Csoportok

Waldhauser Tamás
2020 őszi félév

Állítás

Bármely grupoidban legföljebb egy egységelem létezhet.

Bizonyítás.

Ha e_1 és e_2 is egységelem az $(A; *)$ grupoidban, akkor

- $e_1 * e_2 = e_1$ (mert e_2 egységelem), és
- $e_1 * e_2 = e_2$ (mert e_1 egységelem).
- Tehát $e_1 = e_2$. □

Állítás

Bármely monoidban egy elemnek legföljebb egy inverze lehet.

Bizonyítás.

Ha az a elemnek inverze b és c is, akkor

- $(b * a) * c = e * c = c$, és
- $b * (a * c) = b * e = b$.
- Tehát $b = (b * a) * c = b * (a * c) = c$. □

Definíció

Legyen $*$ egy kétváltozós művelet a nemüres A halmazon.

- Azt mondjuk, hogy $*$ **invertálható** művelet, ha bármely $a, b \in A$ elemek esetén az $a * x = b$, illetve $y * a = b$ egyenleteknek legalább egy megoldása van.
- Azt mondjuk, hogy $*$ **kancellatív** művelet, ha bármely $a, b \in A$ elemek esetén az $a * x = b$, illetve $y * a = b$ egyenleteknek legfeljebb egy megoldása van.

Megjegyzés

A kancellativitás így is megfogalmazható: $\forall a, x_1, x_2, y_1, y_2 \in A$:

$$a * x_1 = a * x_2 \implies x_1 = x_2;$$

$$y_1 * a = y_2 * a \implies y_1 = y_2.$$

Megjegyzés

Az invertálhatóság azt jelenti, hogy a művelettáblázat minden sorában és minden oszlopában az A halmaz minden eleme legalább egyszer fellép.
A kancellativitás pedig azt jelenti, hogy minden sorban és minden oszlopban minden elem legfeljebb egyszer lép fel.

Definíció

Legyen $*$ egy kétváltozós művelet a nemüres A halmazon. Tetszőleges $a \in A$ esetén definiáljuk az a-val való **balról szorzást** és az a-val való **jobbról szorzást**:

$$\lambda_a \colon A \to A,\ x \mapsto a * x, \qquad \rho_a \colon A \to A,\ x \mapsto x * a.$$

Állítás

Legyen $*$ egy kétváltozós művelet a nemüres A halmazon.

- $*$ invertálható $\iff \forall a \in A :\ \lambda_a$ és ρ_a szürjektív.
- $*$ kancellatív $\iff \forall a \in A :\ \lambda_a$ és ρ_a injektív.

Bizonyítás.

HF □

Állítás

Véges alaphalmaz esetén az invertálhatóság és a kancellativitás egymással ekvivalens.

Bizonyítás.

HF (skatulya-elv) □

Tétel

Csoport művelete mindig invertálható és kancellatív.

Bizonyítás.

Tfh. $(A; *)$ csoport, és legyen $a, b \in A$. Ekkor

$$a * x = b \quad \Longrightarrow \quad x = a^{-1} * b \qquad \text{(balról beszorzunk } a^{-1}\text{-zel);}$$

$$x = a^{-1} * b \quad \Longrightarrow \quad a * x = b \qquad \text{(balról beszorzunk } a\text{-val).}$$

Hasonlóan: az $y * a = b$ egyenlet egyetlen megoldása $y = b * a^{-1}$. □

Tétel

Ha az A halmazon értelmezett $*$ kétváltozós művelet asszociatív és invertálható, akkor $(A; *)$ csoport.

Megjegyzés

A fenti tételben véges alaphalmaz esetén kicserélhetjük az invertálhatóságot a kancellativitással, de végtelen alaphalmaz esetén nem. Keressünk olyan végtelen kancellatív félcsoportot, ami nem csoport!

Az általános asszociativitás tétele

Ha $(S;\cdot)$ félcsoport, akkor minden $n \in \mathbb{N}$ és $a_1, \ldots, a_n \in S$ esetén az $a_1 \cdot \ldots \cdot a_n$ „szorzat" eredménye független a zárójelezéstől.

Bizonyítás. Tekintsük az $a_1, \ldots, a_n$ $(\in S; n \geqq 1)$ elemeket. Legyen

$$A = (\ldots((a_1 \cdot a_2) \cdot a_3) \cdot \ldots) \cdot a_n.$$

Jelöljük az $a_1, \ldots, a_n$ elemeknek (az adott sorrendben) egy tetszőleges zárójelezés melletti műveleti eredményét B-vel. Bizonyítandó, hogy $A = B$. A bizonyítást n szerinti teljes indukcióval végezzük. Az $n = 1, 2$ esetben az állítás semmitmondó. Az $n = 3$ esetben az állítás az asszociativitás miatt igaz. Legyen ezután $n \geqq 4$, és tegyük fel az állítás helyességét $k (< n)$ elemre. B minden esetben felírható $C \cdot D$ alakban, ahol C az $a_1, \ldots, a_r$ $(1 \leqq r < n)$ elemek, D pedig az $a_{r+1}, \ldots, a_n$ elemek valamilyen zárójelezés melletti műveleti eredménye. Mivel D-ben az elemek száma n-nél kevesebb, azért az indukciófeltevés miatt

$$D = E \cdot a_n$$

alakú, ahol E az $a_{r+1}, \ldots, a_{n-1}$ elemek műveleti eredménye valamilyen zárójelezés mellett. Ennélfogva az asszociativitás és az indukciófeltevés miatt igaz a következő:

$$B = C \cdot D = C \cdot (E \cdot a_n) = (C \cdot E) \cdot a_n = (\ldots(a_1 \cdot a_2) \cdot \ldots) \cdot a_n = A.$$

Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

Dr. Szendrei János: Algebra és számelmélet (Tankönyvkiadó, 1989.)

Az általános kommutativitás tétele

Ha $(S;\cdot)$ kommutatív félcsoport, akkor minden $n \in \mathbb{N}$ és $a_1, \ldots, a_n \in S$ esetén az $a_1 \cdot \ldots \cdot a_n$ „szorzat" eredménye független a zárójelezéstől és az elemek sorrendjétől.

Hatványozás félcsoportban

Legyen $(A; *)$ egy félcsoport és $a \in A$, $n \in \mathbb{N}$. Az a elem n-edik hatványán az

$$\underbrace{a * \cdots * a}_{n}$$

elemet értjük. Attól függően, hogy a műveletet szorzással (multiplikatív írásmód) vagy összeadással (additív írásmód) jelöljük, a hatványozást és a hatványozás nevezetes azonosságait (amelyek pozitív egész kitevő esetén minden félcsoportban érvényesek) a következőképpen írjuk:

	multiplikatív írásmód	additív írásmód
művelet	$a \cdot b$	$a + b$
hatvány	a^n	na
$\forall a \in A\ \forall n \in \mathbb{N}$:	$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$	$na + ma = (n+m)a$
$\forall a \in A\ \forall n, m \in \mathbb{N}$:	$(a^n)^m = a^{nm}$	$m(na) = (mn)a$
$\forall a, b \in A\ \forall n \in \mathbb{N}$		
ha a és b felcserélhetőek:	$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$	$n(a+b) = na + nb$

Hatványozás monoidban

Ha $(A;\cdot)$ egységelemes félcsoport, akkor tetszőleges $a \in A$ esetén a^0 legyen az egységelem, amit multiplikatív írásmód esetén szokás 1-gyel jelölni, tehát $a^0 = 1$.

Additív írásmódnál is az egységelemként értelmezzük a nulladik hatványt: $0a = 0$.

Így a korábbi azonosságok nemnegatív egész kitevőkre is érvényben maradnak.

Hatványozás csoportban

Ha $(A;\cdot)$ csoport, akkor tetszőleges $a \in A$ esetén a^{-n} legyen a inverzének n-edik hatványa: $a^{-n} = (a^{-1})^n$.

Additív írásmóddal így fest a negatív kitevős hatványozás: $(-n)a = n(-a)$.

A korábbi azonosságok egész kitevőkre is érvényben maradnak.

Állítás

Ha $(A;\cdot)$ csoport, akkor tetszőleges $a, b \in A$ esetén $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$.

Bizonyítás.

Ellenőrizzük, hogy ab-nek valóban $b^{-1}a^{-1}$ az inverze:

$$(ab)\cdot(b^{-1}a^{-1}) = a\cdot(bb^{-1})\cdot a^{-1} = a\cdot 1\cdot a^{-1} = aa^{-1} = 1,$$
$$(b^{-1}a^{-1})\cdot(ab) = b^{-1}\cdot(a^{-1}a)\cdot b = b^{-1}\cdot 1\cdot b = b^{-1}b = 1.$$

Példák

Tetszőleges R gyűrű esetén $(R;+)$ Abel-csoport:

- $(\mathbb{C};+)$, $(\mathbb{R};+)$, $(\mathbb{Q};+)$, $(\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2});+)$, $(\mathbb{Z};+)$, $(\{\text{páros számok}\};+)$, $\ldots$;
- $(T[x];+)$ tetszőleges T testre (vagy akár csak gyűrűre);
- $(T^{n\times n};+)$ tetszőleges T testre (vagy akár csak gyűrűre);
- $(\mathbb{Z}_n;+)$ tetszőleges $n \geq 2$ esetén.

Tetszőleges R egységelemes gyűrű esetén $(R^*;\cdot)$ csoport, ahol R^* a multiplikatív inverzzel rendelkező R-beli elemek halmaza (egységcsoport):

- $(\mathbb{C}\setminus\{0\};\cdot)$, $(\mathbb{R}\setminus\{0\};\cdot)$, $(\mathbb{Q}\setminus\{0\};\cdot)$, $(\{1,-1\};\cdot)$, $\ldots$;
- $T[x]$ egységcsoportja $(T\setminus\{0\};\cdot)$ tetszőleges T testre;
- $T^{n\times n}$ egységcsoportja $(\mathrm{GL}_n(T);\cdot)$ tetszőleges T testre:

$$\mathrm{GL}_n(T) = \{A \in T^{n\times n} : \det(A) \neq 0\};$$

- $(\mathbb{Z}_n^*;\cdot)$ tetszőleges $n \geq 2$ esetén.

Példa

A komplex n-edik egységgyökök csoportot alkotnak:

$$E_n = (\{z \in \mathbb{C} : z^n = 1\}; \cdot).$$

Állítás

Az E_n csoport izomorf a $\mathbb{Z}_n$ csoporttal: $(E_n; \cdot) \cong (\mathbb{Z}_n; +)$.

Bizonyítás.

