ABSZTRAKT ALGEBRA GYAKORLÓ FELADATOK

2017 tavaszi félév, levelező tagozat

(a csillaggal jelölt feladatok az Alkalmazott algebra kurzus anyagában nem szerepelnek)

1. feladat Vizsgálja meg, hogy grupoidot, félcsoportot, monoidot, csoportot alkotnak-e az alábbi halmazok az összeadás, illetve a szorzás műveletével.

(1) $\left\{\frac{a}{2^k} : a \in \mathbb{Z},\ k \in \mathbb{N}_0\right\}$ (2) $\left\{\frac{a}{2^k} : a \in \mathbb{N}_0,\ k \in \mathbb{N}_0\right\}$ (3) $\{\varepsilon \in \mathbb{C} \mid \exists n \in \mathbb{N} : z^n = 1\}$

(4) $\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right] = \left\{a + b\sqrt{2} \colon a, b \in \mathbb{Z}\right\}$ (5) $\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right] \setminus \{0\}$ (6) $\left\{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \colon A^T = A\right\}$

(7) $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right) = \left\{a + b\sqrt{2} \colon a, b \in \mathbb{Q}\right\}$ (8) $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right) \setminus \{0\}$ (9) $\mathbb{R}^-$

(10) $\mathbb{Z}_{100}$ (11) $\mathbb{Z}_{100} \setminus \{0\}$ (12) $\mathbb{Z}_{100}^*$

(13) $\mathbb{Z}_{101}$ (14) $\mathbb{Z}_{101} \setminus \{0\}$ (15) $\mathbb{Z}_{101}^*$

2. feladat Vizsgálja meg, hogy grupoidot, félcsoportot, monoidot, csoportot, Abel-csoportot alkot-e az A halmaz a $*$ művelettel.

(1) $A = \mathbb{R},\quad x * y = x + y + 23$

(2) $A = \mathbb{Z},\quad x * y = x - y$

(3) $A = \mathbb{Q},\quad x * y = x + 2y - 3$

(4) $A = \mathcal{P}(\emptyset),\quad x * y = x\Delta y$

(5) $A = \mathbb{Z},\quad x * y = y + 2$

(6) $A = \mathcal{P}(\{1, 2\}),\quad x * y = x \cup y$

(7) $A = \mathbb{Z},\quad x * y = \begin{cases} x + y, & \text{ha } x \text{ páros;} \\ x - y, & \text{ha } x \text{ páratlan.} \end{cases}$

(8) $A = \mathbb{R},\quad x * y = -9x - 9y + 5xy + 18.$

3. feladat Számítsa ki D_{15}-ben az alábbi elemeket. A végeredményt f^k vagy tf^k $(k = 0, \ldots, 14)$ alakban adja meg. (A jelölések ugyanazok, mint az előadáson.)

(1) $f^{12} \cdot tf^7, \left(tf^6\right)^{-2013}$ (2) $tf^7 \cdot f^{12}, \left(tf^6\right)^{2013}$

(3) $tf^8 \cdot tf^{10}, f^{-2013}$ (4) $tf^{10} \cdot tf^8, f^{2013}$

4. feladat Oldja meg a D_{15} csoportban az alábbi egyenleteket. A végeredményt f^k vagy tf^k $(k = 0, \ldots, 14)$ alakban adja meg. (A jelölések ugyanazok, mint az előadáson.)

(1) $x \cdot tf^3 = f,$ (2) $f^4t \cdot x = tf^9,$ (3) $tf^7 \cdot x \cdot f^2t = f^{23}t.$

5. feladat Számítsa ki S_9-ben az alábbi permutációkat. A végeredményt adja meg idegen ciklusok szorzataként és 2×9-es mátrixként is (minden elem alá a képét írva).

$$(1356)\,(2463)\,(342)\,,\ (4732)^{-1}\,(15423)\,,\ \pi\rho,\ \rho^2\pi,\ ((123)\,\pi)^{-1}\,,\ (123)^{-1}\,\pi^{-1},\ \pi^2,\ \pi^3,\ \pi^4,\ \pi^5,\ \pi^{123},$$

ahol

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 4 & 5 & 9 & 8 & 1 & 6 & 2 & 7 \end{pmatrix}, \qquad \rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 3 & 8 & 1 & 6 & 9 & 7 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

6. feladat Oldja meg az S_9 csoportban az alábbi egyenleteket. A végeredményt adja meg idegen ciklusok szorzataként és 2×9-es mátrixként is (minden elem alá a képét írva).

