor lehet prím, ha n is az. (Mersenne-prímek)

5. feladat Mutassa meg, hogy 2^n+1 csak akkor lehet prím, ha n kettőhatvány. (Fermat-prímek)

6. feladat$^{\circ}$ Bontsa prímtényezők szorzatára a 630 és 750 számokat, majd ennek segítségével határozza meg a legnagyobb közös osztójukat és a legkisebb közös többszörösüket.

7. feladat Mely p prímszámokra lesz $29p+1$ négyzetszám?

8. feladat Bizonyítsa be, hogy bármely p prímszámra és $k<p$ pozitív egészre $\binom{p}{k}$ osztható p-vel.

9. feladat Legyenek a és b pozitív egész számok, amelyekre $a^3=b^2$ teljesül. Mutassa meg, hogy ekkor létezik olyan k pozitív egész, amelyre $a=k^2$ és $b=k^3$.

10. feladat Határozza meg mindazokat az a,b természetes számokat, amelyekre $(a,b)=22$ és $[a,b]=264$ teljesül.

11. feladat Határozza meg mindazokat az a,b természetes számokat, amelyekre $[a,b]=720$ és $a+b=98$.

12. feladat Január hatodikán négy hajó futott be Boston kikötőjébe. Az egyik hajó négyhetente tér vissza Bostonba, a másik minden nyolcadik héten, a harmadik és a negyedik pedig 12 illetve 16 hetente. Találkoznak-e még idén ebben a kikötőben?

13. feladat Mutassa meg, hogy ha a és b relatív prímek, akkor $a+b$ és ab is azok.

14. feladat Egy négyjegyű számmal osztva 25707 32-t, 37568 pedig 43-at ad maradékul. Melyik ez a négyjegyű szám?

15. feladat Igazolja, hogy a $11,\ 111,\ 1111,\ \ldots$ sorozatban nincs négyzetszám.

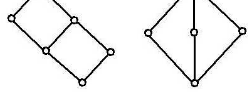
16. feladat Határozza meg az összes olyan n természetes számot, amelyre $1!+2!+3!+\cdots+n!$ négyzetszám.

17. feladat$^{\circ}$ Rajzolja fel az $(A;|)$ részbenrendezett halmaz Hasse-diagramját, és határozza meg a minimális, maximális, legkisebb, legnagyobb elemeket, ahol $A=\{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$.

18. feladat$^{\circ}$ Rajzolja fel az $(D_{630}\cap D_{750};|)$ részbenrendezett halmaz Hasse-diagramját. (Itt D_a az a természetes szám pozitív osztóinak halmazát jelöli.)

19. feladat Rajzolja le az összes $2,3$ illetve 4 pontú Hasse-diagramot.

20. feladat Van-e olyan n természetes szám, amelyre $(D_n;|)$ Hasse-diagramja a következő? Hány ilyen n szám van?



a b

21. feladat Rajzoljon olyan Hasse-diagramot, amelyben egyetlen minimális elem van, de nincs legkisebb elem.

22. feladat$^{\circ}$ Számítsa ki az euklideszi algoritmussal 126 és 438 legnagyobb közös osztóját, majd adjon meg olyan x,y egész számokat, amelyekre $126x+438y=(126,438)$.

23. feladat Mennyi lehet két szomszédos Fibonacci-szám legnagyobb közös osztója?

24. feladat Határozza meg az $a=99999999$ és a $b=999\ldots99$ (száz darab 9-es) számok legnagyobb közös osztóját.

25. feladat Mely n természetes számok esetén lehet egyszerűsíteni a $\frac{3n+2}{4n+1}$ törtet?

26. feladat Egy n oldalszámú szabályos sokszög egyik csúcsában állok. A sokszög oldalainak hossza 1 mérföld, rajtam pedig hétmérföldes csizma van, így egy lépéssel a hetedik csúcsba jutok. Elindulok az egyik irányba, és addig meg se állok amíg vissza nem jutottam oda, ahonnan elindultam. Hány lépést fogok tenni? A csúcsok hányadrészét járom be?

27. feladat$^{\circ}$ Kukutyinban 20 és 45 petákos érmék vannak forgalomban. Hogyan lehet ezekre felváltani 245 petákot? (Az összes megoldást határozza meg, ne csak egyet!)

28. feladat Száz szál virágot vásároltunk három különböző fajtából, összesen 30000 forintért. Az egyes virágfajták ára darabonként rendre $130, 190$ és 320 forint. Mennyit vettünk az egyes fajtákból?

2. Számelméleti kongruenciák

29. feladat$^{\circ}$ Bizonyítsa be kongruenciák segítségével (teljes indukció nélkül), hogy $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ osztható 133-mal minden n természetes számra.