Informálisan: Minden n-edik egységgyök előáll $\operatorname{cis} \frac{2k\pi}{n}$ alakban, ahol a k paraméter csak modulo n „számít". Amikor két ilyen számot összeszorzunk, akkor a megfelelő k paramétereket össze kell adni.

Formálisan: A $\varphi\colon \mathbb{Z}_n \to E_n$, $\overline{k} \mapsto \operatorname{cis} \frac{2k\pi}{n}$ leképezés izomorfizmus, mert ...

- φ jóldefiniált: $\overline{k} = \overline{\ell} \implies \operatorname{cis} \frac{2k\pi}{n} = \operatorname{cis} \frac{2\ell\pi}{n}$;
- φ injektív: $\operatorname{cis} \frac{2k\pi}{n} = \operatorname{cis} \frac{2\ell\pi}{n} \implies \overline{k} = \overline{\ell}$;
- φ szürjektív: $\forall z \in E_n\ \exists k \in \mathbb{Z}\colon z = \operatorname{cis} \frac{2k\pi}{n}$;
- φ felcserélhető a műveketekkel:

$$\left(\overline{k} + \overline{\ell}\right)\varphi = \overline{k+\ell}\varphi = \operatorname{cis} \frac{2\left(k+\ell\right)\pi}{n} = \operatorname{cis} \frac{2k\pi}{n} \cdot \operatorname{cis} \frac{2\ell\pi}{n} = \overline{k}\varphi \cdot \overline{\ell}\varphi. \qquad \square$$

Példa

A $\{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ halmaz csoportot alkot az alábbi szorzással. Ezt a csoportot **kvaterniócsoportnak** nevezzük, és Q-val jelöljük.

$\cdot$	1	-1	i	$-i$	j	$-j$	k	$-k$
1	1	-1	i	$-i$	j	$-j$	k	$-k$
-1	-1	1	$-i$	i	$-j$	j	$-k$	k
i	i	$-i$	-1	1	k	$-k$	$-j$	j
$-i$	$-i$	i	1	-1	$-k$	k	j	$-j$
j	j	$-j$	$-k$	k	-1	1	i	$-i$
$-j$	$-j$	j	k	$-k$	1	-1	$-i$	i
k	k	$-k$	j	$-j$	$-i$	i	-1	1
$-k$	$-k$	k	$-j$	j	i	$-i$	1	-1

A táblázatból elég az $ij = k = -ji$, $jk = i = -kj$, $ki = j = -ik$ és $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ szorzatokat megjegyezni, a többi már magától értetődő.

Az $a + bi + cj + dk$ $(a, b, c, d \in \mathbb{R})$ alakú kifejezéseken természetes módon lehet definiálni az összeadás és szorzás műveletét, így kapjuk a kvaterniók ferdetestét („majdnem" test, csak éppen a szorzás nem kommutatív).

Példák

Tetszőleges A halmaz esetén A permutációi (vagyis az $A \to A$ bijekciók) csoportot alkotnak a leképezésszorzás műveletével. Az $A = \{1, 2, \ldots, n\}$ esetben ezt a csoportot ***n*-edfokú szimmetrikus csoportnak** nevezzük és S_n-nel jelöljük.

Az S_n csoport részcsoportjait **permutációcsoportoknak** nevezzük.

Az S_n-beli páros permutációk csoportot alkotnak; ez az A_n **alternáló csoport**.

$$S_3 = \{\mathrm{id}, (12), (13), (23), (123), (132)\}, \qquad A_3 = \{\mathrm{id}, (123), (132)\}.$$

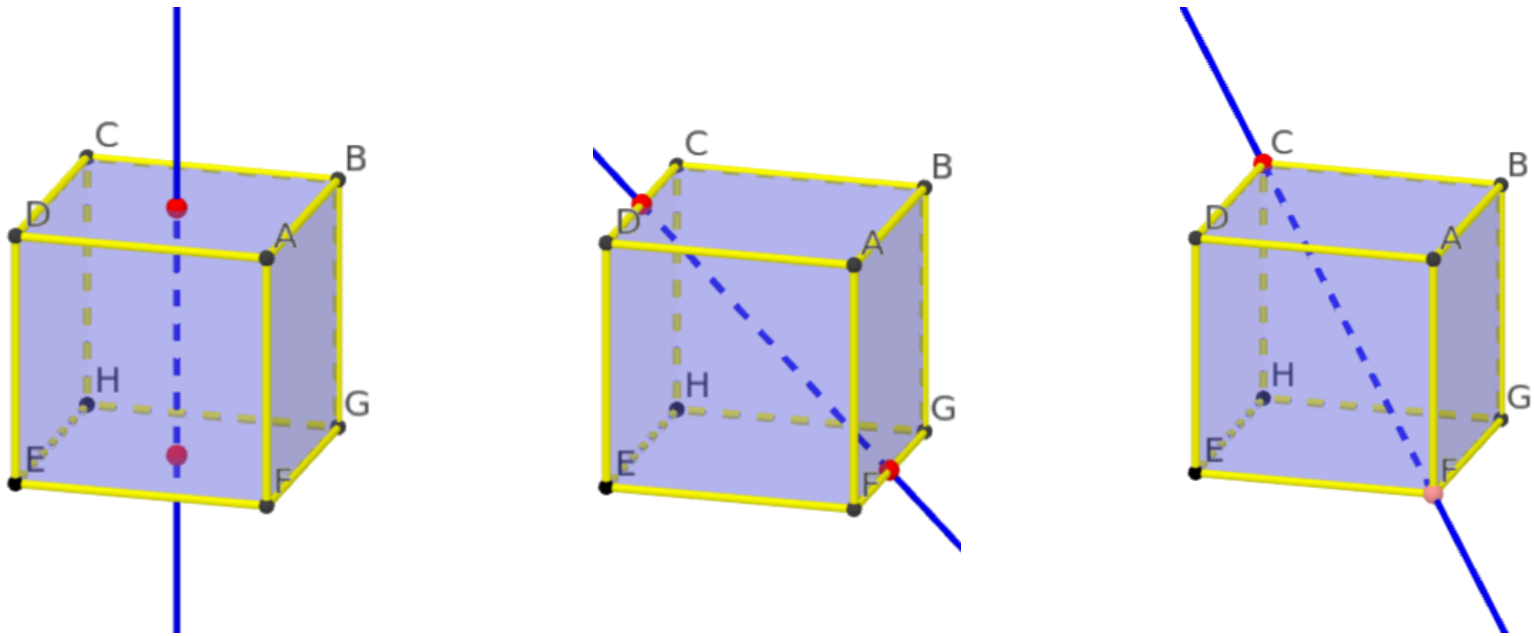
$$A_4 = \{\mathrm{id}, (123), (132), (124), (142), (134), (143), (234), (243), (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}.$$

Az A_4 csoport alábbi részcsoportját **Klein-csoportnak** nevezzük:

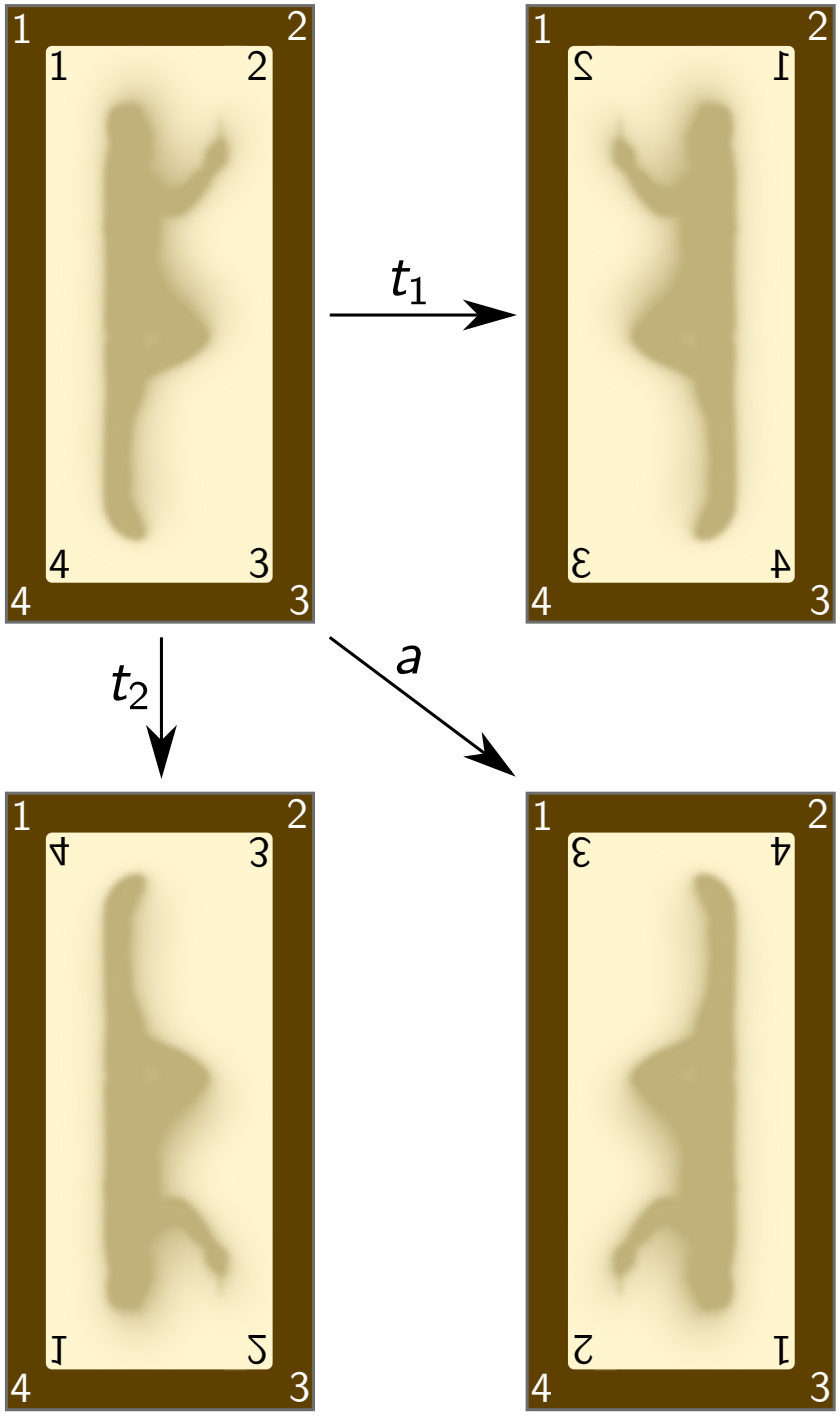
$$V = \{\mathrm{id}, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}.$$

Példák

A sík (tér) egybevágósági transzformációi csoportot alkotnak a leképezésszorzás műveletével. Egy adott ponthalmazt önmagába képező egybevágóságok részcsoportot alkotnak ebben a csoportban; ezt nevezzük a ponthalmaz **szimmetriacsoportjának**. Ha csak az irányítástartó egybevágóságokat engedjük meg, akkor a ponthalmaz **mozgáscsoportját** kapjuk.

