Testek

175. feladat$^\circ$ Döntse el, hogy az alábbi faktorgyűrűk testek-e vagy sem.

$R_1 = \mathbb{Z}_2[x]/\langle x^2+1\rangle$ $\quad R_2 = \mathbb{Z}_2[x]/\langle x^3+x^2+1\rangle$ $\quad R_3 = \mathbb{Z}_2[x]/\langle x^4+x+1\rangle$ $\quad R_4 = \mathbb{Z}_2[x]/\langle x^4+x^2+1\rangle$

$R_5 = \mathbb{Z}_3[x]/\langle x^2+1\rangle$ $\quad R_6 = \mathbb{Z}_3[x]/\langle x^3+x^2+1\rangle$ $\quad R_7 = \mathbb{Z}_3[x]/\langle x^3-x^2+1\rangle$ $\quad R_8 = \mathbb{Z}_3[x]/\langle x^4+1\rangle$

$R_9 = \mathbb{Z}_5[x]/\langle x^2+2\rangle$ $\quad R_{10} = \mathbb{Z}_5[x]/\langle x^4+1\rangle$

Adja meg a megadott faktorgyűrű r elemét $\overline{g}$ alakban, ahol g fokszáma a lehető legkisebb a saját osztályában.

$$R_1 \ni r = \left(\overline{x+1}\right)^4 \qquad R_2 \ni r = \left(\overline{x^2+x}\right)^{-1} \qquad R_3 \ni r = \left(\overline{x^3+1}\cdot\overline{x^3+x+1}\right)^{-1}$$

$$R_5 \ni r = \left(\overline{x-1}\right)^{-3} \qquad R_7 \ni r = \left(\overline{x^2-1}\right)^{-1}\cdot\overline{x^2+x-1} \qquad R_9 \ni r = \left(\overline{-2x-2}\right)^{-1}$$

176. feladat$^\circ$ Állítsa elő a racionális számtest alábbi egyszerű algebrai bővítéseiben megadott elemek multiplikatív inverzét az adjungált elem „kis kitevős" hatványainak racionális együtthatós lineáris kombinációjaként.

(a) $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$; $\sqrt{3}$, $2+3\sqrt{3}$ $\qquad$ (b) $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$; $\sqrt[3]{16}$, $4+3\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}$ $\qquad$ (c) $\mathbb{Q}(i)$; i^2, $1+i$

177. feladat$^\circ$ Legyen u a $p \in K[x]$ n-edfokú irreducibilis polinom gyöke. Adja meg az alábbi $a \in K(u)$ elemeket az $1, u, u^2, \ldots, u^{n-1}$ elemek K-beli együtthatókkal képezett lineáris kombinációjaként.
(a) $K = \mathbb{Z}_2$, $p = x^2+x+1$; $(1+u)^{-1}$, $u^3(1+u)^{-1}$
(b) $K = \mathbb{Z}_3$, $p = x^2+1$; $(1+u)(1-u)^{-1}$, $(1+u)^{-2}$
(c) $K = \mathbb{Z}_5$, $p = x^3+x+1$; u^{-2}, $(u^2+u)^{-3}$

178. feladat$^\circ$ Keresse meg az $i\sqrt{5}$, $3-\sqrt{4}$, $4-\sqrt{3}$ és $i\sqrt{2-\sqrt{2}}$ számok minimálpolinomját $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, valamint $\mathbb{Q}$ fölött.

179. feladat$^\circ$ Igazak-e alábbi állítások? (Indokolja is a választ!)
(a) A $\mathbb{Z}_5[x]/\langle x^2+2\rangle$ test $\overline{x}$ elemének a minimálpolinomja x^2+2.
(b) A 27-elemű test additív csoportja ciklikus.
(c) A 27-elemű test karakterisztikája 3.

180. feladat Adjon meg olyan $g \in \mathbb{Z}_2[x]$ nemzérus polinomot, amelynek a $\mathbb{Z}_2[x]/\langle x^4+x+\overline{1}\rangle$ test alábbi eleme gyöke.

(a) $\overline{x+\overline{1}}$ $\qquad$ (b) $\overline{x^2+x}$ $\qquad$ (c) $\overline{x^2+\overline{1}}$

181. feladat Legyen $K = \mathbb{Z}_p(u)$, ahol u az $f \in \mathbb{Z}_p[x]$ irreducibilis polinom gyöke. Keresse meg a megadott K-beli elemek $\mathbb{Z}_p$ fölötti minimálpolinomját.

(a) $p=2$, $f = x^4+x+1$; u^2+u+1, u^3+u $\qquad$ (b) $p=3$, $f = x^4+x^2+x+1$; u^2+1, u^3-u+1

182. feladat Algebrai-e a megadott a szám a K test fölött (ismert, hogy π transzcendens szám)?

(a) $K = \mathbb{Q}$, $a = \sqrt{\sqrt[3]{5}+\sqrt[5]{2}+i\sqrt[4]{7}}$ $\qquad$ (b) $K = \mathbb{Q}$, $a = \pi^2+3\pi-1$ $\qquad$ (c) $K = \mathbb{Q}(\pi^2)$, $a = 2\pi$

183. feladat Hány n-edrendű elem van a K test multiplikatív csoportjában ($\mathrm{GF}(q)$ a q-elemű testet jelöli)?

(a) $n=3$, $K = \mathrm{GF}(9)$ $\qquad$ (b) $n=15$, $K = \mathrm{GF}(16)$ $\qquad$ (c) $n=11$, $K = \mathrm{GF}(23)$ $\qquad$ (d) $n=12$, $K = \mathbb{C}$

184. feladat Határozza meg a $\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}$ szám minimálpolinomját $\mathbb{Q}$ fölött.

185. feladat Legyen $a, b \in \mathbb{C}$ olyan, hogy b algebrai $\mathbb{Q}(a)$ fölött, de transzcendens $\mathbb{Q}$ fölött. Bizonyítsa be, hogy a algebrai $\mathbb{Q}(b)$ fölött.

186. feladat Döntse el, hogy van-e gyöke a $3x^2-2x-3 \in \mathbb{Z}_{11}[x]$ polinomnak a 121-elemű testben.

187. feladat Igazolja, hogy bármely 2-nél nagyobb elemszámú véges test elemeinek összege 0.

188. feladat Legyen α és β rendre az x^3+x^2+1 és $x^3+x+1 \in \mathbb{Z}_2[x]$ polinom egy-egy gyöke. Adjon meg egy izomorfizmust a $\mathbb{Z}_2(\alpha)$ és $\mathbb{Z}_2(\beta)$ testek között.

189. feladat Bizonyítsa be, hogy minden p^n-elemű testnek pontosan egy p^m-elemű részteste van n minden m osztójára.

190. feladat Bizonyítsa be, hogy a valós számok testének csak triviális automorfizmusa van.

ALKALMAZOTT ALGEBRA FELADATOK (2016 tavaszi félév)

Ismétlés

0. feladat$^\circ$ Adjunk meg olyan φ lineáris transzformációját a síknak, amelyre

(a) φ-nek 1-dimenziós a képtere; $\qquad$ (b) φ-nek nincsen sajátértéke; $\qquad$ (c) $\varphi+\varphi^2 = -\,\mathrm{id}$.

1. feladat$^\circ$ Legyen φ a sík $3x-4y=0$ egyenletű egyenesére való tengelyes tükrözés. Adjuk meg φ mátrixát a standard bázisban és egy másik bázisban is.

2. feladat$^\circ$ Legyen V a legfeljebb másodfokú valós polinomok vektortere, és legyen $\varphi\colon V \to V$, $f \mapsto f(x+1)-f(x)$. Ellenőrizzük, hogy φ lineáris transzformáció, és adjuk meg a magterét és a képterét.

3. feladat$^\circ$
(a) Adjunk meg valódi kétdimenziós alteret $\mathbb{R}^2$-ben.
(b) Soroljuk fel a $\mathbb{Z}_2^2$ vektortér összes alterét.
(c) Adjunk meg kételemű alteret a $\mathbb{Z}_3^2$ vektortérben.
(d) Adjunk meg $\mathbb{R}^3$-ben olyan lineárisan függő vektorrendszert, amelyben egyik vektor sem konstansszorosa valamely másik vektornak.
(e) Keressünk olyan háromelemű vektorrendszert $\mathbb{R}^3$-ben, amelynek egyik vektora sem áll elő a többi lineáris kombinációjaként.