30. feladat Határozza meg $7 + 7^2 + 7^3 + \cdots + 7^{4000}$ utolsó két számjegyét.

31. feladat Bizonyítsa be, hogy a tízes számrendszerben felírt $\overline{a_n \cdots a_2 a_1 a_0}$ szám akkor és csak akkor osztható 37-tel, ha az

$$\overline{a_1 a_0} - \overline{a_2 a_2} + \overline{a_4 a_3} - \overline{a_5 a_5} + \cdots$$

szám osztható 37-tel. Döntse el ennek segítségével, hogy oszható-e 37-tel 334989655?

32. feladat Mutassa meg, hogy ha m páratlan prímhatvány, akkor az $x^2 \equiv 1 \pmod{m}$ kongruenciának csak két megoldása van: $x \equiv \pm 1 \pmod{m}$. Igaz marad-e az állítás, ha m nem prímhatvány?

33. feladat$^{\circ}$ Adja meg az $A = \{2, 3, 8, 9, 14, 15, 19, 26\}$ alaphalmazon értelmezett

$$\rho = \{(a, b) : a \text{ és } b \text{ nem relatív prím}\} \subseteq A \times A$$

ekvivalenciarelációhoz tartozó osztályozást.

34. feladat$^{\circ}$ Legyen ρ az $x \rho y \iff x^2 = y^2$ formulával definiált ekvivalenciareláció a $\mathbb{Z}_5$ halmazon. Sorolja fel a ρ reláció összes elemét és adja meg a hozzá tartozó osztályozást.

35. feladat Hány ekvivalenciareláció adható meg egy kételemű alaphalmazon? És három- illetve négyelemű halmazon?

36. feladat Megadható-e egy 8 elemű alaphalmazon olyan ekvivalenciareláció, amely pontosan 40 elempárból áll? És olyan, ami pontosan 41 elempárból áll?

37. feladat Melyek azok a relációk, amelyek egyszerre szimmetrikusak és antiszimmetrikusak is?

38. feladat$^{\circ}$ Oldja meg a $24x \equiv 84 \pmod{45}$ kongruenciát. (A megoldásokat az eredeti modulus szerint kell megadni!) Hány megoldás van modulo 45?

39. feladat$^{\circ}$ Határozza meg a $\overline{6}^{-2}$ hatványt $\mathbb{Z}_{13}$-ban.

40. feladat Igazolja, hogy bármely $m, k \in \mathbb{N}$ és $\overline{a} \in \mathbb{Z}_m$ esetén $\left(\overline{a}^k\right)^{-1} = \left(\overline{a}^{-1}\right)^k$.

41. feladat Bizonyítsa be, hogy a Fibonacci-sorozat minden negyedik tagja osztható hárommal.

42. feladat Milyen számjegyeket kell írni a és b helyére, hogy $\overline{1456ab}$ osztható legyen 41-gyel?

43. feladat Mennyit ad 73-mal osztva x maradékul, ha $x^{99} \equiv 22 \pmod{73}$ és $x^{100} \equiv 69 \pmod{73}$?

44. feladat$^{\circ}$ Oldja meg a $4x \equiv 7 \pmod{9}, 10x \equiv 4 \pmod{12}$ kongruenciarendszert.

45. feladat Egy tizenhéttagú kalózcsapat egy zsák aranypénzt lopott. Amikor megpróbálták egyenlően elosztani, azt tapasztalták, hogy három aranypénz kimaradt. A kimaradt aranyak fölötti vitában egy kalózt megöltek. Ezután újraosztották egyenlő arányban a zsákmányt, s most tíz arany maradt ki. Az e fölötti vitában egy újabb kalózt öltek meg, s ezután már el tudták osztani a lopott aranyat úgy, hogy mindenki ugyanannyit kapott. Legkevesebb hány aranypénzt zsákmányoltak? (Segítség: ez egy ókori kínai probléma.)

46. feladat Ha egy kosár tojást 2, 3, 4, 5 vagy 6-osával ürítünk ki, rendre 1, 2, 3, 4, 5 tojás marad benne. Ha azonban 7-esével vesszük ki a tojásokat, akkor egy sem marad benne. Legalább hány tojás lehet a kosárban?

47. feladat$^{\circ}$ Oldja meg az $x \equiv a \pmod{3}, \ x \equiv b \pmod{5}, \ x \equiv c \pmod{7}$ paraméteres kongruenciarendszert.

48. feladat Oldja meg a $73x \equiv 1 \pmod{247}$ kongruenciát. (Útmutatás: Vizsgáljuk külön modulo 13 és modulo 19 a kongruenciát, majd ezek megoldásaiból „gyúrjuk össze” az eredeti kongruencia megoldását a kínai maradéktétel segítségével.)