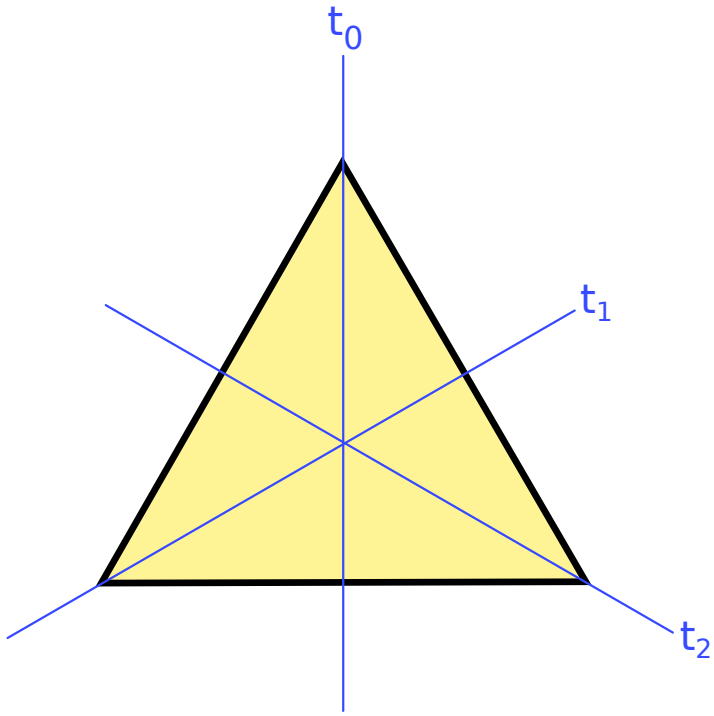


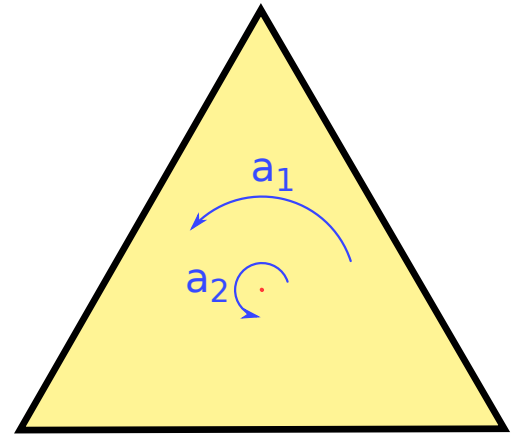
A kocka mozgáscsoportja (forgáscsoportja) izomorf S_4-gyel.



$\cdot$	id	a	t_1	t_2
id	id	a	t_1	t_2
a	a	id	t_2	t_1
t_1	t_1	t_2	id	a
t_2	t_2	t_1	a	id

$\cong V$





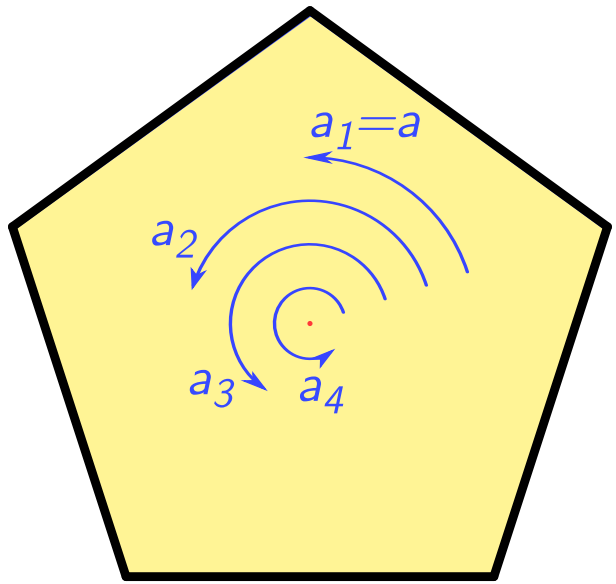
$\cdot$	a_0	a_1	a_2	t_0	t_1	t_2
a_0	a_0	a_1	a_2	t_0	t_1	t_2
a_1	a_1	a_2	a_0	t_1	t_2	t_0
a_2	a_2	a_0	a_1	t_2	t_0	t_1
t_0	t_0	t_2	t_1	a_0	a_2	a_1
t_1	t_1	t_0	t_2	a_1	a_0	a_2
t_2	t_2	t_1	t_0	a_2	a_1	a_0

$\cong S_3$

Definíció

A szabályos n-szög szimmetriacsoportját **n-edfokú diédercsoportnak** nevezzük és D_n-nel jelöljük.

Jelölje a_k a középpont körüli $\frac{2k\pi}{n}$ szögű forgatást $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$.

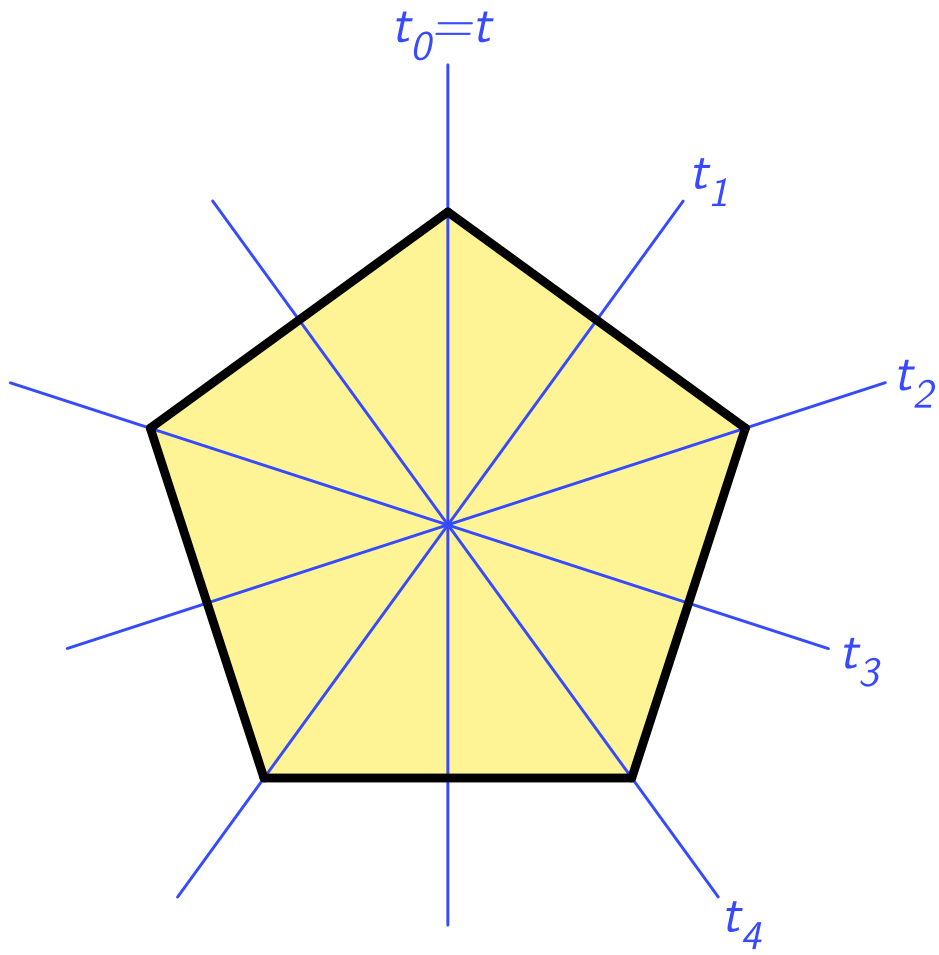


Vegyük észre, hogy $a_k = a_1^k$. A továbbiakban a_1 helyett egyszerűen csak a-t írunk. Így az n-szög mozgáscsoportja: $\{\mathrm{id}, a, a^2, \ldots, a^{n-1}\} \cong \mathbb{Z}_n$.

Definíció

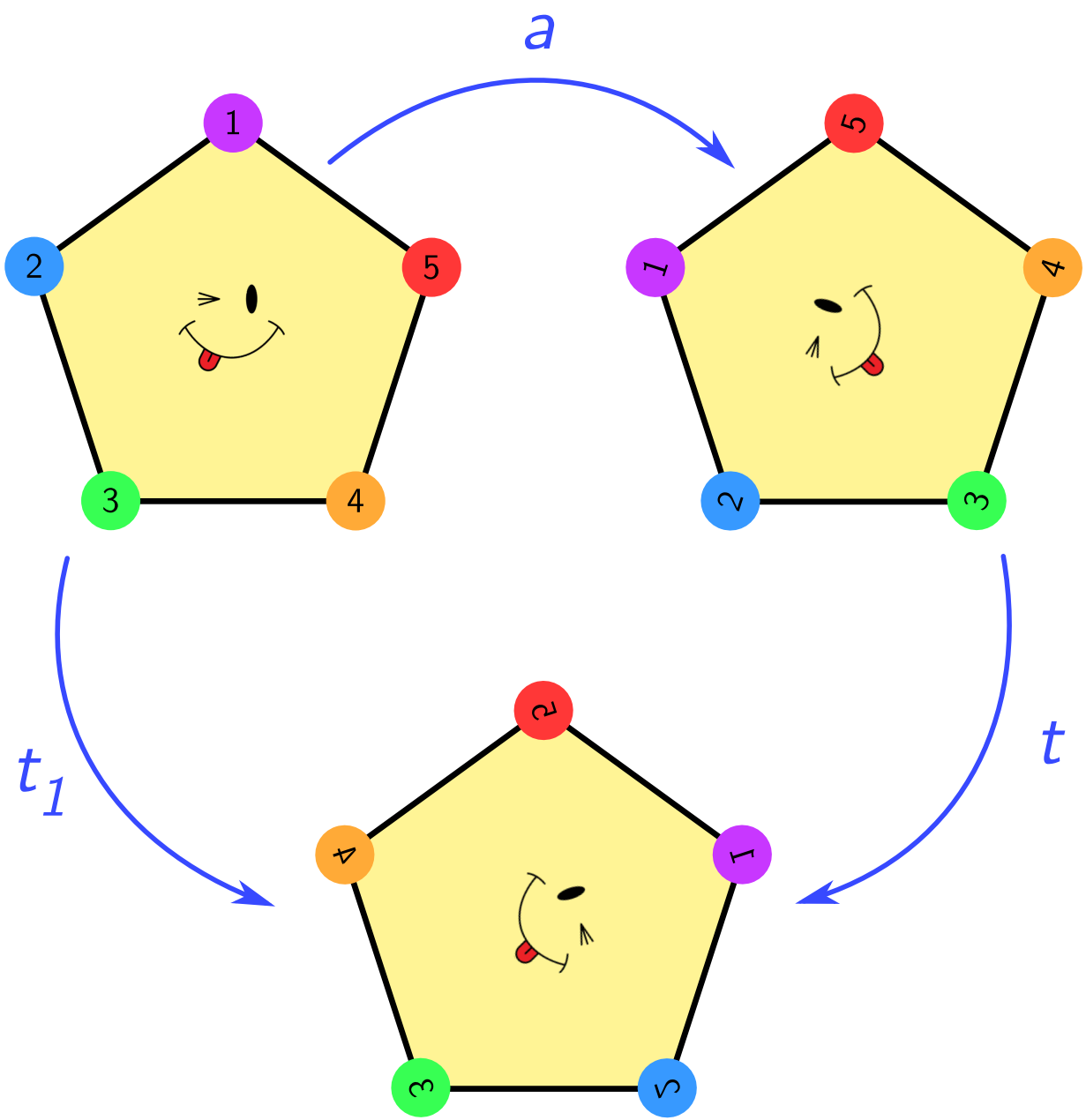
A szabályos n-szög szimmetriacsoportját **n-edfokú diédercsoportnak** nevezzük és D_n-nel jelöljük.