4. feladat$^\circ$ Igazak-e alábbi állítások? (Indokoljuk is a válaszunkat!)
(a) Minden 3-dimenziós vektortérben megadható 4 lineárisan független vektor.
(b) Egész számokból álló nemelfajuló mátrix inverze is egész számokból áll.
(c) A $\mathbb{Z}_3^3$ vektortér $\{(1,2,1),(0,0,0)\}$ részhalmaza altér.
(d) Ha egy V vektortér valamelyik vektorának koordinátasora egy bázisban $(0,0,0)$, akkor bármely más bázisban is ez a koordinátasor.
(e) A síkon, azaz az $\mathbb{R}^2$ vektortéren az $(1,0)$ vektorral történő eltolás (vagyis a $v \mapsto v+(1,0)$ leképezés) lineáris leképezés.
(f) Bármely két, ugyanazon test feletti vektortér között megadható lineáris leképezés.
(g) Ha egy lineáris transzformáció mátrixa nemelfajuló, akkor a transzformáció injektív.
(h) Legyen φ az $\mathbb{R}^3$ vektortér lineáris transzformációja, és legyen A valós 3×3-as mátrix. Ekkor van olyan bázisa $\mathbb{R}^3$-nek, melyben φ mátrixa éppen A.
(i) Legyen e_1, e_2, e_3 a V valós vektortér bázisa, és legyen v, illetve w az a V-beli vektor, amelynek koordinátasora ebben a bázisban $(1,-1,0)$, illetve $(2,-2,0)$. Ekkor v és w lineárisan függetlenek.
(j) Bármely valós 3×3-as mátrixnak van valós sajátértéke.

5. feladat$^\circ$ Oldjuk meg a $9x \equiv 7 \pmod{1153}$ lineáris kongruenciát.

6. feladat$^\circ$ Oldjuk meg a $2x \equiv 3 \pmod 9$, $4x \equiv 6 \pmod{11}$, $3x \equiv 9 \pmod{13}$ lineáris kongruenciarendszert.

7. feladat$^\circ$ Határozzuk meg az $o_{11}(3)$ és $o_5(17)$ multiplikatív rendeket.

8. feladat$^\circ$ Adjunk meg primitív gyököt modulo $5, 6, 7, 8, 9, 10, 11$.

9. feladat$^\circ$ Határozzuk meg az $f = x^6+x^5+x^2+1, g = x^5+x^4+1 \in T[x]$ polinomok legnagyobb közös osztóját, és adjuk meg az $fu+gv = (f,g)$ egyenlet egy megoldását a $T = \mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}_2$ és $\mathbb{Z}_3$ testek felett.

10. feladat$^\circ$ Adjuk meg az $f_1 = x^3-3x^2+4x-12$, $f_2 = 2x^6+250$ és $f_3 = 2x^5-6x^4+18x^3-12x+30$ polinomok irreducibilis felbontását a $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ és $\mathbb{C}$ testek felett.

11. feladat$^\circ$ Adjuk meg az $f_1 = x^2+1$, $f_2 = x^3+x+1$ és $f_3 = x^4+x^2+1$ polinomok irreducibilis felbontását a $\mathbb{Z}_2$ és $\mathbb{Z}_3$ testek felett.

12. feladat Határozzuk meg a $\mathbb{Z}_3^5$ vektortér 3-dimenziós altereinek számát.

13. feladat Igazoljuk, hogy egy V vektortér φ lineáris transzformációja pontosan akkor idempotens (vagyis $\varphi^2 = \varphi$) ha $\mathrm{Im}\,\varphi \cap \mathrm{Ker}\,\varphi = \{\underline{0}\}$ és $v\varphi = v$ bármely $v \in \mathrm{Im}\,\varphi$ esetén.

14. feladat Legyen $n \geq 2$ természetes szám. Határozzuk meg az n-hez relatív prím, n-nél kisebb természetes számok összegét.

15. feladat Mutassuk meg, hogy ha $a \perp 100 = 1$, akkor $a^{20} \equiv 1 \pmod{100}$.

16. feladat Legyen n olyan természetes szám, amelyre teljesül, hogy bármely $a \perp n$ esetén $a^{n-1} \equiv 1 \pmod n$. Igazoljuk, hogy n négyzetmentes szám.

A csoport fogalma, nevezetes példák

17. feladat$^{\circ}$ Csoportot alkotnak-e az alábbi halmazok a megadott műveletre nézve?

(a) $(\mathbb{Z}_n;+)$ (b) $(\mathbb{Z}_n;\cdot)$ (c) $(\mathbb{Z}_n^*;+)$ (d) $(\mathbb{Z}_n^*;\cdot)$ (e) $(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q};+)$

(f) $(\mathbb{R}\setminus\{-1\};\circ)$, ahol $a\circ b=a+b+ab$ (g) $(\mathbb{R};\circ)$, ahol $x\circ y=x+2y$

(h) $(\{\varepsilon\in\mathbb{C}:\ \text{létezik olyan } n\in\mathbb{N},\ \text{amelyre } \varepsilon^n=1\};\cdot)$

(i) $(P(H);\cup)$, ahol H nemüres halmaz (j) $(P(H);\triangle)$, ahol H nemüres halmaz

(k) $G=(\{a,b,c,1,2,3\};\cdot)$, ahol a (jelen esetben asszociatív) szorzást az alábbi művelettáblázat adja meg:

$\cdot$	a	b	c	1	2	3
a	1	2	3	a	b	c
b	2	3	1	b	c	a
c	3	1	2	c	a	b
1	a	b	c	1	2	3
2	b	c	a	2	3	1
3	c	a	b	3	1	2

18. feladat$^{\circ}$ Az alábbi következtetések közül melyek érvényesek minden csoportban tetszőleges a,b,c,d,g,x,y elemekre? A helyes következtetéseket igazolja, a hamisakra adjon ellenpéldát.

(a) $axb=ayb \implies x=y$ (b) $axb=bya \implies x=y$ (c) $ax=1 \implies x=a^{-1}$

(d) $abx=1 \implies x=a^{-1}b^{-1}$ (e) $xab=c \implies x=cb^{-1}a^{-1}$ (f) $x^2=y^2 \implies x=y$

19. feladat$^{\circ}$ A D_n $(n\in\mathbb{N}, n\geq 3)$ n-edfokú diédercsoportban jelölje a a középpont körüli $\frac{2\pi}{n}$ szögű forgatást, t pedig az egyik tengelyes tükrözést.

(a) Vázolja fel D_n művelettáblázatát.

(b) Adja meg a következő elemeket $a^kt\,(0\leq k\leq n-1)$ alakban.

$$ta,\ ta^2,\ \dots,\ ta^{n-1},\ ta^{-2},\ (a^{-1}ta^{-1})^{2015},\ (ta^{-1}t)^{2n-3},\ (ata^3t^{-5}a^{-1})^{10n-50}$$

20. feladat$^{\circ}$ Adja meg a G csoport azon elemeit, amelyek előállnak az a elem pozitív egész kitevős hatványaiként, illetve egész kitevős hatványaiként.

(a) $G=(\mathbb{Z};+),\ a=1$ (b) $G=(\mathbb{Z};+),\ a=3$ (c) $G=(\mathcal{P}(\{1,2,3\};\triangle),\ a=\{1,2\}$

(d) $G=D_6$, a pedig a középpont körüli $\dfrac{\pi}{3}$ szöggel való forgatás (e) $G=(\mathrm{GL}(\mathbb{R},3),\cdot),\ a=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$

(f) $G=(\mathbb{Z}_{18}^*,\cdot),\ a=\overline{7}$ (g) $G=(\mathbb{Z}_{24}^*,\cdot),\ a=\overline{5}$

21. feladat Milyen $a,b,c\in\mathbb{R}$ paraméterek esetén lesz $(\mathbb{R};\circ)$ csoport, ahol $x\circ y=ax+by+c$?

22. feladat Tetszőleges R kommutatív egységelemes gyűrű esetén legyen $L_R=\{x\mapsto ax+b: a\in R^*, b\in R\}$ az R feletti bijektív „lineáris" függvények halmaza. Mutassa meg, hogy L_R csoportot alkot a leképezésszorzás műveletével.

23. feladat Egészítse ki az alábbi művelettáblázatot úgy, hogy csoport művelettáblázatát kapjuk.

