Izomorfia

Waldhauser Tamás
2021 őszi félév

Izomiaúrfizmus

$\leftrightarrow$	igaz	hamis
igaz	igaz	hamis
hamis	hamis	igaz

$\cdot$	$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

izomorf csoportok

$+$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{0}$

$\otimes$		
		
		

Az $\mathbb{A} = \big(\{$  ,  $\}; \otimes\big)$ és a $\mathbb{B} = \big(\{\overline{0}, \overline{1}\}\,; +\big)$ csoportok szerkezete ugyanaz: ha $\mathbb{A}$ művelettáblázatában
minden -t átnevezünk $\overline{0}$-ra , és minden -t átnevezünk $\overline{1}$-re,
akkor éppen $\mathbb{B}$ művelettáblázatát kapjuk:

$\otimes$		
		
		

$\xrightarrow{\text{átnevezés}}$

$+$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{0}$

Ezt az „átnevezést” a

$\varphi\colon \{$  ,  $\} \to \{\overline{0}, \overline{1}\}$,  $\mapsto \overline{0}$,  $\mapsto \overline{1}$

leképezéssel írhatjuk le. Az átnevezés „jogossága” pedig a következőképpen fogalmazható meg:

$\forall a_1, a_2 \in \{$  ,  $\}: \quad (a_1 \otimes a_2)\,\varphi \;=\; (a_1\varphi) + (a_2\varphi)\,.$

Definíció

Legyen $\mathbb{A} = (A; *)$ és $\mathbb{B} = (B; \oplus)$ két grupoid. Azt mondjuk, hogy a $\varphi\colon A \to B$ leképezés **izomorfizmus** $\mathbb{A}$-ból $\mathbb{B}$-be, ha

- φ bijektív leképezés, és
- φ felcserélhető a műveletekkel, azaz

$$\forall a_1, a_2 \in A: \quad (a_1 * a_2)\,\varphi \; = \; a_1\varphi \oplus a_2\varphi.$$

Ha létezik $\varphi\colon \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ izomorfizmus, akkor azt mondjuk, hogy $\mathbb{A}$ és $\mathbb{B}$ **izomorf** (jelölés: $\mathbb{A} \cong \mathbb{B}$).

Állítás

Izomorfizmusok szorzata izomorfizmus, izomorfizmus inverze izomorfizmus. Következésképp az izomorfia ekvivalenciareláció (grupoidok bármely halmazán).

Példa
Adjunk meg izomorfizmust az $\mathbb{A}$ és $\mathbb{B}$ grupoidok között.

$$\mathbb{A} = (\{\texttt{igaz}, \texttt{hamis}\}; \leftrightarrow), \quad \mathbb{B} = (\mathbb{Z}_2; +)$$

Megoldás

$$\texttt{igaz} \mapsto \overline{0},\ \texttt{hamis} \mapsto \overline{1}$$

Példa
Adjunk meg izomorfizmust az $\mathbb{A}$ és $\mathbb{B}$ grupoidok között.

$$\mathbb{A} = (\{\texttt{igaz}, \texttt{hamis}\}; \wedge), \quad \mathbb{B} = (\mathbb{Z}_2; \cdot)$$

Megoldás

$$\texttt{igaz} \mapsto \overline{1},\ \texttt{hamis} \mapsto \overline{0}$$

Példa

Adjunk meg izomorfizmust az $\mathbb{A}$ és $\mathbb{B}$ grupoidok között.

$$\mathbb{A} = (\{1, -1, i, -i\}; \cdot), \quad \mathbb{B} = (\mathbb{Z}_4; +)$$

Megoldás

$$\begin{array}{rrrr} 1 \mapsto \overline{0}, & -1 \mapsto \overline{2}, & i \mapsto \overline{1}, & -i \mapsto \overline{3} \\ i \mapsto \overline{1}, & -1 \mapsto \overline{2}, & -i \mapsto \overline{3}, & 1 \mapsto \overline{0} \end{array}$$

Tömörebben: $\varphi\colon \{1, -1, i, -1\} \to \mathbb{Z}_4,\ i^k \mapsto \overline{k}$.

Ez a leképezés azért bijektív, mert $\forall k, \ell \in \mathbb{Z}\colon\ i^k = i^\ell \iff k \equiv \ell \pmod 4$.