(1) $x\cdot(134)\,(246) = (12)\,,$ (2) $(234)^{-1}\cdot x = (1452)\,(359)\,,$ (3) $(25)\,(234)\cdot x\cdot(678)\,(789) = (4276)\,(934)\,.$

7. feladat Határozza meg a G csoportban a B részhalmaz által generált részcsoportot.

(1) $G = \mathbb{Q}$, $B = \left\{\frac{2}{3}, \frac{3}{2}\right\}$

(2) $G = \mathbb{Q}^*$, $B = \left\{\frac{2}{3}, \frac{3}{2}\right\}$

(3) $G = \mathbb{C}$, $B = \left\{1, \sqrt{2}\right\}$

(4) $G = \mathbb{C}^*$, $B = \left\{-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right\}$

(5) $G = \mathbb{Z}$, $B = \{30, 42, 105\}$

(6) $G = \mathbb{Z}_{30}$, $B = \left\{\overline{6}, \overline{10}\right\}$

(7) $G = \mathbb{Z}_8$, $B = \left\{\overline{5}\right\}$

(8) $G = \mathbb{Z}_8^*$, $B = \left\{\overline{5}\right\}$

(9) $G = D_{12}$, $B = \{f^3, tf^2\}$

(10) $G = D_{12}$, $B = \{f^5, tf^2\}$

(11) $G = D_{12}$, $B = \{f^5\}$

(12) $G = S_4$, $B = \{(1234), (13)\}$

8. feladat Határozza meg az $a \in G$ elem rendjét, illetve az $[a] \leq G$ részcsoportot.

(1) $a = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$, $G = \mathbb{C}^*$

(2) $a = \overline{9}$, $G = \mathbb{Z}_{12}$

(3) $a = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$, $G = \mathbb{C}^*$

(4) $a = \overline{10}$, $G = \mathbb{Z}_{12}$

(5) $a = \sqrt{3} - i$, $G = \mathbb{C}^*$

(6) $a = \overline{11}$, $G = \mathbb{Z}_{12}$

(7) $a = \cos\frac{10\pi}{7} + i\sin\frac{10\pi}{7}$, $G = \mathbb{C}^*$

(8) $a = \overline{2}$, $G = \mathbb{Z}_5^*$

(9) $a = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $G = \mathbb{C}^*$

(10) $a = \overline{2}$, $G = \mathbb{Z}_7^*$

(11) $a = (123)(234)$, $G = S_9$

(12) $a = \overline{2}$, $G = \mathbb{Z}_{31}^*$

(13) $a = (12)(427)$, $G = S_9$

(14) $a = f^9$, $G = D_{24}$

(15) $a = (342)(25763)(37)$, $G = S_9$

(16) $a = tf^9$, $G = D_{24}$

(17) $a = (123)(456789)$, $G = S_9$

(18) $a = tf^9t$, $G = D_{24}$

9. feladat Hány másodrendű elem van az alábbi csoportokban? És hány hatodrendű elem van?

(1) $\mathbb{C}$, (2) $\mathbb{C}^*$, (3) $\mathbb{Z}_{10}$, (4) $\mathbb{Z}_{10}^*$, (5) $\mathbb{Z}_{12}$, (6) $\mathbb{Z}_{12}^*$, (7) S_6, (8) D_{10}, (9) D_{11}

10. feladat Határozza meg a $H \leq G$ részcsoporthoz tartozó bal-, illetve jobboldali mellékosztályokat.

(1) $G = \mathbb{Z}_{12}$, $H = \left[\overline{3}\right]$

(2) $G = \mathbb{Z}_{12}$, $H = \left[\overline{4}\right]$

(3) $G = \mathbb{Z}_{21}^*$, $H = \left\{\overline{1}, \overline{8}, \overline{13}, \overline{20}\right\}$

(4) $G = \mathbb{Z}_{21}^*$, $H = \left[\overline{4}\right]$

(5) $G = \mathbb{C}$, $H = \mathbb{R}$

(6) $G = \mathbb{R}^*$, $H = \mathbb{R}^+$

(7) $G = D_4$, $H = [f^2]$

(8) $G = D_4$, $H = [tf^2]$

(9) $G = D_4$, $H = [f^2, tf]$

(10) $G = S_4$, $H = [(1234), (13)]$

11. feladat Döntse el a 10. feladatbeli $H \leq G$ részcsoportokról, hogy normálosztók-e a G csoportban. Ha igen, akkor határozza meg a G/H faktorcsoportot (írja fel a művelettáblázatát és/vagy állapítsa meg, hogy melyik ismert csoporttal izomorf a faktorcsoport). Ha H nem normálosztó, akkor számítsa ki az általa generált N normálosztót, és határozza meg a G/N faktorcsoportot.