$\cdot$	e	a	b	x	y	z
e	e					
a		b		y		
b		e				
x		z				
y						
z						

24. feladat Az alábbi következtetések közül melyek érvényesek minden csoportban tetszőleges a,b,c,x,y elemekre? A helyes következtetéseket igazolja, a hamisakra adjon ellenpéldát.

(a) $x^2=y^2,\ x^3=y^3 \implies x=y$ (b) $x^{120}=y^{120},\ x^{273}=y^{273} \implies x=y$

25. feladat Hány eleme van a $\mathrm{GL}(\mathbb{Z}_p,2)$ csoportnak?

26. feladat Adja meg olyan elemet a $\mathrm{GL}(\mathbb{R},2)$ csoportban, amelyben nem szerepel nulla, azonban csak véges sok különböző hatványa van.

27. feladat Hány eleme van a szabályos tetraéder mozgás-, illetve szimmetriacsoportjának?

28. feladat Hány eleme van a kocka mozgás-, illetve szimmetriacsoportjának?

29. feladat Írja le a kör mozgás-, illetve szimmetriacsoportját.

Jordan-normálalak

164. feladat$^{\circ}$ Legyen a $\varphi\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ lineáris transzformáció mátrixa a standard bázisban A. Adjon meg bázist a v vektort tartalmazó legszűkebb invariáns altérben, valamint számítsa ki a v vektor rendjét (a φ lineáris transzformációra vonatkozóan).

(a) $A=\begin{pmatrix}3&5&-1\\-1&-2&0\\0&0&-1\end{pmatrix}, v=(1,2,-1)$ (b) $A=\begin{pmatrix}-1&1&0\\1&0&1\\-1&2&1\end{pmatrix}, v=(1,1,0)$

(c) $A=\begin{pmatrix}-1&1&0\\1&0&1\\-1&1&1\end{pmatrix}, v=(0,1,1)$ (d) $A=\begin{pmatrix}3&5&3&-4\\-1&-2&-2&3\\0&0&1&3\\0&0&-1&1\end{pmatrix}, v=(1,2,0,-1)$

165. feladat$^{\circ}$ Határozza meg az összes olyan $\mathbb{Q}$ feletti Jordan-mátrixot, amely

(a) 4×4-es és minimálpolinomja $(x+1)^2$;

(b) 6×6-os és minimálpolinomja $(x+2)^2(x-1)$;

(c) 7×7-es és minimálpolinomja $(x+1)^2(x-3)$;

(d) 6×6-os és karakterisztikus polinomja $(x^4-1)(x^2-1)$.

166. feladat$^{\circ}$ Határozza meg az alábbi mátrixok $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ és $\mathbb{C}$ feletti Jordan-normálalakját.

$$A=\begin{pmatrix}0&1\\2&0\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}0&1\\-4&-2\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}0&1&0\\-4&4&0\\-2&1&2\end{pmatrix}\quad D=\begin{pmatrix}-2&-1&1\\0&-1&0\\-1&-1&0\end{pmatrix}$$

$$E=\begin{pmatrix}-2&1&0\\-6&4&-3\\-3&2&-2\end{pmatrix}\quad F=\begin{pmatrix}-5&4&0\\-6&5&0\\-2&2&-1\end{pmatrix}\quad G=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$$

167. feladat$^{\circ}$ Lehetnek-e egy valós mátrix invariáns faktorai a következők? Ha igen, adja meg a mátrix Jordan-normálalakját.

(a) $1,1,1,(x-2)^2,(x-1)(x^2+x+1)$ (b) $1,1,(x-2),(x-2)(x-1)$ (c) $1,1,(x-1),(x-1)(x^2+2x-2)$

(d) $1,(x-3),(x-3)^3,(x-3)^3(x^2+x+1)$ (e) $1,1,1,1,(x-\sqrt{2}),(x-\sqrt{2})^2,(x-\sqrt{2})^2(x^2-x+10)$

168. feladat$^{\circ}$ Igazak-e alábbi állítások? (Indokolja is a választ!)

(a) Ha egy mátrix minimálpolinomja x^3, akkor determinánsa 0.

(b) Ha egy mátrix minimálpolinomja x^3-1, akkor sajátértéke az 1.

(c) Ha egy mátrixnak invariáns faktora az $(x-1)^3$ polinom, akkor nem diagonalizálható semilyen test felett sem.

(d) Ha egy mátrixnak elemi osztója az x^2 polinom, akkor nem diagonalizálható semilyen test felett sem.

(e) A $\begin{pmatrix}1&1&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ mátrix Jordan-normálalakú $\mathbb{Q}$ felett.

(f) Bármely komplex mátrix Jordan-normálalakjában csak a főátlóban, illetve közvetlenül a főátló felett lehetnek nullától különböző elemek.

(g) Racionális mátrix Jordan-normálalakjában a főátlótól tetszőlegesen messze lehetnek nullától különböző elemek.

169. feladat Adjon meg olyan $\varphi\colon\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ lineáris transzformációt (határozza meg mátrixát a standard bázisban), amelyre a $v=(1,-1,1,0)$ vektort tartalmazó legszűkebb invariáns altér 3-dimenziós.

170. feladat Igazolja, hogy minden négyzetes mátrix hasonló a transzponáltjához.

171. feladat Lássa be, hogy tetszőleges $A,B\in\mathbb{Q}^{n\times n}$ mátrixokra ekvivalens az alábbi két feltétel.

(a) Létezik olyan $Q\in\mathbb{Q}$ mátrix, amelyre $Q^{-1}AQ=B$.

(b) Létezik olyan $C\in\mathbb{C}$ mátrix, amelyre $C^{-1}AC=B$.

172. feladat Legyen K tetszőleges test és $A\in K^{n\times n}$ pedig olyan mátrix, amelyre

(a) $A^2=A$;

(b) $A^2=E$.

Határozza meg A Jordan-normálalakját. Ez alapján adja meg az A-hoz tartozó lineáris transzformációk „geometriai" jelentését.

173. feladat Legyen K tetszőleges test és $A\in K^{n\times n}$ pedig olyan mátrix, amelynek valamely hatványa a nullmátrix.

(a) Igazolja, hogy ekkor $A^n=0$.

(b) Határozza meg A Jordan-normálalakját.

174. feladat Mutassa meg, hogy ha az $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ mátrix valamely hatványa az egységmátrix, akkor A hasonló egy diagonális mátrixhoz, melynek főátlójában egységgyökök állnak.

Gyűrűk

145. feladat$^{\circ}$ Mutassa meg, hogy tetszőleges A halmaz esetén $(P(A); \triangle, \cap)$ gyűrű.

146. feladat$^{\circ}$ Igazolja, hogy tetszőleges A Abel-csoport esetén A endomorfizmusainak (azaz önmagába menő homomorfizmusainak) halmaza gyűrűt alkot a szokásos leképezésszorzásra és a pontonkénti összeadásra nézve: $a(\varphi+\psi) = a\varphi + a\psi$. Ez az A Abel-csoport *endomorfizmusgyűrűje*.

147. feladat$^{\circ}$ Döntse el, hogy a megadott R gyűrűben az I halmaz részgyűrűt, illetve ideált alkot-e. Ha ideált alkot, akkor vizsgálja meg, hogy az ideál főideál-e, valamint adja meg az R/I faktorgyűrű elemeit és műveleteit (művelettáblázattal vagy más módon).

(a) $R = \mathbb{Z},\ I$ a páratlan egész számok halmaza
(b) $R = \mathbb{Z},\ I$ a pozitív egész számok halmaza
(c) $R = \mathbb{Z}[i],\ I = \mathbb{Z}$
(d) $R = \mathbb{Z}[i],\ I = \{a + bi : a, b \in 2\mathbb{Z}\}$
(e) $R = \mathbb{Z}[x],\ I = \{f \in \mathbb{Z}[x] : f(1) = 0\}$
(f) $R = \mathbb{Z}[x],\ I = \{f \in \mathbb{Z}[x] : f(0) = 1\}$
(g) $R = \mathbb{Z}[x],\ I = \{f \in \mathbb{Z}[x] : 2 \mid f(0)\}$
(h) $R = \mathbb{Z}[x],\ I = \{f \in \mathbb{Z}[x] : f(0) \neq 1\}$

148. feladat$^{\circ}$ Döntse el az alábbi leképezésekről, hogy gyűrűhomomorfizmusok-e. Ha igen, határozza meg a magjukat, és fogalmazza meg, mi adódik a homomorfiatétel alkalmazásával.

