

1	2	3	4	5	6	7	Σ

Név:

Tudnivalók: Minden feladatnál indokolni kell a választ, illetve le kell írni a végeredményhez elvezető levezetést. Semmilyen segédeszköz nem használható, még függvénytáblázat, számológép, mobiltelefon sem. Bármiféle nem megengedett segédeszköz használata esetén a dolgozat automatikusan 0 pontos, javítási lehetőség nélkül. A rendelkezésre álló idő 90 perc.

- 1. feladat (6 pont):** Határozza meg a \mathbb{C}^* csoportban a $\{-1, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\}$ halmaz által generált részcsoportot.
- 2. feladat (6 pont):** Oldja meg az S_9 csoportban a $(25)(234) \cdot x \cdot (678)(789) = (4276)(934)$ egyenletet. A végeredményt adja meg idegen ciklusok szorzataként és 2×9 -es mátrixként is (minden elem alá a képét írva).
- 3. feladat (8 pont):** Adjon meg egy nemtriviális $S_4 \rightarrow Q$ homomorfizmust.
- 4. feladat (6 pont):** Számítsa ki az $\alpha^2 - 1$ elem multiplikatív inverzét a $\mathbb{Z}_5(\alpha)$ testben, ahol α gyöke az $x^4 + 3 \in \mathbb{Z}_5[x]$ irreducibilis polinomnak. (A végeredményt $a\alpha^3 + b\alpha^2 + c\alpha + d$ ($a, b, c, d \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$) alakban kell megadni.)
- 5. feladat (6 pont):** Hajtson végre főtengeley-transzformációt a $3x_1^2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 3x_3^2$ kvadratikus alakon, azaz ortogonális helyettesítéssel hozza őt kanonikus alakra.
- 6. feladat (8 pont):** Egy valós négyzetes mátrix (legalább elsőfokú) invariáns faktorai a következők:

$$x, x^2, x^4 + 2x^2.$$

Adja meg a mátrix karakterisztikus polinomját, minimálpolinomját és Jordan-normálalakját a valós és a komplex számtest felett.

- 7. feladat (10 pont):** Igazak-e a következő állítások? Röviden indokolja is a választ.

- (a) Tetszőleges G csoport és $x, y \in G$ esetén $x^2 = y^2 \implies x = y$.
- (b) Az S_4 csoportban pontosan 6 másodrendű elem van.
- (c) Minden páros permutáció rendje páros.
- (d) A $\mathbb{Z}_3[x]/(x^2 + x + 1)$ gyűrűben vannak zérusosztók.
- (e) Az $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ mátrix nem diagonalizálható (azaz nem hasonló diagonális mátrixhoz).