49. feladat Melyek azok a természetes számok, amelyek négyzete tízes számrendszerben 29-re végződik? (Akárcsak az előző feladatnál, itt is használható a kínai maradéktétel.)

50. feladat$^{\circ}$ Mennyit ad maradékul 31-gyel osztva $33 \cdot \ldots \cdot 59$?

51. feladat Mutassa meg, hogy ha $n > 4$ összetett szám, akkor $(n-1)! \equiv 0 \pmod{n}$. (Ebből következik, hogy Wilson tételének a megfordítása is igaz.)

52. feladat Bizonyítsa be, hogy $(2p-1)! - p$ osztható p^2-tel bármely p prímszám esetén.

53. feladat$^{\circ}$ Teljes maradékrendszer-e $1, 11, 21, 31, \ldots, 751, 761$ modulo 77?

54. feladat$^{\circ}$ Redukált maradékrendszer-e $15, 35, 55, \ldots, 315$ modulo 32?

55. feladat Adjon meg olyan egész számokat, amelyek teljes maradékrendszert alkotnak modulo 8, és egyúttal redukált maradékrendszert alkotnak modulo 15.

56. feladat$^{\circ}$ Mennyit ad 40-nel osztva maradékul 13^{158}?

57. feladat$^{\circ}$ Mennyit ad 53-mal osztva maradékul $80^{\left(111^{50}\right)}$?

58. feladat Mennyit ad héttel osztva maradékul $11^{11} + 11^{11^2} + 11^{11^3} + \cdots 11^{11^{11}}$?

59. feladat Mennyit ad héttel osztva maradékul $111\ldots111$ (99 egyes)?

60. feladat Bizonyítsa be, hogy minden n természetes szám esetén az $n, n^8 - 1, n^8 + 1$ számok közül az egyik osztható 17-tel.

61. feladat Mutassa meg, hogy ha $(a, 100) = 1$, akkor $a^{20} \equiv 1 \pmod{100}$ teljesül. Hasonlítsa össze ezt az állítást az Euler-Fermat–tétellel.

62. feladat Igazolja, hogy $a^{561} \equiv a \pmod{561}$ bármely a egész számra.

63. feladat Bizonyítsa be, hogy ha n nem osztható se 2-vel se 5-tel, akkor van olyan többszöröse, ami csak 9-es számjegyekből áll.

64. feladat Legyen p és q két különböző prímszám. Mutassa meg, hogy $p^{q-1} + q^{p-1} \equiv 1 \pmod{pq}$.

3. Számelméleti függvények

65. feladat$^{\circ}$ Melyik az a legkisebb természetes szám, amelynek pontosan 25 osztója van?

66. feladat$^{\circ}$ Mennyi lehet az n természetes szám értéke, ha $\sigma(n) = 307$?

67. feladat Bizonyítsa be, hogy tetszőleges rögzített $k \geq 2$ esetén a $\tau(n) = k$ egyenletnek végtelen sok megoldása van, míg a $\sigma(n) = k$ egyenletnek csak véges sok.

68. feladat$^{\circ}$ Oldja meg a $\mu(x) + 2 = \mu(6x)$ egyenletet a természetes számok halmazán.

69. feladat Mennyi lehet az n természetes szám értéke, ha $\varphi(n) = 1210$?

70. feladat Igazolja, hogy az $n = 1, 2$ esetek kivételével $\varphi(n)$ sosem páratlan.

71. feladat Oldja meg a $\varphi(2n) = n$ egyenletet a természetes számok halmazán.

72. feladat Oldja meg a $\varphi(n) = n - 2$ egyenletet a természetes számok halmazán.

73. feladat Bizonyítsa be, hogy minden n természetes számra teljesül a $\varphi\left(n^2\right) = n\varphi(n)$ egyenlőség.

74. feladat Melyek azok a természetes számok, amelyeknek páratlan sok osztójuk van?

75. feladat Gondoltam egy számot, összeszoroztam az osztóit, és az eredmény 8000 lett. Melyik számra gondoltam?

76. feladat Igazolja, hogy minden n természetes számra $\tau(n) + \varphi(n) \leq n + 1$. Mikor áll fenn egyenlőség?

77. feladat Bizonyítsa be, hogy $3 \mid \sigma(3n-1)$ minden n természetes számra.

78. feladat Oldja meg a $\sigma(n) = n + 3$ egyenletet a természetes számok halmazán.

79. feladat Oldja meg az $n + \tau(n) = \sigma(n)$ egyenletet a természetes számok halmazán.

80. feladat Mennyi lehet n értéke, ha $\varphi(n) = 40$, és $\sigma(n) = n + 1$?