(a) $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, k \mapsto 4k$
(b) $\mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_2, \overline{k} \mapsto \overline{k}$
(c) $\mathbb{Q}[x] \to \mathbb{Q}, f \mapsto f(0)$
(d) $\mathbb{Z}[x] \to \mathbb{Z}_n, f \mapsto \overline{f(1)}$
(e) $\mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}, M \mapsto \det(M)$

149. feladat Mutassa meg, hogy az alábbi gyűrűk nem izomorfak egymással.

(a) $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ és $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ (b) $\mathbb{R}$ és $\mathbb{C}$

150. feladat Bizonyítsa be az alábbi izomorfiákat.

(a) $\mathbb{Z}_n / \langle \overline{d} \rangle \cong \mathbb{Z}_d$, ahol $d \mid n$ (b) $\mathbb{Z}[x] / \langle n \rangle \cong \mathbb{Z}_n[x]$ (c) $\mathbb{R}[x, y] / \langle x - y \rangle \cong \mathbb{R}[x]$

151. feladat$^{\circ}$ Igazak-e alábbi állítások? (Indokolja is a választ!)
(a) Zérógyűrű minden, az összeadásra és kivonásra nézve zárt nemüres részhalmaza ideál.
(b) A legfeljebb 5-ödfokú polinomok halmaza részgyűrű $\mathbb{Z}[x]$-ben.
(c) A $\mathbb{Z}[i]$ gyűrűnek $\mathbb{Z}$ ideálja.
(d) Ha $\varphi \colon R \to T$ homomorfizmus az R és T gyűrűk között, akkor $\operatorname{Im}\varphi$ ideál T-ben.
(e) Bármely $\varphi \colon \mathbb{Z} \to R$ homomorfizmust egyértelműen meghatározza 1φ.

152. feladat Megadható-e a $\mathbb{Z}$ gyűrűben olyan részhalmaz, amely zárt az összeadásra és a kivonásra, de a szorzásra nem?

153. feladat Határozza meg a $\mathbb{Z}[x]$ gyűrűben
(a) az $x - 1$ polinom által generált részgyűrűt
(b) az x és $x - 1$ polinom által generált részgyűrűt;
(c) az $x - 1$ polinom által generált ideált (azaz a legszűkebb olyan ideált, amely tartalmazza $(x - 1)$-et).

154. feladat Adjon meg két különböző valódi nemtriviális bal-, illetve jobbideált az $\mathbb{R}^{2\times 2}$ gyűrűben.

155. feladat Egy $(R; +, \cdot)$ egységelemes gyűrű alaphalmazán definiáljuk a következő műveleteket: $a \oplus b = a + b - 1$ és $a \circ b = a + b - ab$ $(a, b \in R)$. Bizonyítsa be, hogy $(R; \oplus, \circ)$ is gyűrű, és izomorf az $(R; +, \cdot)$ gyűrűvel.

156. feladat Legyen A az R (nem feltétlenül kommutatív, nem feltétlenül egységelemes) gyűrű tetszőleges részhalmaza. Hogyan „néznek ki" az A halmaz által generált ideál (azaz az A-t tartalmazó legszűkebb ideál) elemei?

157. feladat Adjon meg olyan R gyűrűt és abban olyan nemtriviális S részgyűrűt, ahol R és S is egységelemes, de ez a két egységelem különböző.

158. feladat Milyen „ismert" gyűrűvel izomorf a $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_n$, illetve $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ csoportok endomorfizmusgyűrűje?

159. feladat Tetszőleges p prímszám esetén igazolja, hogy
(a) bármely két p-elemű zérógyűrű izomorf egymással, és
(b) minden p-elemű gyűrű vagy zérógyűrű, vagy izomorf $\mathbb{Z}_p$-vel.

160. feladat Legyen R olyan végtelen gyűrű, amelynek additív csoportja ciklikus. Igazolja, hogy ha R nem zérógyűrű, akkor R a $d\mathbb{Z}$ $(d \in \mathbb{N})$ gyűrűk közül pontosan eggyel izomorf.

161. feladat Legyen R az $n \times n$-es felső trianguláris valós mátrixok halmaza, T pedig az alsó triangulárisoké.
(a) Bizonyítsa be, hogy R és T részgyűrűje $\mathbb{R}^{n\times n}$-nek, és ez a két részgyűrű anti-izomorf egymással, azaz létezik olyan $\varphi \colon R \to T$ bijekció, amelyre bármely $A, B \in R$ esetén $(A + B)\varphi = A\varphi + B\varphi$, valamint $(AB)\varphi = B\varphi \cdot A\varphi$.
(b) Izomorf-e R és T?

162. feladat Izomorf-e egymással a $\mathbb{Q}[x]/\langle x^2 - 1\rangle$, $\mathbb{Q}[x]/\langle x^2 - 2\rangle$, illetve $\mathbb{Q}[x]/\langle x^2 - 4\rangle$ gyűrű?

163. feladat Igazolja, hogy tetszőleges p prímszám esetén a ${\mathbb{Z}_p}^{\mathbb{Z}_p}$ gyűrű (azaz az összes $\mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p$ leképezésből álló halmaz a pontonkénti összeadással és szorzással) izomorf a $\mathbb{Z}_p[x]$ polinomgyűrű valamely faktorgyűrűjével.

30. feladat Tekintsük a következő négyelemű csoportokat: $(\mathbb{Z}_4; +)$, $(\mathbb{Z}_5^*; \cdot)$,$(\mathbb{Z}_8^*; \cdot)$, $\left(\mathbb{Z}_2^2; +\right)$, $(E_4; \cdot)$, $(\mathcal{P}(\{1, 2\}); \triangle)$, $(\mathrm{Sym}(\mathtt{H}); \circ)$, ahol E_4 a negyedik komplex egységgyökök halmaza, $\mathrm{Sym}(\mathtt{H})$ pedig a $\mathtt{H}$ betű szimmetriacsoportja. Írja fel a művelettáblázataikat, és döntse el, hogy melyek izomorfak egymással (azaz mikor lehet két csoport elemeit alkalmas módon a, b, c, d betűkkel jelölni úgy, hogy a két művelettáblázat egyforma legyen).

31. feladat Mutassa meg, hogy a $Q = \{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\}$ halmazon egyetlen olyan asszociatív szorzás létezik, amelyre teljesülnek a következők:
- az $\{1, -1, i, -i\}$ részhalmazban ugyanúgy szorzunk, mintha a felsorolt elemek komplex számok lennének;
- az $\{1, -1, j, -j\}$ és $\{1, -1, k, -k\}$ részhalmazban ugyanígy számolunk, csak i helyett j-vel és k-val;
- $ij = k, jk = i, ki = j$.

Igazolja, hogy Q csoportot alkot erre a szorzásra nézve (ezt a csoportot *kvaterniócsoportnak* nevezik).

Permutációk

32. feladat$^{\circ}$ Számítsa ki S_9-ben az alábbi permutációkat. A végeredményt adja meg idegen ciklusok szorzataként és kétsoros alakban is (minden elem alá a képét írva).

$$(1356)(2463)(342),\ (4732)^{-1}(15423),\ \pi\rho,\ \rho^2\pi,\ ((123)\pi)^{-1},\ (123)^{-1}\pi^{-1},\ \pi^2,\ \pi^3,\ \pi^4,\ \pi^5,\ \pi^{123},$$

ahol

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 4 & 5 & 9 & 8 & 1 & 6 & 2 & 7 \end{pmatrix}, \qquad \rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 3 & 8 & 1 & 6 & 9 & 7 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

33. feladat$^{\circ}$ Határozza meg a fenti permutációk paritását.

34. feladat$^{\circ}$ Oldja meg az S_9 csoportban az alábbi egyenleteket. A végeredményt adja meg idegen ciklusok szorzataként és kétsoros alakban is.

(a) $x \cdot (134)(246) = (12)$ (b) $(234)^{-1} \cdot x = (1452)(359)$ (c) $(25)(234) \cdot x \cdot (678)(789) = (4276)(934)$

35. feladat Milyen lehet a szerkezete szerkezete egy 2 és egy $n > 2$ hosszúságú ciklus szorzatának (ebben, illetve a fordított sorrendben)?

36. feladat Oldja meg S_6-ban az alábbi egyenleteket.