Legyenek a szimmetriatengelyekre vonatkozó tükrözések: $t_0, t_1, \ldots, t_{n-1}$.



A továbbiakban t_0 helyett egyszerűen csak t-t írunk, és szeretnénk a többi tükrözést is t és a segítségével kifejezni.

$at = t_1$



Hasonlóan (be)látható, hogy $t_k = a^k t$ minden $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ esetén.
Tehát ...

Tétel

A D_n csoportnak $2n$ eleme van: $D_n = \{\mathrm{id}, a, a^2, \ldots, a^{n-1}, t, at, a^2t, \ldots, a^{n-1}t\}$, ahol

- a: a középpont körüli $\frac{2\pi}{n}$ szögû forgatás,
- t: egy szimmetriatengelyre való tükrözés.

Ekkor a^k a középpont körüli $\frac{2k\pi}{n}$ szögű forgatás ($0 \leq k \leq n-1$),
a $t, at, a^2t, \ldots, a^{n-1}t$ transzformációk pedig tengelyes tükrözések
(két „szomszédos" tengely $\frac{\pi}{n}$ szöget zár be egymással).

Fennáll továbbá a $ta = a^{-1}t$ összefüggés. (Mert ta tükrözés, és így $tata = \mathrm{id}$.)

1. $D_n = \{\mathrm{id}, a, a^2, \ldots, a^{n-1}, t, at, a^2t, \ldots, a^{n-1}t\}$
2. $a^n = \mathrm{id}$ és $t^2 = \mathrm{id}$
3. $ta = a^{-1}t$

Példa

$D_3 =$

$\cdot$	a_0	a_1	a_2	t_0	t_1	t_2
a_0	a_0	a_1	a_2	t_0	t_1	t_2
a_1	a_1	a_2	a_0	t_1	t_2	t_0
a_2	a_2	a_0	a_1	t_2	t_0	t_1
t_0	t_0	t_2	t_1	a_0	a_2	a_1
t_1	t_1	t_0	t_2	a_1	a_0	a_2
t_2	t_2	t_1	t_0	a_2	a_1	a_0

$=$

$\cdot$	id	a	a^2	t	at	a^2t
id	id	a	a^2	t	at	a^2t
a	a	a^2	id	at	a^2t	t
a^2	a^2	id	a	a^2t	t	at
t	t	a^2t	at	id	a^2	a
at	at	t	a^2t	a	id	a^2
a^2t	a^2t	at	t	a^2	a	id

Példa

Számoljunk D_{15}-ben! Az eredmény $\mathrm{id}, a, \ldots, a^{14}, t, at, \ldots, a^{14}t$ valamelyike legyen.

$$a^{153} = a^3, \quad a^{13} \cdot a^6 t = a^4 t, \quad a^{23}t \cdot a^{18} = a^5 t, \quad a^7 t \cdot a^{12} t = a^{10}$$

Definíció

Legyen $(A; *)$ egy grupoid és $\emptyset \neq B \subseteq A$. Azt mondjuk, hogy a B halmaz **zárt** a $*$ műveletre, ha

$$\forall b_1, b_2 \in B \colon b_1 * b_2 \in B.$$

Ekkor van értelme megszorítani a $*$ műveletet a B halmazra, és így egy $(B; *)$ grupoidot kapunk, amelyet $(A; *)$ **részgrupoidjának** nevezünk.

Definíció

Ha $(G; \cdot)$ csoport, és $(H; \cdot)$ olyan részgrupoid, ami maga is csoport, akkor azt mondjuk, hogy H **részcsoportja** G-nek, és ezt így jelöljük: $H \leq G$.

Tétel

Bármely G csoport és $H \subseteq G$ esetén H akkor és csak akkor részcsoportja G-nek, ha

1. H zárt a szorzásra: $\forall h_1, h_2 \in H \colon h_1 \cdot h_2 \in H$;
2. H tartalmazza G egységelemét: $1 \in H$;
3. H zárt az inverzképzésre: $\forall h \in H \colon h^{-1} \in H$.

Tétel

Bármely G csoport és $H \subseteq G$ esetén H akkor és csak akkor részcsoportja G-nek, ha

1. H zárt a szorzásra: $\forall h_1, h_2 \in H \colon h_1 \cdot h_2 \in H$;
2. H tartalmazza G egységelemét: $1 \in H$;
3. H zárt az inverzképzésre: $\forall h \in H \colon h^{-1} \in H$.

Bizonyítás.

Az nyilvánvaló, hogy a fenti feltételek teljesülése esetén H valóban részcsoport.
A másik irány bizonyításához tfh. H részcsoport.

1. Ez világos.
2. Legyen 1_G a G csoport egységeleme, és legyen 1_H a H (rész)csoport egységeleme. Ekkor tetszőleges $h \in H$ esetén

$$1_G \cdot h = 1_H \cdot h, \text{ és így } 1_G = 1_H \in H.$$

3. Bármely $h \in H$ elemnek van inverze a H (rész)csoportban (legyen ez h') és a G csoportban is (legyen ez h^{-1}).

$$h^{-1} = h^{-1} \cdot 1 = h^{-1}(hh') = (h^{-1}h)h' = 1 \cdot h' = h' \in H. \qquad \square$$

Példa

Részcsoportot alkot-e a G csoportban a H halmaz?

$G = \mathbb{Z}$	$H = \mathbb{N}_0$	nem (nem zárt az inverzképzésre)
$G = \mathbb{C}^*$	$H = \{z \in \mathbb{C} : \lvert z\rvert = 1\}$	igen
$G = S_4$	$H = \{\mathrm{id}, (12), (34), (12)(34)\}$	igen
$G = \mathbb{Z}_5$	$H = \mathbb{Z}_5^*$	nem (nem zárt az összeadásra)
$G = D_6$	$H = \{\mathrm{id}, t, a^2, a^2 t\}$	nem (nem zárt a szorzásra)

Állítás

Részcsoportok metszete is részcsoport: $H_1, H_2 \leq G \implies H_1 \cap H_2 \leq G$.

Bizonyítás.

1. szorzásra való zártság:

   $$a, b \in H_1 \cap H_2 \implies a, b \in H_1, H_2 \implies a \cdot b \in H_1, H_2 \implies a \cdot b \in H_1 \cap H_2$$

2. egységelem:

   $$1 \in H_1, H_2 \implies 1 \in H_1 \cap H_2$$

3. inverzképzésre való zártság:

   $$a \in H_1 \cap H_2 \implies a \in H_1, H_2 \implies a^{-1} \in H_1, H_2 \implies a^{-1} \in H_1 \cap H_2$$

□

Megjegyzés

Az állítás igaz kettőnél több részcsoportra is (végtelen sokra is):

$$\forall i \in I \colon H_i \leq G \implies \bigcap_{i \in I} H_i \leq G.$$

Definíció

Legyen G egy csoport és $B \subseteq G$. A B halmaz által **generált részcsoport** a legszűkebb olyan részcsoport, ami tartalmazza B-t (jelölése $[B]$):

$$[B] = \bigcap_{B \subseteq H \leq G} H.$$

Megjegyzés

Az üres halmaz generátuma: $[\emptyset] = \{1\}$.

Állítás

Ha $\emptyset \neq B \subseteq G$, akkor $[B]$ azokból az elemekből áll, amelyek felépíthetőek B elemeiből kiindulva a szorzás és az inverzképzés segítségével:

$$[B] = \left\{ b_1^{\varepsilon_1} \cdot \ldots \cdot b_n^{\varepsilon_n} : n \in \mathbb{N}_0,\ b_1, \ldots, b_n \in B,\ \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \in \{1, -1\} \right\}.$$

Definíció

Ha $[B] = G$, akkor azt mondjuk, hogy B **generátorrendszere** a G csoportnak.

Példa

Határozzuk meg a G csoportban a B halmaz által generált részcsoportot.

$G = \mathbb{Z}$ $\quad B = \{6, 10\}$ $\quad [B] = \{2k : k \in \mathbb{Z}\}$

$G = \mathbb{Z}_{20}$ $\quad B = \{\overline{6}, \overline{10}\}$ $\quad [B] = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{8}, \overline{10}, \overline{12}, \overline{14}, \overline{16}, \overline{18}\}$

$G = \mathbb{Z}_{21}$ $\quad B = \{\overline{6}, \overline{10}\}$ $\quad [B] = \mathbb{Z}_{21}$

$G = \mathbb{C}$ $\quad B = \{1, i\}$ $\quad [B] = \mathbb{Z}[i] = \{a + bi : a, b \in \mathbb{Z}\}$

$G = \mathbb{C}^*$ $\quad B = \{1, i\}$ $\quad [B] = \{1, i, -1, -i\}$

Tétel

Az S_n szimmetrikus csoportot generálják a transzpozíciók, sőt, már a „szomszédos transzpozíciók” is:

$$S_n = [(1\,2), (2\,3), \ldots, (n-1\,n)].$$

Tétel

Az A_n alternáló csoportot generálják a hármas ciklusok, sőt, már a „szomszédos hármasok” is:

$$A_n = [(1\,2\,3), (2\,3\,4), \ldots, (n-2\,n-1\,n)].$$

Állítás

Tetszőleges G csoport és $a \in G$ esetén

$$[a] = \{a^k : k \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, a^{-2}, a^{-1}, 1, a, a^2, \dots\}.$$

Bizonyítás.