A mûveletekkel való felcserélhetõség pedig a hatványozás egyik azonosságán múlik:

$$(i^k \cdot i^\ell)\varphi \ = \ i^{k+\ell}\varphi \ = \ \overline{k+\ell} \ = \ \overline{k} + \overline{\ell} \ = \ i^k\varphi + i^\ell\varphi.$$

Példa

Adjunk meg izomorfizmust az $\mathbb{A}$ és $\mathbb{B}$ grupoidok között.

$$\mathbb{A} = (\{-1, 1\}; \cdot), \quad \mathbb{B} = (\mathbb{Z}_2; +)$$

Példa

Adjunk meg izomorfizmust az $\mathbb{A}$ és $\mathbb{B}$ grupoidok között.

$$\mathbb{A} = (\{a, b, c, d\}; *), \quad \mathbb{B} = (\mathbb{Z}_4; \cdot)$$

$*$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	c	d
c	c	c	c	c
d	d	d	c	c

Példa

Izomorf-e az $\mathbb{A}$ grupoid $\mathbb{B}$ és $\mathbb{C}$ közül valamelyikkel? Ha igen, akkor adjunk meg egy izomorfizmust; ha nem, akkor indokoljuk meg, hogy miért nem.

$$\mathbb{A} = (\{\texttt{igaz}, \texttt{hamis}\}; \rightarrow), \quad \mathbb{B} = (\{0, 1\}; \circ), \quad \mathbb{C} = (\{0, 1\}; *)$$

$\circ$	0	1
0	1	1
1	0	1

$*$	0	1
0	0	0
1	0	1

Megoldás

$\mathbb{A} \cong \mathbb{B}$ a következõ izomorfizmus mellett: $\texttt{igaz} \mapsto 1$, $\texttt{hamis} \mapsto 0$.

$\mathbb{A} \ncong \mathbb{C}$, mert $\mathbb{C}$ kommutatív, de $\mathbb{A}$ nem.

Példa

Izomorf-e az $\mathbb{A}$ grupoid $\mathbb{B}$ és $\mathbb{C}$ közül valamelyikkel? Ha igen, akkor adjunk meg egy izomorfizmust; ha nem, akkor indokoljuk meg, hogy miért nem.

$$\mathbb{A} = (\{1, 2, 3\}; \min), \quad \mathbb{B} = (\{0, 1, 2\}; \oplus), \quad \mathbb{C} = (\{0, 1, 2\}; *)$$

$\oplus$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	1	1
2	2	1	2

$*$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	0

Megoldás

$\mathbb{A} \cong \mathbb{B}$ a következõ izomorfizmus mellett: $1 \mapsto 1,\ 2 \mapsto 2,\ 3 \mapsto 0$.

$\mathbb{A} \ncong \mathbb{C}$, mert $\mathbb{A}$-ban minden elem „négyzete” saját maga: $\min(a, a) = a$ minden a-ra, de $\mathbb{C}$-ben ez nem igaz, pl. $2 * 2 = 0$.

Példa

Izomorf-e az $\mathbb{A}$ grupoid $\mathbb{B}$ és $\mathbb{C}$ közül valamelyikkel? Ha igen, akkor adjunk meg egy izomorfizmust; ha nem, akkor indokoljuk meg, hogy miért nem.

$$\mathbb{A} = (\mathcal{P}(\{1,2\})\,; \cup), \quad \mathbb{B} = (\{0,1,2,3\}; \oplus), \quad \mathbb{C} = (\{0,1,2,3\}; *)$$

$\oplus$	0	1	2	3
0	0	1	3	1
1	1	1	1	1
2	3	1	2	0
3	1	1	0	3

$*$	0	1	2	3
0	0	1	0	1
1	1	1	1	1
2	0	1	2	3
3	1	1	3	3

Megoldás

$\mathbb{A} \ncong \mathbb{B}$, mert $\mathbb{A}$-ban van egységelem ($\emptyset$), de $\mathbb{B}$-ben nincs.

$\mathbb{A} \cong \mathbb{C}$, a következõ izomorfizmus mellett:
$\emptyset \mapsto 2,\ \{1\} \mapsto 0,\ \{2\} \mapsto 3,\ \{1,2\} \mapsto 1.$

Példák

Izomorfizmusok-e az alábbi leképezések?

1. $\varphi\colon (\mathbb{R};+) \mapsto (\mathbb{R};+), x \mapsto 2x$ igen
2. $\varphi\colon (\mathbb{R};\cdot) \mapsto (\mathbb{R};\cdot), x \mapsto 2x$ nem (nem műveletttartó)
3. $\varphi\colon (\mathbb{Z};+) \mapsto (\mathbb{Z};+), x \mapsto 2x$ nem (nem szürjektív)
4. $\varphi\colon (\mathbb{Z};+) \mapsto (\mathbb{Z};+), x \mapsto -x$ igen
5. $\varphi\colon (\mathbb{C};+,\cdot) \mapsto (\mathbb{C};+,\cdot), x \mapsto \overline{x}$ igen
6. $\varphi\colon (\mathbb{R}^+;\cdot) \mapsto (\mathbb{R};+), x \mapsto \log x$ igen virtuális logarléc