(a) $\pi^2 = (1\ 2)$ (b) $\pi^2 = (1\ 2\ 3)$ (c) $\pi^2 = (1\ 2\ 3\ 4\ 5)$ (d) $\pi^2 = (1\ 2\ 3)(4\ 5\ 6)$

37. feladat A páronként idegen ciklusokra bontott alak segítségével adjon meg szükséges és elegendő feltételt arra, hogy egy permutáció előálljon valamely permutáció négyzeteként (azaz második hatványaként).

38. feladat Milyen a ciklusszerkezete – azaz a páronként idegen ciklusokra bontott alakjában milyen hosszúságú ciklusok szerepelnek, és melyikből mennyi – egy n hosszúságú ciklus k-adik hatványának?

39. feladat Igazolja, hogy bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén

(a) $\forall \pi \in S_n\ \exists k \in \mathbb{N} : \pi^k = \mathrm{id}$; (b) $\exists k \in \mathbb{N}\ \forall \pi \in S_n : \pi^k = \mathrm{id}$ (melyik a legkisebb ilyen k?).

40. feladat Bizonyítsa be, hogy S_n minden permutációja felírható legfeljebb $n - 1$ transzpozíció szorzataként.

41. feladat Igazolja, hogy egy n hosszúságú ciklus nem írható fel $n - 1$-nél kevesebb transzpozíció szorzataként.

42. feladat Legyen $n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$. Igazolja, hogy az S_n csoportot generálják az alábbi halmazok (azaz S_n minden eleme megkapható a megadott permutációkból szorzás segítségével).

(a) $\{(1\ 2),\ (1\ 3), \ldots, (1\ n)\}$ (b) $\{(1\ 2),\ (2\ 3), \ldots, (n-1\ n)\}$ (c) $\{(1\ 2),\ (1\ 2\ \ldots\ n)\}$

43. feladat Legyen $n \in \mathbb{N},\ n \geq 3$. Igazolja, hogy az A_n csoportot generálják az alábbi halmazok (azaz A_n minden eleme megkapható a megadott permutációkból szorzás segítségével).

(a) az összes 3 hosszúságú ciklusok (b) $\{(1\ 2\ 3),\ (2\ 3\ 4), \ldots, (n-2\ n-1\ n)\}$

44. feladat Legyen $n \in \mathbb{N},\ n \geq 4$. Igazolja, hogy minden S_n-beli permutáció előáll $\alpha\beta$ alakban, ahol $\alpha^2 = \beta^2 = \mathrm{id}$.

45. feladat Igaz-e, hogy ha $\pi \in S_n$ nem mozgatja az 1-et és $\pi = \tau_1 \cdots \tau_k$ ahol $\tau_1, \ldots, \tau_k$ transzpozíciók, akkor páros sok τ_i transzpozíció mozgatja az 1-et?

Alterek direkt összege, sajátértékek és diagonalizálhatóság

46. feladat$^{\circ}$ Direkt összege-e a V vektortér az U_1 és U_2 altereknek?
(a) $V = \mathbb{R}^3$, $U_1 = [(1,1,1),(-1,2,0)]$, $U_2 = [(1,1,0)]$
(b) $V = \mathbb{R}^3$, $U_1 = [(1,-1,2),(-1,0,1)]$, $U_2 = [(-1,-1,4),(1,3,1)]$
(c) $V = \mathbb{Z}_3^4$, $U_1 = [(1,1,0,1),(-1,0,1,-1),(0,1,1,0)]$, $U_2 = [(1,0,1,-1),(1,1,1,1),(-1,1,-1,0)]$
(d) $V = \mathbb{R}^3$, U_1 az origón átmenő, $(-1,2,3)$ irányvektorú egyenes, U_2 pedig az $5x - 2y + 3z = 0$ egyenletű sík

47. feladat$^{\circ}$ Tudjuk, hogy az $\mathbb{R}^3$ vektortér az U_1 és U_2 altereinek direkt összege. Adja meg a v vektort egy U_1 és egy U_2-beli vektor összegeként.
(a) $U_1 = [(1,-1,2),(1,1,1),(2,0,3)]$, $U_2 = [(0,0,1)]$, $v = (0,-2,2)$
(b) U_1 az $x + y - 2z = 0$ egyenletű sík, U_2 az origón átmenő, $(1,1,-2)$ irányvektorú egyenes, $v = (2,2,-1)$

48. feladat$^{\circ}$ Számítsa ki a V vektortér φ lineáris transzformációjának sajátértékeit, és döntse el, hogy diagonalizálható-e.
(a) $V = \mathbb{R}^2$, φ az $x - 2y = 0$ egyenesre való tengelyes tükrözés
(b) $V = \mathbb{R}^2$, φ az origóra való centrális tükrözés
(c) $V = \mathbb{R}^2$, φ az origó körüli, $\pi/3$ szöggel való forgatás
(d) $V = \mathbb{R}^3$, φ az origón átmenő, $(1,-1,2)$ irányvektorú egyenes körüli $\pi/4$ szöggel való forgatás
(e) $V = \mathbb{R}^3$, φ az $x + y - z = 0$ egyenletű síkra való tükrözés
(f) $V = \mathbb{R}^3$, $\varphi\colon V \to V, (x,y,z) \mapsto (z, x - 3z, y + 3z)$
(g) $V = \mathbb{R}^3$, $\varphi\colon V \to V, (x,y,z) \mapsto (2z, x + z, y - 2z)$

49. feladat$^{\circ}$ Döntse el az alábbi mátrixokról, hogy diagonalizálhatóak-e az $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Z}_2$, illetve $\mathbb{Z}_3$ testek felett.

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 6 \\ 0 & -3 & 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -2 & -3 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & 0 & -2 \\ -2 & 6 & 1 & -4 \\ 0 & -4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

50. feladat$^{\circ}$
(a) Írja fel az $\mathbb{R}^2$ vektorteret három nemtriviális altere direkt összegeként.
(b) Írja fel az $\mathbb{R}^2$ vektorteret három nemtriviális altere összegeként.
(c) Adjon meg olyan 3×3-as valós mátrixot, melynek a sajátértékei $1, -1, 2$.

51. feladat$^{\circ}$ Igazak-e alábbi állítások? (Indokolja is a választ!)
(a) Bármely háromdimenziós vektortér előállítható kettő darab kétdimenziós altere direkt összegeként.
(b) Ha a sík két origón átmenő egyenesének direkt összege, akkor a két egyenes merőleges egymásra.
(c) Ha a sík két origón átmenő egyenese merőleges, akkor a sík ezen két egyenes direkt összege.
(d) Ha a tér két origón átmenő egyenese merőleges, akkor a tér ezen két egyenes direkt összege.
(e) Ha egy 2×2-es valós mátrixnak 1 és -1 a sajátértékei, akkor a mátrix diagonalizálható.
(f) Ha egy 2×2-es valós mátrixnak nincs valós sajátértéke, akkor a mátrix diagonalizálható a komplex számtest felett.
(g) Egész számokból álló mátrix minden racionális sajátértéke egész.
(h) Ha egy 3×3-as valós mátrix karakterisztikus polinomja $-(x-2)(x^2+x+1)$, akkor nem diagonalizálható.
(i) Ha egy 3×3-as valós mátrix karakterisztikus polinomja $-(x-2)^2(x+1)$, akkor diagonalizálható.

52. feladat Adjon meg olyan valós mátrixot, melynek karakterisztikus polinomja $-(x+1)^3$, azonban nem diagonalizálható.

53. feladat Igazolja, hogy egy V vektortér bármely U altere esetén megadható olyan lineáris transzformáció V-n, melynek magja épp U.

54. feladat Adjon meg az $\mathbb{R}^4$ vektortérben olyan U_1, U_2 és U_3 altereket, melyekre $\mathbb{R}^4 = U_1 + U_2 + U_3$ és az U_1, U_2, U_3 alterek közül bármely kettő metszete triviális, de ennek ellenére $\mathbb{R}^4$ nem direkt összege az U_1, U_2, U_3 altereknek.

55. feladat Legyen V_n a legfeljebb n-edfokú valós együtthatós polinomok vektortere a valós számtest felett. Igaz-e, hogy $V_n = \operatorname{Ker} \mathrm{D} \oplus \operatorname{Im} \mathrm{D}$, ahol D a differenciálás, azaz $\mathrm{D}\colon V_n \to V_n,\ f \mapsto \mathrm{D}(f) = f'$?