Triviális (HF). □

Példa

A $\mathbb{C}^*$ csoportban:

k	$\cdots$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	$\cdots$
2^k	$\cdots$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	32	64	128	$\cdots$
i^k	$\cdots$	1	i	-1	$-i$	1	i	-1	$-i$	1	i	-1	$-i$	$\cdots$

Az első esetben a hatványok mind különbözőek, ezért $[2] \cong \mathbb{Z}$.

A második esetben négyes periodicitást tapasztalunk, ezért $[i] \cong \mathbb{Z}_4$.

Egy tetszőleges $(G;\cdot)$ csoportban egy a elemet hatványozva két eset lehetséges:

(1) A hatványok mind különbözőek.

Ekkor $\varphi\colon\ (\mathbb{Z},+) \to ([a];\cdot)\,,\ k \mapsto a^k$ izomorfizmus,
ezért $([a];\cdot) \cong (\mathbb{Z},+)$.

- Szürjektivitás: $[a]$ minden eleme előáll a^k alakban.
- Injektivitás: feltettük, hogy $k \neq \ell$ esetén $a^k \neq a^\ell$.
- Művelettartás: $(k+\ell)\,\varphi = a^{k+\ell} \quad = \quad k\varphi \cdot \ell\varphi = a^k \cdot a^\ell$.

Egy tetszőleges $(G;\cdot)$ csoportban egy a elemet hatványozva két eset lehetséges:

(2) A hatványok között van ismétlődés: $\exists i<j:\ a^i=a^j \implies a^{j-i}=1$.
Legyen n a legkisebb pozitív kitevő, amelyre $a^n=1$.

Az $a^0, a^1, a^2, \ldots, a^{n-1}$ hatványok páronként különbözőek (miért?)
és minden más hatvány ezek valamelyikével megegyezik:
$k=nq+r$ esetén $a^k=a^{nq+r}=(a^n)^q\cdot a^r=1^q\cdot a^r=a^r$.

Ekkor $\varphi\colon (\mathbb{Z}_n,+)\to([a];\cdot)$, $\overline{k}\mapsto a^k$ izomorfizmus,
ezért $([a];\cdot)\cong(\mathbb{Z}_n,+)$.

- Jóldefiniáltság: $k\equiv\ell \pmod n \implies a^k=a^\ell$.
- Szürjektivitás: $[a]$ minden eleme előáll a^k $(k=0,1,\ldots,n-1)$ alakban.
- Injektivitás: $k\not\equiv\ell \pmod n \implies a^k\neq a^\ell$.
- Művelettartás: $\left(\overline{k}+\overline{\ell}\right)\varphi=\overline{k+\ell}\,\varphi=a^{k+\ell} \quad = \quad \overline{k}\varphi\cdot\overline{\ell}\varphi=a^k\cdot a^\ell$.

Definíció

Az $a \in G$ elem **rendjén** azt a legkisebb n pozitív egész számot értjük, amelyre $a^n = 1$. Ha nincs ilyen n, akkor azt mondjuk, hogy a rendje végtelen.

Az a elem rendjét $o(a)$ jelöli (olvasd: *ordó*):

$$o(a) = \min\left\{n \in \mathbb{N} : a^n = 1\right\} \qquad (\min \emptyset = \infty \text{ megállapodással}).$$

Definíció

A G véges csoport **rendjén** elemeinek számát értjük.

Megjegyzés

Az a elem rendje nem más, mint az általa generált részcsoport rendje: $o(a) = |[a]|$.

Definíció

A G csoportot **ciklikus csoportnak** nevezzük, ha egyetlen elemmel generálható, azaz $\exists a \in G : [a] = G$.

Tétel

Egy csoport akkor és csak akkor ciklikus, ha izomorf a következő csoportok valamelyikével:

$$\{1\},\ \mathbb{Z}_2,\ \mathbb{Z}_3,\ \mathbb{Z}_4, \ldots,\ \mathbb{Z}.$$

Bizonyítás.

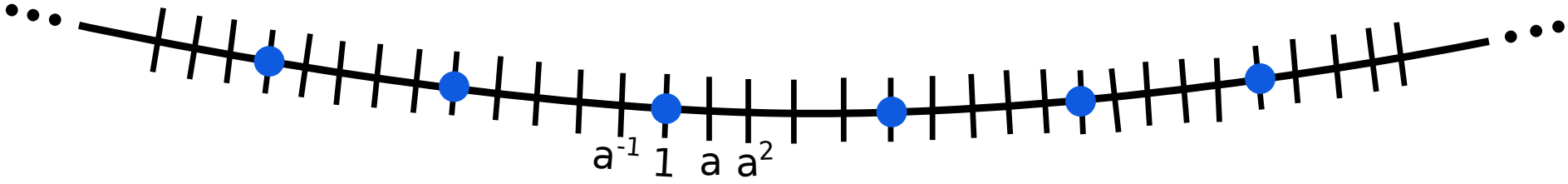
Ha G ciklikus, akkor $G = [a]$ alkalmas $a \in G$ elemre, és korábban már láttuk, hogy $[a] \cong \mathbb{Z}$ (első eset) vagy $[a] \cong \mathbb{Z}_{o(a)}$ (második eset).

Fordítva, a felsorolt csoportok valóban ciklikusak: $\mathbb{Z}_n = [\,\overline{1}\,]$ és $\mathbb{Z} = [1]$. □

Példa

Határozzuk meg a $g \in G$ elem rendjét.

1. $G = \mathbb{C}^*,\ g = 2$: $o(g) = \infty,\ [a] = \{\dots, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4, \dots\} \cong \mathbb{Z}$
2. $G = \mathbb{C}^*,\ g = i$: $o(g) = 4,\ [a] = \{i, -1, -i, 1\} \cong \mathbb{Z}_4$
3. $G = \mathbb{C},\ g = i$: $o(g) = \infty,\ [a] = \{\dots, -2i, -i, 0, i, 2i, \dots\} \cong \mathbb{Z}$
4. $G = \mathbb{Z}_{14},\ g = \overline{10}$: $o(g) = 7,\ [a] = \{\overline{10}, \overline{6}, \overline{2}, \overline{12}, \overline{8}, \overline{4}, \overline{0}\} \cong \mathbb{Z}_7$
5. $G = \mathbb{Z}_{13}^*,\ g = \overline{5}$: $o(g) = 4,\ [a] = \{\overline{5}, \overline{-1}, \overline{-5}, \overline{1}\} = \{\overline{5}, \overline{12}, \overline{8}, \overline{1}\} \cong \mathbb{Z}_4$
6. $G = D_{14},\ g = a^{10}$: $o(g) = 7,\ [g] = \{g^{10}, g^6, g^2, g^{12}, g^8, g^4, \mathrm{id}\} \cong \mathbb{Z}_7$
7. $G = D_{14},\ g = a^{10}t$: $o(g) = 2,\ [g] = \{g, \mathrm{id}\} \cong \mathbb{Z}_2$
8. $G = S_9, g = (368)(46)$: $o(g) = 4, [g] = \{(3468), (36)(48), (3864), \mathrm{id}\} \cong \mathbb{Z}_4$



Tétel

Ciklikus csoport minden részcsoportja is ciklikus.

Bizonyítás.

Tfh. $G = [a]$ és $H \leq G$. Ha $H \neq \{1\}$, akkor létezik olyan $k \in \mathbb{N}$, amelyre $a^k \in H$ (miért?); vegyük a legkisebb ilyen kitevőt. Cél: $[a^k] = H$.

- $[a^k] \overset{?}{\subseteq} H$: Mivel H zárt a szorzásra és az inverzképzésre, a^k minden hatványa is H-ban van, azaz $[a^k] \subseteq H$.
- $H \overset{?}{\subseteq} [a^k]$: Legyen $h \in H$; ÁMNTFH $h = a^j$. Osszuk el j-t maradékosan k-val: $j = qk + r$ és $0 \leq r < k$. Ha $r = 0$, akkor készen vagyunk: $a^j = \left(a^k\right)^q \in [a^k]$. Ha $r > 0$, akkor

$$a^r = a^{j-qk} = a^j \cdot \left(a^k\right)^{-q} \in H,$$

ami ellentmond k minimalitásának. □

$\mathbb{Z}_{12}$ részcsoportjai

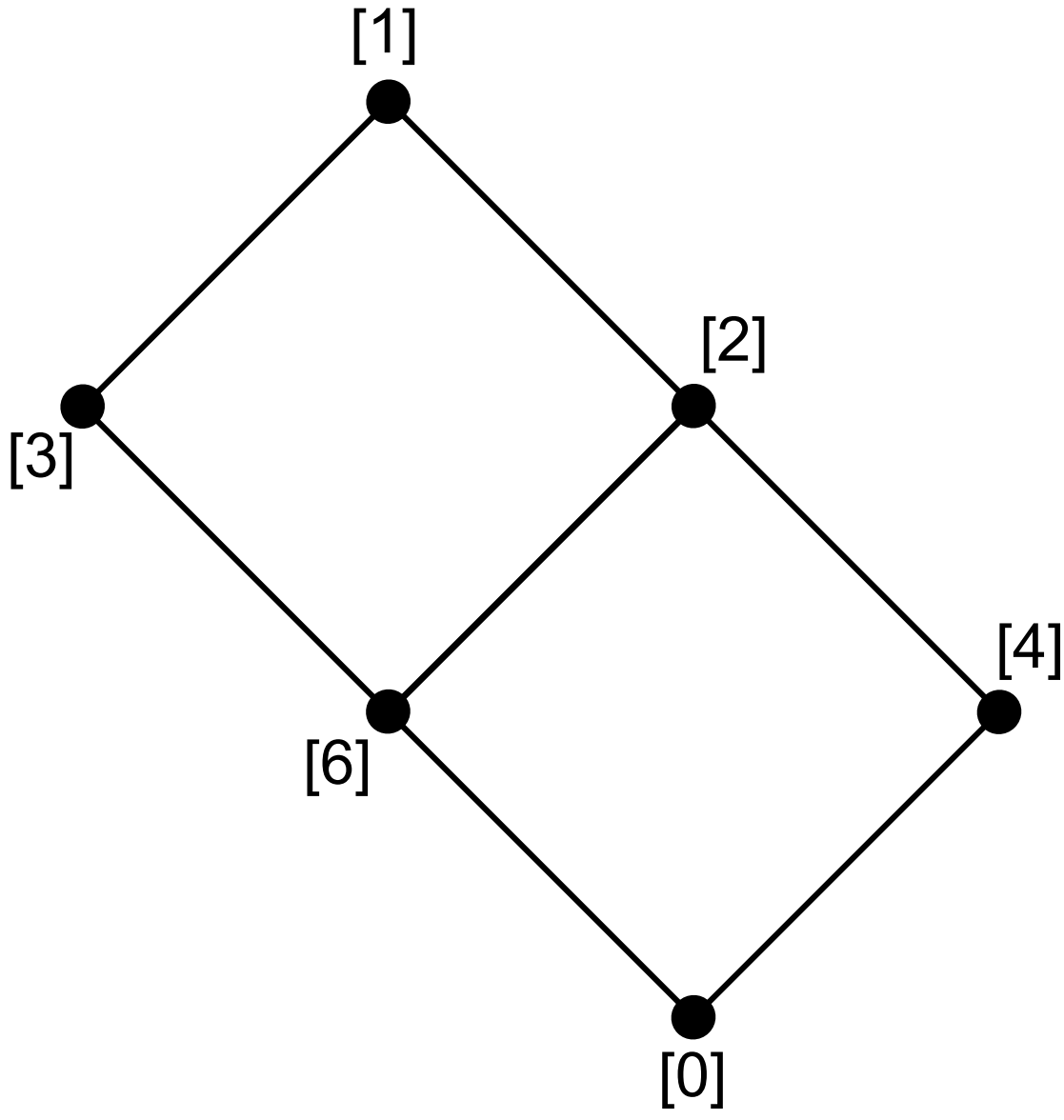
Tudjuk, hogy minden részcsoport ciklikus:

- $[\overline{1}] = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{8}, \overline{9}, \overline{10}, \overline{11}\}$
- $[\overline{2}] = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{8}, \overline{10}\}$
- $[\overline{3}] = \{\overline{0}, \overline{3}, \overline{6}, \overline{9}\}$
- $[\overline{4}] = \{\overline{0}, \overline{4}, \overline{8}\}$
- $[\overline{5}] = \{\overline{0}, \overline{5}, \overline{10}, \overline{3}, \overline{8}, \overline{1}, \overline{6}, \overline{11}, \overline{4}, \overline{9}, \overline{2}, \overline{7}\}$
- $[\overline{6}] = \{\overline{0}, \overline{6}\}$
- $[\overline{7}] = \{\overline{0}, \overline{7}, \overline{2}, \overline{9}, \overline{4}, \overline{11}, \overline{6}, \overline{1}, \overline{8}, \overline{3}, \overline{10}, \overline{5}\}$
- $[\overline{8}] = \{\overline{0}, \overline{8}, \overline{4}\}$
- $[\overline{9}] = \{\overline{0}, \overline{9}, \overline{6}, \overline{3}\}$
- $[\overline{10}] = \{\overline{0}, \overline{10}, \overline{8}, \overline{6}, \overline{4}, \overline{2}\}$
- $[\overline{11}] = \{\overline{0}, \overline{11}, \overline{10}, \overline{9}, \overline{8}, \overline{7}, \overline{6}, \overline{5}, \overline{4}, \overline{3}, \overline{2}, \overline{1}\}$
- $[\overline{0}] = \{\overline{0}\}$

$\mathbb{Z}_{12}$ részcsoportjai

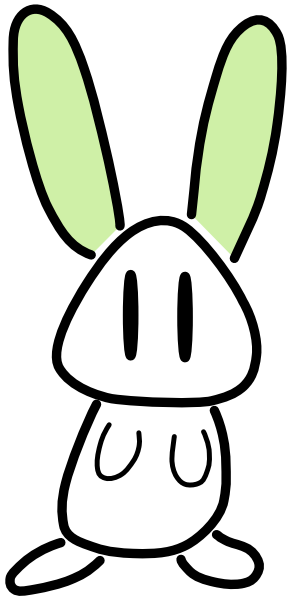
- $[\overline{1}] = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{8}, \overline{9}, \overline{10}, \overline{11}\} = [\overline{5}] = [\overline{7}] = [\overline{11}]$
- $[\overline{2}] = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{8}, \overline{10}\} = [\overline{10}]$
- $[\overline{3}] = \{\overline{0}, \overline{3}, \overline{6}, \overline{9}\} = [\overline{9}]$
- $[\overline{4}] = \{\overline{0}, \overline{4}, \overline{8}\} = [\overline{8}]$
- $[\overline{6}] = \{\overline{0}, \overline{6}\}$
- $[\overline{0}] = \{\overline{0}\}$

$\mathbb{Z}_{12}$ részcsoporthálója



$\mathbb{Z}_n$ részcsoportjai

- Bármely $\overline{k} \in \mathbb{Z}_n$ esetén $\left[\overline{k}\right] = \left[\overline{d}\right]$, ahol $d = \text{lnko}(k, n)$.



Tetszőleges $\overline{b} \in \mathbb{Z}_n$ esetén

$$\begin{aligned}
\overline{b} \in \left[\overline{k}\right] &\iff \exists x \in \mathbb{Z}\colon \overline{b} = x\overline{k} \\
&\iff \exists x \in \mathbb{Z}\colon b \equiv x \cdot k \pmod{n} \\
&\iff d = \text{lnko}(k, n) \mid b \\
&\iff \exists \ell \in \mathbb{Z}\colon b = \ell \cdot d \\
&\iff \overline{b} \in \left[\overline{d}\right].
\end{aligned}$$

- $\mathbb{Z}_n$ részcsoportjai kölcsönösen egyértelműen megfelelnek n osztóinak:

$$d \mid n \quad \rightsquigarrow \quad \left[\overline{d}\right] \cong \mathbb{Z}_{n/d}.$$

- $\mathbb{Z}_n$-nek $\varphi(n)$ db generátoreleme van:

$$\left[\overline{k}\right] = \mathbb{Z}_n \iff \text{lnko}(k, n) = 1.$$

A rend tulajdonságai

Tudjuk, hogy ha $o(a) = n$, akkor $[a] \cong \mathbb{Z}_n$, az $a^k \mapsto \overline{k}$ izomorfizmus mellett.

$[a]$	$\mathbb{Z}_n$
a^k	$\overline{k}$
$a^k = a^\ell \iff k \equiv \ell \pmod{n}$	$\overline{k} = \overline{\ell} \iff k \equiv \ell \pmod{n}$
$a^k = 1 \iff n \mid k$	$\overline{k} = \overline{0} \iff n \mid k$
$o(a^k) = \lvert [a^k] \rvert = \frac{n}{\text{lnko}(k,n)}$	$\lvert [\overline{k}] \rvert = \lvert [\overline{d}] \rvert = \frac{n}{d}$, ahol $d = \text{lnko}(k, n)$

Primitív egységgyökök

Tetszőleges $z \in \mathbb{C}^*$ komplex szám esetén

$$o(z) = n \iff \lvert [z] \rvert = n \iff [z] = E_n.$$

Az ilyen tulajdonságú számokat nevezzük **primitív n-edik egységgyököknek**.
A primitív n-edik egységgyökök száma $\varphi(n)$.

Definíció

A G csoport nemüres részhalmazait **komplexusoknak** nevezzük. Komplexusok szorzatát és inverzét elemenként értelmezzük:

$$AB = \{ab : a \in A, b \in B\}, \quad A^{-1} = \{a^{-1} : a \in A\} \qquad (\emptyset \neq A, B \subseteq G).$$

Egyelemű komplexusok esetén az alábbi egyszerűsített jelölést használjuk:

$$\{a\}B = aB, \quad B\{a\} = Ba \qquad (a \in G,\ \emptyset \neq B \subseteq G).$$

Tétel

Egy $H \subseteq G$ komplexus akkor és csak akkor részcsoport, ha

$$HH \subseteq H,\ 1 \in H,\ H^{-1} \subseteq H.$$

Bizonyítás.

Ez csak a részcsoportokat leíró korábbi tétel átfogalmazása. □

Megjegyzés

Ha $H \leq G$, akkor nemcsak $HH \subseteq H$, de $H \subseteq HH$ is teljesül, mert $H = \{1\}H \subseteq HH$, tehát $HH = H$. Hasonlóan $H^{-1} = H$ is teljesül.

Definíció

Tetszőleges $H \leq G$ és $g \in G$ esetén a gH, illetve Hg komplexusokat a g elem H szerinti bal, illetve jobb oldali **mellékosztályának** nevezzük.

Példa

Határozzuk meg a $G = \mathbb{Z}_6$ csoportban a $H = \{\overline{0}, \overline{3}\}$ részcsoporthoz tartozó mellékosztályokat.

$$\overline{0} + H = \{\overline{0}, \overline{3}\}, \quad \overline{1} + H = \{\overline{1}, \overline{4}\}, \quad \overline{2} + H = \{\overline{2}, \overline{5}\},$$
$$\overline{3} + H = \{\overline{3}, \overline{0}\}, \quad \overline{4} + H = \{\overline{4}, \overline{1}\}, \quad \overline{5} + H = \{\overline{5}, \overline{2}\}.$$

Példa

Határozzuk meg a $G = \mathbb{Z}$ csoportban a $H = \{3k : k \in \mathbb{Z}\}$ részcsoporthoz tartozó mellékosztályokat.

$$\overline{0} + H = \{3k : k \in \mathbb{Z}\}, \quad \overline{1} + H = \{3k+1 : k \in \mathbb{Z}\}, \quad \overline{2} + H = \{3k+2 : k \in \mathbb{Z}\}.$$

Tetszőleges a egész szám esetén, $a + H$ nem más, mint a modulo 3 maradékosztálya. Következésképp

$$a + H = b + H \iff a \equiv b \pmod 3 \iff 3 \mid a - b \iff a - b \in H.$$

Tétel

Legyen $H \leq G$, és definiáljunk a G halmazon egy $\sim$ relációt:

$$a \sim b \iff ab^{-1} \in H.$$

Ekkor $\sim$ ekvivalenciareláció, és egy $a \in G$ elem ekvivalenciaosztálya Ha.

Bizonyítás.

HF □

Következmény

Tetszőleges $H \leq G$ esetén a H szerinti jobb oldali mellékosztályok a G halmaz egy osztályozását alkotják. Hasonló érvényes a bal oldali mellékosztályokra is.