81. feladat Bizonyítsa be, hogy ha n páratlan szám, akkor $\mu\left(n^2 + 3\right) = 0$.

82. feladat$^{\circ}$ Jelölje az f gyengén multiplikatív számelméleti függvény összegzési függvényét F. Határozza meg $F(45)$ értékét, ha $f(3) = 2, f(5) = 7, f(45) = 21$.

83. feladat$^{\circ}$ Jelölje az előző feladatbeli f függvény megfordítási függvényét f. Határozza meg $\mathrm{f}(45)$ értékét.

84. feladat Határozza meg a $\rho(n) = \frac{1}{n}$ számelméleti függvény összegzési függvényét, és írja rá fel a Möbius-féle inverziós formulát.

85. feladat Határozza meg a

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p, & \text{ha } n = p^{\alpha} \ (p \text{ prímszám}) \\ 0, & \text{ha } n \text{ nem prímhatvány} \end{cases}$$

képlettel definiált számelméleti függvény (Mangoldt-féle függvény) összegzési függvényét, és írja rá fel a Möbius-féle inverziós formulát.

86. feladat Bizonyítsa be, hogy minden n természetes számra $\sum_{d|n} \tau(d) \frac{n}{d} = \sum_{d|n} \sigma(d)$. (Útmutatás: Igazoljuk, hogy mind a bal-, mind a jobboldal gyengén multiplikatív számelméleti függvényt határoz meg. Ezután elegendő prímhatványokra igazolni az egyenlőséget.)

87. feladat Adjon új (egyszerűbb) megoldást az előző feladatra a konvolúció műveletének asszociativitására támaszkodva.

4. Hatványozás modulo m

88. feladat$^{\circ}$ Számítsa ki 2 rendjét modulo 21.

89. feladat Legyen $m > 2$ olyan természetes szám, ami se kettővel, se öttel nem osztható. Ismeretes, hogy ekkor $\frac{1}{m}$ egy tiszta szakaszos végtelen tizedes tört. Igazolja, hogy a szakasz hossza nem más, mint $o_m(10)$. (Például $m = 7$ esetén $\frac{1}{7} = 0,\dot{1}42\,85\dot{7}$, vagyis a szakasz hossza 6, ami ugyanaz, mint 10 rendje modulo 7.)

90. feladat$^{\circ}$ Mutassa meg, hogy 2 primitív gyök modulo 19, de nem primitív gyök modulo 17.

91. feladat Bizonyítsa be, hogy ha g primitív gyök modulo p, akkor g^{-1} is primitív gyök modulo p.

92. feladat Igazolja, hogy ha p páratlan prímszám és g primitív gyök modulo p, akkor $g^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod{p}$.

93. feladat Legyen p páratlan prímszám és legyenek g_1, g_2 primitív gyökök modulo p. Lehetséges-e, hogy $g_1 g_2$ is primitív gyök modulo p?

94. feladat$^{\circ}$ Oldja meg indextáblázat segítségével a $3x^6 \equiv 1 \pmod{11}$ kongruenciát.

95. feladat$^{\circ}$ Oldja meg indextáblázat segítségével a $3 \cdot 5^x \equiv 20 \pmod{11}$ kongruenciát.

96. feladat$^{\circ}$ Számítsa ki a $\left(\frac{173}{181}\right)$ Legendre-szimbólum értékét a négyzetes reciprocitási tétel felhasználása nélkül.

97. feladat$^{\circ}$ Számítsa ki a $\left(\frac{103}{151}\right)$ Legendre-szimbólum értékét a négyzetes reciprocitási tétel felhasználásával.

98. feladat Adjon képletet a $\left(\frac{3}{p}\right)$ Legendre-szimbólumra.

99. feladat Mely p prímszámokra oldható meg az $x^2 + x + 1 \equiv 0 \pmod{p}$ kongruencia?

5. Számok felbontása hatványok összegére

100. feladat$^{\circ}$ Határozza meg az összes primitív pitagoraszi számhármast amelyben szerepel a 12 (akár befogóként akár átfogóként).

101. feladat Határozza meg az összes pitagoraszi számhármast amelyben szerepel a 12 (akár befogóként akár átfogóként).

102. feladat Igazolja, hogy bármely (x, y, z) primitív pitagoraszi számhármasra $12 \mid xy$ és $60 \mid xyz$.

103. feladat Határozza meg az összes olyan pitagoraszi számhármast, amelynek elemei számtani sorozatot alkotnak.

104. feladat Bizonyítsa be, hogy minden n természetes számhoz létezik olyan pitagoraszi számhármas, hogy az általa meghatározott háromszog beírt körének sugara n.

105. feladat$^{\circ}$ Felbontható-e 117000 két négyzetszám összegére? Ha igen, adja is meg egy felbontását.