56. feladat Legyen V vektortér, és rögzítsünk egy $v \in V$ vektort, valamint egy λ skalárt. Döntse el, hogy az alábbi két halmaz altér-e a lineáris transzformációk $\operatorname{Hom}(V,V)$ vektorterében.

$$A = \{\, \varphi \in \operatorname{Hom}(V,V) \mid v \text{ sajátvektora } \varphi\text{-nek} \,\} \qquad B = \{\, \varphi \in \operatorname{Hom}(V,V) \mid \lambda \text{ sajátértéke } \varphi\text{-nek} \,\}$$

57. feladat Igazolja, hogy ha A és B azonos méretű valós mátrixok, akkor AB és BA valós sajátértékei ugyanazok.

58. feladat Igaz-e, hogy diagonalizálható mátrixok szorzata is diagonalizálható?

59. feladat Az f_n Fibonacci-sorozathoz keressen olyan A valós mátrixot, amelyre $(f_n\ f_{n+1})A = (f_{n+1}\ f_{n+2})$. Diagonalizálja a mátrixot, és ennek segítségével adjon zárt képletet f_n-re.

Normálosztó, faktorcsoport

124. feladat$^{\circ}$ Határozza meg a $H \le G$ részcsoporthoz tartozó bal, illetve jobb oldali mellékosztályokat.

(a) $G = \mathbb{Z}_{12},\ H = [\overline{3}]$ (b) $G = \mathbb{Z}_{21}^*,\ H = [\overline{4}]$ (c) $G = \mathbb{C},\ H = \mathbb{R}$ (d) $G = \mathbb{R}^*,\ H = \mathbb{R}^+$
(e) $G = D_4,\ H = [a^2]$ (f) $G = D_4,\ H = [ta^2]$ (g) $G = D_4,\ H = [a^2, ta]$ (h) $G = A_4,\ H = V$

125. feladat$^{\circ}$ Döntse el az előző feladatbeli $H \le G$ részcsoportokról, hogy normálosztók-e G-ben. Ha igen, akkor határozza meg a G/H faktorcsoportot (írja fel a művelettáblázatát és/vagy állapítsa meg, hogy melyik ismert csoporttal izomorf a faktorcsoport). Ha H nem normálosztó, akkor számítsa ki az általa generált N normálosztót, és határozza meg a G/N faktorcsoportot.

126. feladat$^{\circ}$ Igazak-e alábbi állítások? (Indokolja is a választ!)
(a) Ciklikus csoport minden részcsoportja normálosztó.
(b) Ha egy csoport minden részcsoportja normálosztó, akkor a csoport ciklikus.
(c) Ha egy részcsoport indexe prím, akkor az normálosztó.
(d) Az S_3 csoportban ha két elemnek azonos a rendje, akkor konjugáltak.
(e) Bármely csoportban az azonos rendű elemek konjugáltak.
(f) A Q csoport egyszerű.

127. feladat Határozza meg a megadott G csoport H részcsoportja szerinti bal, illetve jobb oldali mellékosztályozást, és döntse el, hogy H normálosztó-e. Ha igen, akkor határozza meg a G/H faktorcsoportot.

(a) $G = S_4,\ H = V$ (b) $G = S_4$, H az $\{1,2\}$ halmazt önmagába képező permutációk részcsoportja

128. feladat Bizonyítsa be, hogy ha $H, K \le G$ olyan véges részcsoportok, amelyek rendje egymáshoz relatív prím, akkor $H \cap K = \{1\}$.

129. feladat Számítsa ki az alábbi csoportokban az egyes elemek generátumait (azaz a ciklikus részcsoportokat), majd határozza meg az összes részcsoportot, végül rajzolja fel a részcsoportháló Hasse-diagramját.

(a) $\mathbb{Z}_{21}^*$ (b) A_4

130. feladat Számítsa ki az alábbi csoportokban az egyes elemek generátumait (azaz a ciklikus részcsoportokat), majd határozza meg az összes részcsoportot, végül rajzolja fel a részcsoportháló Hasse-diagramját.

(a) D_4 (b) Q

131. feladat Határozza meg a G csoport A részhalmaza által generált normálosztóját.

(a) $G = S_4,\ A = \{(1\,3)(2\,4)\}$ (b) $G = Q,\ A = \{i\}$

132. feladat Határozza meg a D_6 csoportban a konjugáltsági osztályokat. Ennek segítségével keresse meg az összes normálosztóját, majd rajzolja fel a normálosztóháló Hasse-diagramját.

133. feladat Határozza meg az összes homomorfizmust a megadott csoportok között.

(a) $\mathbb{Z}_{15} \to \mathbb{Z}_6$ (b) $Q \to S_4$

134. feladat Igazolja, hogy ha a G csoport K részhalmaza valamely részcsoport szerinti bal oldali mellékosztály, akkor G-nek van olyan részcsoportja is, amely szerint K jobb oldali mellékosztály.

135. feladat Igazolja, hogy ha H, K részcsoportja a G véges csoportnak, akkor $|HK| = \frac{|H||K|}{|H \cap K|}$.

136. feladat Bizonyítsa be, hogy minden $4k+2$ rendű Abel-csoport pontosan egy másodrendű elemet tartalmaz.

137. feladat Izomorfia erejéig határozza meg az összes legfeljebb hatodrendű csoportot.

138. feladat Adjon példát annak igazolására, hogy egy G csoport Abel-féle részcsoportja nem feltétlenül normálosztó.

139. feladat Legyen G csoport, N pedig olyan normálosztója, amelyre G/N kommutatív. Mutassa meg, hogy ekkor G bármely, N-nél bővebb részcsoportja egyben normálosztó is G-ben.

140. feladat Igazolja, hogy tetszőleges G csoport esetén $\operatorname{Inn} G \lhd \operatorname{Aut} G$.

141. feladat Keressen (minél kisebb elemszámú) olyan G csoportot, amelyben vannak olyan M, N részcsoportok, amelyekre $M \lhd N \lhd G$, de M nem normálosztó G-ben.

142. feladat Bizonyítsa be, hogy ha a H részcsoport indexe a G csoportban 2, akkor $G \setminus H$ minden eleme páros rendű.

143. feladat Igazolja, hogy véges csoportban minden konjugáltsági osztály elemszáma osztja a csoport rendjét.

144. feladat Igazolja, hogy a G csoportban megadott N részcsoport normálosztó. Milyen „ismert” csoporttal izomorf G/N?

(a) $G = \mathrm{GL}(\mathbb{R}, n),\ N = \mathrm{SL}(\mathbb{R}, n)$ (b) $G = \mathbb{R},\ N = \mathbb{Z}$

Euklideszi terek

106. feladat$^{\circ}$ Igazolja, hogy tetszőleges euklideszi tér minden u és v vektorára teljesülnek az alábbiak.

(a) $\|u-v\|^2+\|u+v\|^2=2\big(\|u\|^2+\|v\|^2\big)$ (b) $2\langle u,v\rangle=\|u+v\|^2-\|u\|^2-\|v\|^2$ (c) $\|u\|=\|v\| \implies u-v\perp u+v$

107. feladat$^{\circ}$ Hajtson végre Gram-Scmidt-ortogonalizációt az alábbi lineárisan független vektorrendszereken.

(a) $(1,0,0),(2,3,0),(1,6,1)$ (b) $(1,6,1),(1,0,0),(2,3,0)$ (c) $(1,-1,1),(1,3,2),(4,4,-1)$
(d) $(1,1,-1,1),(2,1,-1,0),(2,-1,3,2)$ (e) $(1,1,-1,1),(0,3,0,1),(0,-3,0,7)$

108. feladat$^{\circ}$ Adjon meg ortonormált bázist az alábbi alterek ortogonális kiegészítőjében.

(a) $[(1,1,-1),(1,2,1)]\le\mathbb{R}^3$ (b) $[(1,-1,1,1),(1,2,-1,1),(2,1,0,2)]\le\mathbb{R}^4$
(c) $[(1,-1,0,1),(1,2,-1,1)]\le\mathbb{R}^4$ (d) $\{(x_1,x_2,x_3,x_4): x_1+2x_2+x_3-x_4=x_1-x_2+x_3-x_4=0\}\le\mathbb{R}^4$

109. feladat$^{\circ}$ Legyen A az $\mathbb{R}^3$ euklideszi tér φ lineáris transzformációjának mátrixa a standard bázisban. Határozza meg a $v\varphi^*$ vektort.