12. feladat Számítsa ki az alábbi csoportokban az egyes elemek generátumait (azaz a ciklikus részcsoportokat), majd határozza meg az összes részcsoportot, végül rajzolja fel a részcsoportháló Hasse-diagramját.

$$(1)\ \ \mathbb{Z}_{18},\quad (2)\ \ \mathbb{Z}_{42},\quad (3)\ \ \mathbb{Z}_{15}^*,\quad (4)\ \ \mathbb{Z}_{49}^*,\quad (5)\ \ \mathbb{Z}_{54}^*,\quad (6)\ \ D_3,\quad (7)\ \ S_3,\quad (8)\ \ V,\quad (9)\ \ Q$$

13. feladat Határozza meg az alábbi csoportokban a konjugáltosztályokat. Ennek segítségével keresse meg az összes normálosztójukat, majd rajzolja fel a normálosztóhálót.

$$(1)\ \ D_6,\quad (2)\ \ D_7,\quad (3)\ \ Q$$

14. feladat Homomorfizmusok-e az alábbi leképezések? Amelyik igen, annak határozza meg a magját és az értékkészletét, majd írja fel a homomorfiatételből adódó izomorfizmust a mag szerinti faktorcsoport és a homomorf kép között.

$$\begin{array}{llll}
(1)\ \ \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}^*, & z \mapsto |z| & (2)\ \ \mathbb{Z}_{12} \to D_8, & \overline{k} \mapsto t^k \\
(3)\ \ \mathbb{C} \to \mathbb{R}, & z \mapsto \operatorname{Im} z & (4)\ \ \mathbb{Z}_{12} \to D_8, & \overline{k} \mapsto f^{6k} \\
(5)\ \ \mathbb{Z}_{10} \to \mathbb{Z}_{10}, & \overline{k} \mapsto \overline{k+2} & (6)\ \ Q \to Q, & x \mapsto x^2 \\
(7)\ \ \mathbb{Z}_{10} \to \mathbb{Z}_{15}, & \overline{k} \mapsto \widehat{6k} & (8)\ \ \mathbb{Z}_{20}^* \to \mathbb{Z}_{20}^*, & x \mapsto x^2
\end{array}$$

15. feladat Létezik-e injektív/szürjektív/nemtriviális homomorfizmus a megadott csoportok között? (Ha van, akkor adjon is meg egyet, ha nincs, akkor igazolja, hogy nincs.)

$$(1)\ \ \mathbb{Z}_4 \to Q,\quad (2)\ \ \mathbb{Z}_9 \to D_6,\quad (3)\ \ D_4 \to S_4,\quad (4)\ \ \mathbb{Z}_9 \to Q,\quad (5)\ \ D_4 \to V,\quad (6)\ \ Q \to D_6$$

16. feladat Írja fel az alábbi csoportok Cayley-féle ábrázolását. A csoport minden g elemére adja meg a ρ_g permutációt mátrixos formában és idegen ciklusok szorzataként is.

$$(1)\ \ V,\quad (2)\ \ \mathbb{Z}_5,\quad (3)\ \ D_3,\quad (4)\ \ \mathbb{Z}_5^*$$

17. feladat Határozza meg az alábbi S_9-beli permutációk paritását:

$$a = (143)\,(79)\,(86)\,,\quad b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 6 & 4 & 2 & 9 & 5 & 1 & 7 & 8 \end{pmatrix},\quad c = (25)\,(38)\,(167)\,(49)\,,$$

$$d = a^{2013},\quad e = b^{2014},\quad f = c^{2013}.$$

18. feladat* Sorolja fel (izomorfia erejéig) az összes 896, 897, 898, 899 és 900 n-elemű Abel-csoportot.