Példa

Határozzuk meg a $G = \mathbb{Z}_{13}^*$ csoportban a $H = [\overline{5}] = \{\overline{1}, \overline{5}, \overline{8}, \overline{12}\}$ részcsoporthoz tartozó mellékosztályokat.

$$\begin{aligned}
\overline{1} \cdot H &= \{\overline{1}, \overline{5}, \overline{8}, \overline{12}\} = \overline{5} \cdot H = \overline{8} \cdot H = \overline{12} \cdot H, \\
\overline{2} \cdot H &= \{\overline{2}, \overline{10}, \overline{3}, \overline{11}\} = \overline{10} \cdot H = \overline{3} \cdot H = \overline{11} \cdot H, \\
\overline{4} \cdot H &= \{\overline{4}, \overline{7}, \overline{6}, \overline{9}\} = \overline{7} \cdot H = \overline{6} \cdot H = \overline{9} \cdot H.
\end{aligned}$$

Példa

Határozzuk meg a $G = S_3$ csoportban a $H = \{\mathrm{id}, (23)\}$ részcsoporthoz tartozó jobb oldali mellékosztályokat.

$$\begin{aligned} H \cdot \mathrm{id} &= \{\mathrm{id}, (23)\} = (23) \cdot H, \\ H \cdot (12) &= \{(12), (123)\} = H \cdot (123), \\ H \cdot (13) &= \{(13), (132)\} = H \cdot (132). \end{aligned}$$

Példa

Határozzuk meg a $G = S_3$ csoportban a $H = \{\mathrm{id}, (23)\}$ részcsoporthoz tartozó bal oldali mellékosztályokat.

$$\begin{aligned} \mathrm{id} \cdot H &= \{\mathrm{id}, (23)\} = (23) \cdot H, \\ (12) \cdot H &= \{(12), (132)\} = (132) \cdot H, \\ (13) \cdot H &= \{(13), (123)\} = (123) \cdot H. \end{aligned}$$

Definíció

A G véges csoport H részcsoportja szerinti bal (vagy jobb) oldali mellékosztályok számát H **indexének** nevezzük. Jelölés: $[G : H]$.

Lagrange tétele

Tetszőleges G véges csoport és H részcsoport esetén

$$|G| = |H| \cdot [G : H].$$

Bizonyítás.

Bármely $g \in G$ esetén

$$\lambda_g \colon H \to gH, \;\; h \mapsto gh$$

bijektív leképezés (miért?), ezért $|gH| = |H|$, azaz a mellékosztályok mind egyforma méretűek (akkorák, mint H).

Tehát a mellékosztályok a G halmazt felbontják $[G : H]$ darab $|H|$-elemű részhalmazra, és így $|G| = |H| \cdot [G : H]$. □

Következmény

Véges csoportban minden részcsoport rendje osztója a csoport rendjének: $|H| \,\big|\, |G|$.

Következmény

Véges csoportban minden elem rendje osztója a csoport rendjének: $o(a) \,\big|\, |G|$.

Bizonyítás.

Alkalmazzuk a fenti következményt a $H = [a]$ részcsoportra: $o(a) = |[a]| \,\big|\, |G|$. □

Következmény

Ha G egy n-elemű csoport, akkor minden $a \in G$ elemre $a^n = 1$.

Bizonyítás.

Alkalmazzuk a fenti következményt: $a^n = \left(a^{o(a)}\right)^{n/o(a)} = 1^{n/o(a)} = 1$. □

Következmény (Euler–Fermat-tétel)

Ha a és m relatív prímek ($m \geq 2$), akkor $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$.

Bizonyítás.

Alkalmazzuk a fenti következményt a $G = \mathbb{Z}_m^*$ csoportra (itt $|G| = \varphi(m)$). □

Következmény

Ha G egy n-elemű csoport, akkor minden $a \in G$ elemre $a^{-1} = a^{n-1}$.

Következmény

Minden prímrendű csoport ciklikus.

Bizonyítás.

Tfh. $|G| = p$ prímszám. Legyen $g \in G \setminus \{1\}$ tetszőleges elem.
Ekkor $o(g) = p$ (miért?), és így $[g] = G$. □

Tétel

A kis elemszámú csoportok (izomorfia erejéig) a következők:

1. egyelemű: $\{1\}$;
2. kételemű: $\mathbb{Z}_2$;
3. háromelemű: $\mathbb{Z}_3$;
4. négyelemű: $\mathbb{Z}_4$, V;
5. ötelemű: $\mathbb{Z}_5$;
6. hatelemű: $\mathbb{Z}_6$, $D_3 \cong S_3$;
7. hételemű: $\mathbb{Z}_7$.

D_4 részcsoportjai

$D_4 = \{\mathrm{id}, a, a^2, a^3, t, at, a^2t, a^3t\}$

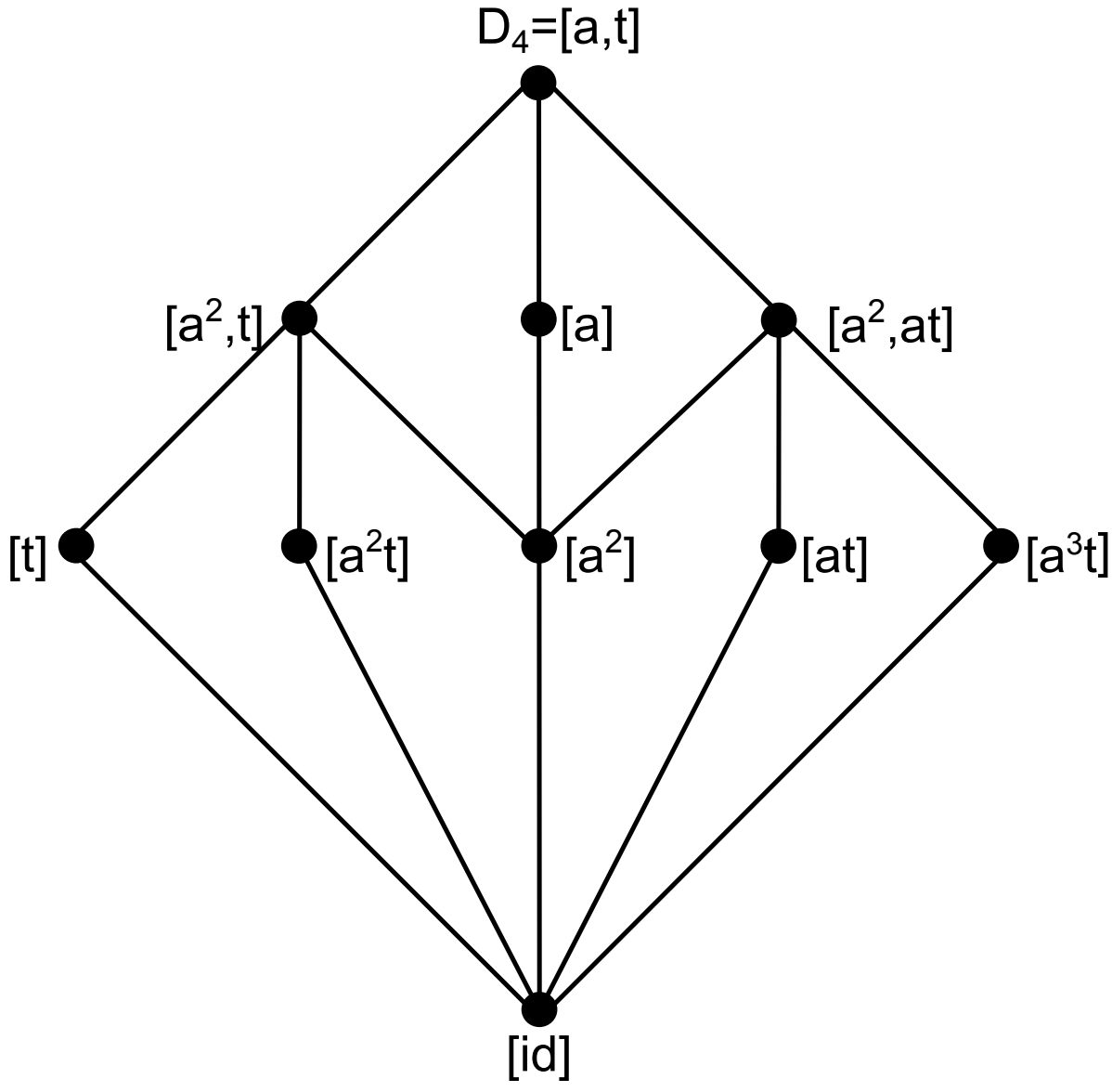
A ciklikus részcsoportok:

- $[\mathrm{id}] = \{\mathrm{id}\}$
- $[a] = \{\mathrm{id}, a, a^2, a^3\} = [a^3]$
- $[a^2] = \{\mathrm{id}, a^2\}$
- $[t] = \{\mathrm{id}, t\}$
- $[at] = \{\mathrm{id}, at\}$
- $[a^2t] = \{\mathrm{id}, a^2t\}$
- $[a^3t] = \{\mathrm{id}, a^3t\}$

A nem ciklikus részcsoportok:

- D_4
- $\{\mathrm{id}, a^2, t, a^2t\} \cong V$
- $\{\mathrm{id}, a^2, at, a^3t\} \cong V$

D_4 részcsoporthálója



$\mathbb{Z}_n$ elemeinek rend-szerezése

Legyen $r(d)$ a d-edrendű elemek száma $\mathbb{Z}_n$-ben. Mivel minden d-edrendű elem egy d-elemű ciklikus részcsoportot generál, és minden d-elemű ciklikus részcsoportnak $\varphi(d)$ generátora van,

$$r(d) = \varphi(d) \cdot (\text{a } d\text{-elemű ciklikus részcsoportok száma}).$$

- Ha $d \nmid n$, akkor $r(d) = 0$ (Lagrange).
- Ha $d \mid n$, akkor egyetlen d-elemű ciklikus részcsoport van, ezért $r(d) = \varphi(d)$.

A rendjeik szerint összeszámolva az elemeket, ezt kapjuk:

$$|\mathbb{Z}_n| = n = \sum_{d|n} r(d) = \sum_{d|n} \varphi(d).$$

$\mathbb{Z}_p^*$ elemeinek rend-szerezése

Legyen p prímszám, és legyen $r(d)$ a d-edrendű elemek száma $\mathbb{Z}_p^*$-ban.

- Ha $d \nmid p-1$, akkor $r(d) = 0$ (Lagrange).
- Ha $H \leq \mathbb{Z}_p^*$ egy d-elemű ciklikus részcsoport, akkor $\forall h \in H\colon h^d = \overline{1}$.
  Tehát H elemei mind gyökei az $x^d - \overline{1} \in \mathbb{Z}_p[x]$ polinomnak.
  Mivel $\mathbb{Z}_p$ test, a polinomnak nem lehet több gyöke, mint amennyi a fokszáma.
  Ezért legfeljebb egy d-elemű ciklikus részcsoport létezhet.
  Következésképp $r(d) = \varphi(d)$ vagy $r(d) = 0$.