(a) $A=\begin{pmatrix}1&-1&2\\-1&0&2\\1&1&2\end{pmatrix},\ v=(1,2,2)$ (b) $A=\begin{pmatrix}-1&1&0\\1&-1&2\\2&1&2\end{pmatrix},\ v=(-1,1,1)$

110. feladat$^{\circ}$ Igazak-e alábbi állítások? (Indokolja is a választ!)
(a) Minden ortogonális vektorrendszer lineárisan független.
(b) Ha két altér ortogonális, akkor az összegük direkt összeg.
(c) Önadjungált lineáris transzformáció mátrixa szimmetrikus.
(d) Ortogonális transzformáció valós sajátértékei 1 abszolút értékűek.
(e) Az ortogonális transzformációk éppen a bijektív lineáris transzformációk.
(f) Ortogonális transzformáció mátrixának determinánsa egy.

111. feladat$^{\circ}$ Legyen a $\varphi_i\colon\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ lineáris transzformáció mátrixa a standard bázisban A_i $(i=1,2)$. Adja meg az $\mathbb{R}^3$ euklideszi térnek egy, a φ_i sajátvektoraiból álló ortonormált bázisát.

$$A_1=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&1\end{pmatrix},\quad A_2=\begin{pmatrix}2&-1&1\\-1&2&-1\\1&-1&2\end{pmatrix}$$

112. feladat$^{\circ}$ Az előző feladatban szereplő $A_i\in\mathbb{R}^{n\times n}$ szimmetrikus mátrixokhoz keressen olyan B_i ortogonális mátrixokat, melyekre $B_i^{-1}A_iB_i$ diagonális.

113. feladat$^{\circ}$ Hajtson végre főtengelytranszformációt az alábbi kvadratikus alakokon.

(a) $-4x_1x_2+2x_1x_3+3x_2^2-4x_2x_3$ (b) $-2x_1x_2+2x_1x_3+x_2^2+2x_2x_3+4x_3^2$

114. feladat Egészítse ki az $(1,-1,1,1)$ vektorrendszert olyan ortogonális rendszerré, melyben minden koordináta egész.

115. feladat Bizonyítsa be, hogy minden, legalább kétdimenziós euklideszi térben végtelen sok ortonormált bázis van.

116. feladat Legyen V egy n-dimenziós euklideszi tér. Adjon meg V-ben végtelen sok olyan vektort, amelyek közül bármely n lineárisan független, de semelyik kettő sem ortogonális.

117. feladat Legyen V euklideszi tér, $U\le V$ és $v\in V$. Mutassa meg, hogy $U+v=\{u+v: u\in U\}$ pontosan egy U-ra merőleges elemet tartalmaz, és ez az elem éppen $U+v$ legrövidebb eleme.

118. feladat Határozza meg a síkon az $y=x$ egyenesre való merőleges vetítés, illetve tükrözés adjungáltját.

119. feladat Legyen $\varphi\in L(V)$ lineáris transzformáció. Igazolja, hogy ekkor $\operatorname{Ker}\varphi^*=(\operatorname{Im}\varphi)^\perp$ és $\operatorname{Im}\varphi^*=(\operatorname{Ker}\varphi)^\perp$.

120. feladat Mutassa meg, hogy euklideszi tér φ lineáris transzformációjára az alábbi feltételek bármelyike következik a másik kettőből. (Mely φ transzformációk teljesítik mindhárom feltételt?)

(a) φ önadjungált (b) φ ortogonális (c) $\varphi^2=\mathrm{id}$

121. feladat Bizonyítsa be, hogy bármely $A\in\mathbb{R}^{3\times3}$ ortogonális mátrixhoz léteznek olyan $P\in\mathbb{R}^{3\times3}$ és $B\in\mathbb{R}^{2\times2}$ ortogonális mátrixok, amelyekre $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0\\0&B\end{pmatrix}$. A lehetséges B mátrixok meghatározása után fogalmazza meg a fenti állítás geometriai jelentését.

122. feladat Hány egész számokból álló 3×3-as ortogonális mátrix van?

123. feladat Legyenek φ,ψ lineáris transzformációk. Döntse el az alábbi állításokról, hogy igazak-e. (Amennyiben igazak, igazolja őket, amennyiben nem, adjon rájuk ellenpéldát.)
(a) Ha φ és ψ ortogonális, akkor $\varphi+\psi$ is az.
(b) Ha φ és ψ ortogonális, akkor $\varphi\psi$ is az.
(c) Ha φ ortogonális, de ψ nem, akkor $\varphi\psi$ sem ortogonális.

Elemek rendje

60. feladat$^{\circ}$ Határozza meg a megadott elemek rendjét a G csoportban.

(a) $G=\mathbb{Z}_{12};\ \overline{5},\ \overline{9},\ \overline{11}$ (b) $G=\mathbb{Z}_{18}^*;\ \overline{5},\overline{7}$ (c) $G=\mathbb{Q};\ -1,\ \frac{5}{9}$ (d) $G=D_{24};\ a^9,\ ta^9,\ ta^9t$
(e) $G=S_6;\ (1\ 2\ 3)(4\ 5),\ (1\ 2\ 5\ 4)(2\ 3\ 6)(1\ 4\ 6)^{-1}$ (f) $G=\mathbb{C}^*;\ \operatorname{cis}\frac{5\pi}{6},\ \operatorname{cis}\frac{3\pi}{2},\ \operatorname{cis}\frac{-\pi}{6},\ \operatorname{cis}\sqrt{2}$

61. feladat$^{\circ}$ Adjon meg a G csoportban k rendű elemet.

(a) $G=S_9;\ k=8,15,21$ (b) $G=D_{18};\ k=2,4,6,7$ (c) $G=\mathbb{C};\ k=5\ -1,\ \frac{5}{9}$ (d) $G=\mathbb{C}^*;\ k=5$

62. feladat Határozza meg az alábbi csoportok véges rendű elemeit.

(a) $\mathbb{Q}$ (b) $\mathbb{Q}^*$ (c) $\mathbb{C}^*$ (d) a kör szimmetriacsoportja

63. feladat Bizonyítsa be az alábbi, véges fokú permutációkra vonatkozó állításokat, vagy adjon rájuk ellenpéldát.
(a) Minden páros rendű permutáció páros.
(b) Minden páros permutáció rendje páros.
(c) Minden páratlan rendű permutáció páros.
(d) Minden páratlan permutáció páros rendű.

64. feladat Igazolja, hogy bármely csoport tetszőleges a,b véges rendű elemeire teljesülnek a következők.

(a) $o(a)=o(b^{-1}ab)$ (b) $o(ab)=o(ba)$ (c) $ab=ba \implies o(ab)\mid \operatorname{lkkt}(o(a),o(b))$

65. feladat Határozza meg az $L_{\mathbb{R}}$ csoport véges rendű elemeit (lásd a 22. feladatot).

66. feladat Adjon meg olyan végtelen csoportot, amelynek minden eleme véges rendű, valamint olyan végtelen csoportot, melyben csak véges sok véges rendű elem van. Van-e olyan csoport, amelynek véges sok végtelen rendű eleme van?

67. feladat Igazolja, hogy ha egy csoportban az egységelemtől különböző összes elem rendje ugyanaz, akkor az végtelen vagy prímszám.

68. feladat Igazolja, hogy ha egy csoport minden elemének rendje legfeljebb 2, akkor a csoport kommutatív.

69. feladat Mutassa meg, hogy ha egy véges csoport elemszáma páros, akkor a csoportban van másodrendű elem.

70. feladat Mutassa meg, hogy tetszőleges $k\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$ esetén van olyan csoport és abban két olyan másodrendű elem, amelyek szorzatának rendje k.

71. feladat Igazolja, hogy ha n-nek van két különböző páratlan prímosztója, akkor a $\mathbb{Z}_n^*$ csoport minden elemének rendje kisebb $\varphi(n)$-nél.

72. feladat Tetszőleges $k\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$ esetén adjon meg az $\mathrm{SL}(\mathbb{R},2)$ csoportban k rendű elemet.

Részcsoportok

73. feladat° Döntse el, hogy részcsoportot alkotnak-e az alábbi H halmazok a megadott G csoportban.