19. feladat* Melyek izomorfak egymással az alábbi csoportok közül?

$$\mathbb{Z}_{300},\quad \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_{15},\quad \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{75},\quad \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{10},\quad \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_{60},\quad \mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_{30},$$

$$\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{75},\quad \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_{20},\quad \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{25},\quad \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_{30}$$

20. feladat Melyek testek az alábbi faktorgyűrűk közül?

$$\begin{array}{lll}
(1)\ \mathbb{Z}_2[x]\,/\,(x^3+x^2+1)\,, & (2)\ \mathbb{Q}[x]\,/\,(x^4+4x^2+4)\,, & (3)\ \mathbb{Q}[x]\,/\,(x^4+x^3-3x^2+2x-1)\,, \\
(4)\ \mathbb{R}[x]\,/\,(x^2-3x+2)\,, & (5)\ \mathbb{Z}_3[x]\,/\,(x^3+x^2+1)\,, & (6)\ \mathbb{Q}[x]\,/\,(x^4+4x^2+6)\,, \\
(7)\ \mathbb{Q}[x]\,/\,(x^3+4x^2+5x+2)\,, & (8)\ \mathbb{R}[x]\,/\,(x^2+3x-2)\,, & (9)\ \mathbb{Z}_5[x]\,/\,(x^3+x^2+1)\,, \\
(10)\ \mathbb{R}[x]\,/\,(x^4+4x^2+6)\,, & (11)\ \mathbb{R}[x]\,/\,(x^3+4x^2+5x+2)\,, & (12)\ \mathbb{C}[x]\,/\,(x^2+x+2)
\end{array}$$

21. feladat Hány eleműek az alábbi testek?

$$\mathbb{Z}_2\left[x\right] / \left(x^7+x^4+1\right), \quad \mathbb{Z}_3\left[x\right] / \left(x^4+2x+2\right), \quad \mathbb{Z}_5\left[x\right] / \left(x^2+x+2\right), \quad \mathbb{Z}_7\left[x\right] / \left(x^3+2\right)$$

22. feladat Határozza meg a $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ és a $\sqrt[3]{5+\sqrt{3}}$ számok minimálpolinomját a racionális számok teste felett.

23. feladat Számítsa ki az alábbi számok reciprokát a $\mathbb{Q}\left(\sqrt[3]{2}\right)$ testben. (A végeredményt $a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}$ $(a,b,c\in\mathbb{Q})$ alakban kell megadni.)

$$(1)\ \ 1-2\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4} \qquad (2)\ \ 4+3\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}$$

24. feladat Számítsa ki az alábbi számok reciprokát a $\mathbb{Q}\left(\alpha\right)$ testben, ahol α gyöke az x^3-x+1 polinomnak. (A végeredményt $a\alpha^2+b\alpha+c$ $(a,b,c\in\mathbb{Q})$ alakban kell megadni.)

$$(1)\ \ \alpha^2-\alpha-3 \qquad (2)\ \ \alpha^2+\alpha-1$$

25. feladat Számítsa ki az alábbi elemek multiplikatív inverzét a $\mathbb{Z}_5\left(\alpha\right)$ testben, ahol α gyöke az $x^4+3\in\mathbb{Z}_5\left[x\right]$ polinomnak. (A végeredményt $a\alpha^3+b\alpha^2+c\alpha+d$ $(a,b,c,d\in\{0,1,2,3,4\})$ alakban kell megadni.)

$$(1)\ \ \alpha^2-1 \qquad (2)\ \ \alpha^3+\alpha^2-2\alpha+1$$

26. feladat Határozza meg az alábbi testbővítések fokszámát.

$$(1)\ \ \left[\mathbb{R}\left(1+\sqrt[3]{2}\right):\mathbb{R}\right] \qquad (2)\ \ \left[\mathbb{R}\left(1+i\sqrt[3]{2}\right):\mathbb{R}\right] \qquad (3)\ \ \left[\mathbb{R}\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}+\tfrac{1}{\sqrt{2}}i\right):\mathbb{R}\right]$$

$$(4)\ \ \left[\mathbb{Q}\left(1+\sqrt[3]{2}\right):\mathbb{Q}\right] \qquad (5)\ \ \left[\mathbb{Q}\left(1+i\sqrt[3]{2}\right):\mathbb{Q}\right] \qquad (6)\ \ \left[\mathbb{Q}\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}+\tfrac{1}{\sqrt{2}}i\right):\mathbb{Q}\right]$$

27. feladat Igazak-e az alábbi állítások? (Indokolja is a választ!)