A rendjeik szerint összeszámolva az elemeket, ezt kapjuk:

$$|\mathbb{Z}_p^*| = p-1 \;=\; \sum_{d \mid p-1} r(d) \leq \sum_{d \mid p-1} \varphi(d) = p-1.$$

Ha akár csak egyetlen $d \mid p-1$ esetén is $r(d) = 0$ lenne, akkor a $p-1 < p-1$ ellentmondást kapnánk. Tehát

$$\forall d \mid p-1\colon r(d) = \varphi(d).$$

Tétel

Ha p prímszám, akkor minden $d \mid p-1$ esetén létezik d-edrendű elem $\mathbb{Z}_p^*$-ban.

Következmény

Ha p prímszám, akkor $\mathbb{Z}_p^*$ ciklikus csoport; a generátorelemeinek száma $\varphi(p-1)$.

Definíció

Ha $\overline{g} \in \mathbb{Z}_m^*$ hatványaiként minden modulo m redukált maradékosztály megkapható (azaz $\mathbb{Z}_m^* = [\overline{g}]$), akkor azt mondjuk, hogy g **primitív gyök** modulo m.

Tétel

Akkor és csak akkor létezik primitív gyök modulo m (azaz $\mathbb{Z}_m^*$ akkor és csak akkor ciklikus), ha $m = 1, 2, 4, p^\alpha$ vagy $2p^\alpha$ (p páratlan prím).

Példa

Nincs primitív gyök modulo 100, azaz $\mathbb{Z}_{100}^*$-ban nincs 40-edrendű elem.
Meg lehet mutatni (HF), hogy $a \perp 100 \implies a^{20} \equiv 1 \pmod{100}$.

Megjegyzés

Ha $m \perp 10$, akkor $\frac{1}{m}$ végtelen periodikus tizedes tört, és a periódus hossza nem más, mint $\overline{10}$ rendje a $\mathbb{Z}_m^*$ csoportban.

Ha g primitív gyök modulo m, akkor $\mathbb{Z}_m^* \cong \mathbb{Z}_{\varphi(m)}$ az alábbi izomorfizmus mellett:

$$\begin{array}{rccc} \psi: & \mathbb{Z}_{\varphi(m)} & \longrightarrow & \mathbb{Z}_m^* \\ & i & \longmapsto & g^i \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{Z}_{\varphi(m)} & \longleftarrow & \mathbb{Z}_m^* & : \psi^{-1} \\ \operatorname{ind}_g a & \longleftarrow\!\shortmid & a & \end{array}$$

Definíció

Ha g primitív gyök modulo m és $a \perp m$, akkor létezik olyan (modulo $\varphi(m)$ egyértelműen meghatározott) i egész szám, amelyre $g^i \equiv a \pmod{m}$. Ezt az i kitevőt az a egész szám g alapú **indexének** nevezzük (az m modulusra nézve). Jelölés: $i = \operatorname{ind}_g a$.

Példa

Indextáblázat a $g = 2$ primitív gyökkel a $p = 11$ modulushoz:

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2^i	1	2	4	8	5	10	9	7	3	6

a	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\operatorname{ind}_g a$	0	1	8	2	4	9	7	3	6	5

Állítás

Legyen g primitív gyök modulo m, és legyen $k, a, b \in \mathbb{Z},\ a, b \perp m$.

1. $\operatorname{ind}_g 1 \equiv 0 \pmod{\varphi(m)}$
2. $\operatorname{ind}_g(ab) \equiv \operatorname{ind}_g a + \operatorname{ind}_g b \pmod{\varphi(m)}$
3. $\operatorname{ind}_g(ab^{-1}) \equiv \operatorname{ind}_g a - \operatorname{ind}_g b \pmod{\varphi(m)}$
4. $\operatorname{ind}_g(a^k) \equiv k \cdot \operatorname{ind}_g a \pmod{\varphi(m)}$

Bizonyítás.

Következik abból, hogy $\psi^{-1}\colon \mathbb{Z}_m^* \to \mathbb{Z}_{\varphi(m)},\ a \mapsto \operatorname{ind}_g a$ izomorfizmus.
(Belátható közvetlenül is az index definíciójából, a logaritmus azonosságaihoz hasonlóan.) □

Példa

Oldjuk meg az indextáblázat segítségével az $x^6 \equiv 5 \pmod{11}$ kongruenciát.

a	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\operatorname{ind}_g a$	0	1	8	2	4	9	7	3	6	5

A megoldást kereshetjük $x \equiv 2^i \pmod{11}$ alakban (ugye?).

$$
\begin{aligned}
x^6 \equiv 5 \pmod{11} &\iff 2^{6i} \equiv 2^4 \pmod{11} \\
&\iff 6i \equiv 4 \pmod{10} \\
&\iff i \equiv 4 \pmod{5} \\
&\iff i \equiv 4, 9 \pmod{10} \\
&\iff 2^i \equiv 5, 6 \pmod{11} \\
&\iff x \equiv 5, 6 \pmod{11}
\end{aligned}
$$

Definíció

Azt mondjuk, hogy az a egész szám **n-edik hatványmaradék** modulo m, ha van olyan x egész szám, amelyre $x^n \equiv a \pmod{m}$.

Tétel

Legyen g primitív gyök modulo m és tfh. $a \perp m$. Ekkor a pontosan akkor n-edik hatványmaradék modulo m, ha $\mathrm{Inko}(n, \varphi(m)) \mid \mathrm{ind}_g\, a$.

Bizonyítás.

Az $x^n \equiv a \pmod{m}$ kongruencia megoldását kereshetjük $x \equiv g^i \pmod{m}$ alakban.

$$\begin{aligned} x^n \equiv a \pmod{m} &\iff g^{ni} \equiv g^{\mathrm{ind}_g\, a} \pmod{m} \\ &\iff ni \equiv \mathrm{ind}_g\, a \pmod{\varphi(m)} \end{aligned}$$

Ez egy lineáris kongruencia (az i ismeretlenre nézve), amelynek akkor és csak akkor van megoldása, ha $\mathrm{Inko}(n, \varphi(m)) \mid \mathrm{ind}_g\, a$. □

Definíció

Azt mondjuk, hogy az a egész szám **négyzetes maradék** modulo m, ha van olyan x egész szám, amelyre $x^2 \equiv a \pmod{m}$. Ellenkező esetben azt mondjuk, hogy a **négyzetes nemmaradék** modulo m.

Tétel

Legyen p páratlan prím, g primitív gyök modulo p és tfh. $p \nmid a$. Ekkor a pontosan akkor négyzetes maradék modulo p, ha $\operatorname{ind}_g a$ páros.

Bizonyítás.

Az előző tételt alkalmazva azt kapjuk, hogy a pontosan akkor négyzetes maradék modulo p, ha $\operatorname{lnko}(2, p-1) \mid \operatorname{ind}_g a$. Mivel p páratlan, $\operatorname{lnko}(2, p-1) = 2$.

□

Definíció

Tetszőleges p páratlan prímszám és p-vel nem osztható a egész szám esetén értelmezzük az $\left(\frac{a}{p}\right)$ **Legendre-szimbólumot** a következőképpen:

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} 1, & \text{ha } a \text{ négyzetes maradék } \bmod p; \\ -1, & \text{ha } a \text{ négyzetes nemmaradék } \bmod p. \end{cases}$$

Tétel (Euler-kritérium)

Ha p páratlan prímszám és $p \nmid a$, akkor

$$\left(\frac{a}{p}\right) \equiv a^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p}.$$

Következmény

Tetszőleges p páratlan prímszám és p-vel nem osztható a, b egész számok esetén teljesülnek az alábbiak:

1. $a \equiv b \pmod{p} \implies \left(\frac{a}{p}\right) = \left(\frac{b}{p}\right)$;
2. $\left(\frac{ab}{p}\right) = \left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{b}{p}\right)$;
3. $\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}} = \begin{cases} 1, & \text{ha } p \equiv 1 \pmod 4; \\ -1, & \text{ha } p \equiv 3 \pmod 4. \end{cases}$

Tétel (négyzetes reciprocitás)

Tetszőleges p, q különböző páratlan prímszámok esetén

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}} = \begin{cases} 1, & \text{ha } p \equiv 1 \pmod 4 \text{ vagy } q \equiv 1 \pmod 4; \\ -1, & \text{ha } p \equiv 3 \pmod 4 \quad \text{és} \quad q \equiv 3 \pmod 4. \end{cases}$$

Tétel

Ha p páratlan prímszám, akkor

$$\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}} = \begin{cases} 1, & \text{ha } p \equiv 1, 7 \pmod 8; \\ -1, & \text{ha } p \equiv 3, 5 \pmod 8. \end{cases}$$

Tétel (Cayley-reprezentáció)

Minden csoport izomorf egy permutációcsoporttal (azaz egy szimmetrikus csoport részcsoportjával).

Bizonyítás.

Legyen G egy tetszőleges csoport, és tekintsük a G halmaz összes permutációi alkotta S_G szimmetrikus csoportot. Meg fogjuk mutatni, hogy G izomorf S_G egy részcsoportjával. Tudjuk, hogy a $\rho_g \colon G \to G, x \mapsto xg$ leképezés bármely $g \in G$ elemre bijektív, tehát $\rho_g \in S_G$. Minden $g, h \in G$ esetén teljesülnek az alábbiak:

1. $\rho_g \rho_h = \rho_{gh}$ $\quad (\forall x \in G \colon x(\rho_g \rho_h) = (x\rho_g)\rho_h = (xg)h = x(gh) = x\rho_{gh})$
2. $\rho_1 = \mathrm{id}$ $\quad (\forall x \in G \colon x\rho_1 = x1 = x = x\,\mathrm{id})$
3. $\rho_g^{-1} = \rho_{g^{-1}}$ $\quad (\rho_g \rho_{g^{-1}} = \rho_{gg^{-1}} = \rho_1 = \mathrm{id})$
4. $\rho_g = \rho_h \implies g = h$ $\quad (\rho_g = \rho_h \implies g = 1g = 1\rho_g = 1\rho_h = 1h = h)$

Mindezekből következik, hogy a $\{\rho_g : g \in G\}$ halmaz részcsoportot alkot az S_G csoportban (1,2,3), és a

$$\rho \colon G \to \{\rho_g : g \in G\}, \quad g \mapsto \rho_g$$

leképezés izomorfizmus (1,4). □