1. Tetszőleges G csoport és $a,b,x,y\in G$ esetén $axb=ayb \implies x=y$.
2. Tetszőleges G csoport és $a,b,x,y\in G$ esetén $abx=1 \implies x=a^{-1}b^{-1}$.
3. Tetszőleges G csoport és $x,y\in G$ esetén $x^2=y^2 \implies x=y$.
4. Létezik 2017-elemű csoport.
5. Tetszőleges G csoport és $H,K\leq G$ részcsoportok esetén $H\triangle K\leq G$.
6. A $\mathbb{Z}$ csoportnak van 4-elemű részcsoportja.
7. Az S_4 csoportnak van 4-elemű részcsoportja.
8. Az S_5 csoportban pontosan tíz transzpozíció van.
9. Az S_3 csoportban minden permutáció ciklus vagy identitás.
10. Van olyan transzpozíció, aminek pontosan 3 fixpontja van.
11. Tetszőleges $\pi,\rho\in S_5$ permutációk esetén $(\pi\rho)^2=\pi^2\rho^2$.
12. Minden $\pi\in S_4$ permutációra $\pi^6=\mathrm{id}$ teljesül.
13. Minden három hosszúságú ciklus előállítható négy transzpozíció szorzataként.
14. Az S_4 csoportban pontosan 6 másodrendű elem van.
15. A D_{128} csoportban minden elem rendje páros.
16. Van olyan Abel-csoport, amely nem ciklikus.

17. Minden ciklikus csoport véges.

18. Léteznek D_6-ban olyan másodrendű elemek, amelyek szorzata harmadrendű.

19. A $\mathbb{Z}_{20}^*$ csoport minden 4-elemű részcsoportja ciklikus.

20. A $\mathbb{Z}_{36}$ ciklikus csoportnak 12 különböző generátoreleme van.

21. A $\mathbb{Z}_{26}^*$ csoport ciklikus.

22. A komplex egységgyökök multiplikatív csoportjának pontosan egy 6-elemű részcsoportja van.

23. A $\mathbb{Z}_{27}^*$ csoportnak van 4-elemű részcsoportja.

24. Ciklikus csoport minden részcsoportja normálosztó.

25. Ha egy csoport minden részcsoportja normálosztó, akkor a csoport ciklikus.

26. A Q csoport egyszerű.

27. Az S_3 csoportban ha két elemnek azonos a rendje, akkor konjugáltak.

28. A D_4 csoportban ha két elemnek azonos a rendje, akkor konjugáltak.

29. Ha $\varphi\colon G \to H$ homomorfizmus, és $g \in G$, akkor $g\varphi$ rendje nem lehet nagyobb, mint g rendje.

30. Ha $\varphi\colon G \to H$ homomorfizmus, és G kommutatív, akkor H is kommutatív.

31. Ha $\varphi\colon G \to H$ szürjektív homomorfizmus, és H kommutatív, akkor G is kommutatív.

32. Páratlan permutáció inverze is páratlan.

33. Minden páros rendű permutáció páros.

34. Minden páros permutáció rendje páros.

35. Legyen $\varphi\colon G \to S_G$ a G csoport Cayley-féle ábrázolása, és legyen $g \in G$. Ha $g\varphi$-nek van fixpontja, akkor g az egységelem.

36.* A Klein-csoport direkt felbontható.

37.* Minden $m, n \in \mathbb{N}$ esetén $\mathbb{Z}_{nm} \cong \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$.

38. Létezik olyan gyűrű, ami kommutatív és egységelemes, de nem integritástartomány.

39. Létezik olyan gyűrű, ami egységelemes, de nem kommutatív és nem zérusosztómentes.

40. Az egységek minden gyűrűben csoportot alkotnak az összeadás műveletével.

41. Létezik olyan integritástartomány, amelyben végtelen sok egység van.

42. Létezik olyan integritástartomány, amelyben pontosan négy egység van.

43. A legfeljebb 5-ödfokú polinomok halmaza részgyűrű $\mathbb{Z}[x]$-ben.

44. A $\mathbb{Z}[i]$ gyűrűnek $\mathbb{Z}$ ideálja.

45. A $\mathbb{Z}_3[x]/(x^2+x+1)$ gyűrűben vannak zérusosztók.

46. Létezik 9-elemű test.

47. Létezik 10-elemű test.

48. A $\sqrt{\pi}$ szám algebrai.

49. Ha az $L \mid K$ testbővítés foka végtelen, akkor létezik olyan eleme L-nek, ami transzcendens K felett.

50. Ha az $L \mid K$ testbővítés foka véges, akkor L minden eleme transzcendens K felett.

51. Ha az $L \mid K$ testbővítés foka 3, akkor minden $\alpha \in L \setminus K$ elem harmadfokú K felett.

52. Ha az $L \mid K$ testbővítés foka 4, akkor minden $\alpha \in L \setminus K$ elem negyedfokú K felett.