(a) $G=\mathbb{Z},\ H=\{k\in\mathbb{Z}:6\mid k\}$ (b) $G=\mathbb{Z},\ H=\{k\in\mathbb{Z}:2\mid k \text{ vagy } 3\mid k\}$

(c) $G=S_4,\ H$ az összes transzpozíciók halmaza (d) $G=\mathbb{Z}_8,\ H=\mathbb{Z}_8^*$ (e) $G=D_8,\ H=\{\mathrm{id},a^4,a^3t,a^7t\}$

74. feladat° Bizonyítsa be az alábbi állításokat, vagy adjon rájuk ellenpéldát.
(a) Tetszőleges G csoport minden H,K részcsoportjára $H\cup K\le G$.
(b) Tetszőleges G csoport minden H,K részcsoportjára $H\cap K\le G$.
(c) Tetszőleges G csoport minden H,K részcsoportjára $H\bigtriangleup K\le G$.

75. feladat° Határozza meg a G csoport A részhalmaza által generált részcsoportját.

(a) $G=\mathbb{Z},\ A=\{6,10,15\}$ (b) $G=\mathbb{Q},\ A=\left\{\frac{2}{3},\frac{3}{2}\right\}$ (c) $G=\mathbb{Q}^*,\ A=\left\{\frac{2}{3},\frac{3}{2}\right\}$ (d) $G=\mathbb{Z}_{18},\ A=\{\overline{4}\}$

(e) $G=\mathbb{Z}_{30},\ A=\{\overline{9},\overline{15}\}$ (f) $G=\mathbb{C},\ A=\left\{-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right\}$ (g) $G=\mathbb{C}^*,\ A=\left\{-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right\}$

(h) $G=D_5,\ A=\{a^2,at\}$ (i) $G=D_6,\ A=\{a^2,at\}$ (j) $G=S_4,\ A=\{(1\ 2\ 3\ 4),(1\ 3)\}$

76. feladat° Döntse el, hogy ciklikusak-e az alábbi csoportok.

(a) S_3 (b) A_3 (c) $\mathbb{Z}_{13}^*$ (d) $\mathbb{Z}_{14}^*$ (e) $\mathbb{Z}_{15}^*$ (f) D_{15}

77. feladat Adjon meg $1,2$, illetve 3 elemű *minimális* generátorrendszert a $\mathbb{Z}_{18}$, illetve az S_3 csoportban (ha létezik).

78. feladat Számítsa ki az alábbi csoportokban az egyes elemek generátumait (azaz a ciklikus részcsoportokat), majd határozza meg az összes részcsoportot, végül rajzolja fel a részcsoportháló Hasse-diagramját.

(a) $\mathbb{Z}_{12}$ (b) D_3 (c) S_3 (d) V

79. feladat Mutassa meg, hogy tetszőleges p prímszám esetén a $\mathbb{C}^*$ csoportban részcsoportot alkot a következő halmaz:

$$E_{p^\infty}=\{\,u\in\mathbb{C}^*:\text{van olyan } k\in\mathbb{N}_0,\ \text{amelyre } u^{p^k}=1\,\}.$$

80. feladat Igazolja, hogy S_n minden részcsoportjában vagy minden permutáció páros, vagy a permutációknak pontosan a fele páros.

81. feladat Mutassa meg, hogy minden Abel-csoport
(a) véges rendű elemeinek halmaza,
(b) legfeljebb másodrendű elemeinek halmaza
részcsoportot alkot. Adjon példát olyan Abel-csoportra, melyben a legfeljebb harmadrendű elemek nem alkotnak részcsoportot.

82. feladat Adjon példát olyan G csoportra és annak olyan H,K részcsoportjára, amelyekre HK nem részcsoportja G-nek.

83. feladat Igazolja, hogy ha H egy G csoport véges részhalmaza és $H^2=H$, akkor H részcsoport G-ben.

84. feladat Mely $n\ge 3$ természetes számok esetén generátorrendszere az $\{(1\ 2\ 3),(1\ 2\ \dots n)\}$ halmaz az S_n csoportnak?

85. feladat Mutassa meg, hogy ha egy G csoport nem Abel-féle, de minden valódi részcsoportja Abel-féle, akkor G-nek van kételemű generátorrendszere.

86. feladat Igazolja, hogy egy csoport akkor és csak akkor véges, ha véges sok részcsoportja van.

87. feladat Bizonyítsa be, hogy a $\mathbb{Q}$ csoport minden végesen generált részcsoportja ciklikus, és adjon meg olyan valódi részcsoportját, amely nem ciklikus.

88. feladat Bizonyítsa be, hogy az E_{p^∞} csoport minden valódi részcsoportja ciklikus (lásd a 79. feladatot).

89. feladat Bizonyítsa be, hogy a $\mathbb{Q}$ csoportnak, valamint az E_{p^∞} csoportoknak nincs minimális generátorrendszerük (lásd a 79. feladatot).

Homomorfizmusok

90. feladat° Döntse el, hogy az alábbi leképezések közül melyek homomorfizmusok, illetve izomorfizmusok.

(a) $\varphi\colon\mathbb{C}^*\to\mathbb{R}^+,\ z\mapsto|z|$ (b) $\varphi\colon\mathbb{C}\to\mathbb{R},\ z\mapsto\operatorname{Im}z$ (c) $\varphi\colon\ \mathrm{GL}\,(n,\mathbb{R})\to\mathbb{R}^*,\ A\mapsto\det\,(A)$

(d) $\varphi\colon\mathbb{Z}_{10}\to\mathbb{Z}_{15},\ \overline{k}\mapsto\overline{6k}$ (e) $\varphi\colon\mathbb{Z}_{10}\to\mathbb{Z}_{10},\ \overline{k}\mapsto\overline{k+2}$ (f) $\varphi\colon\mathbb{Z}_{12}\to D_8,\ \overline{k}\mapsto t$

(g) $\varphi\colon Q\to Q,\ x\mapsto x^2$ (h) $\varphi\colon S_n\to\mathbb{Z}_2$, ahol $\pi\varphi=0$ akkor és csak akkor, ha π páros

91. feladat° Döntse el, hogy létezik-e olyan φ homomorfizmus, amely teljesíti a megadott feltételt.

(a) $\varphi\colon\mathbb{Z}\to S_3,\ 5\varphi=(1\ 2\ 3)$ (b) $\varphi\colon\mathbb{Z}_6\to\mathbb{Z}_4,\ \overline{2}\varphi=\overline{2}$ (c) $\varphi\colon\mathbb{Z}_{12}\to\mathbb{Z}_8,\ \overline{3}\varphi=\overline{2}$

(d) $\varphi\colon D_4\to\mathbb{Z}_4,\ t\varphi=\overline{3}$ (e) $\varphi\colon Q\to V,\ i\varphi=(1\ 3)(2\ 4)$

92. feladat° Döntse el, hogy létezik-e nemtriviális, szürjektív, illetve injektív homomorfizmus a megadott csoportok között.

(a) $\varphi\colon\mathbb{Z}_4\to\mathbb{Z}_{12}$ (b) $\varphi\colon\mathbb{Z}_{21}\to\mathbb{Z}_7$ (c) $\varphi\colon\mathbb{Z}_{15}\to\mathbb{Z}_6$ (d) $\varphi\colon V\to\mathbb{Z}_4$ (e) $\varphi\colon D_4\to S_4$

93. feladat° Döntse el, hogy izomorfak-e egymással az alábbi csoportok.

(a) $\mathbb{Z}_6^*$ és $\mathbb{Z}_4^*$ (b) $\mathbb{Z}_{15}^*$ és $\mathbb{Z}_8$ (c) D_4 és Q (d) a kör szimmetriacsoportja és $\mathbb{C}^*$

94. feladat° Adja meg az alábbi G csoportok g elemének képét a csoport Cayley-féle ábrázolásánál.

(a) $G=\mathbb{Z}_8,\ g=\overline{4}$ (b) $G=S_3,\ g=(1\ 2)$ (c) $G=D_6,\ g=a^2t$ (d) $G=\mathbb{Z},\ g=-2$ (e) $G=Q,\ g=j$

95. feladat° Igazak-e alábbi állítások? (Indokolja is a választ!)
(a) Ha $\varphi\colon G\to H$ homomorfizmus, és $g\in G$, akkor $g\varphi$ rendje nem lehet nagyobb, mint g rendje.
(b) Ha $\varphi\colon G\to H$ homomorfizmus, és G kommutatív, akkor H is kommutatív.
(c) Ha $\varphi\colon G\to H$ homomorfizmus, és H kommutatív, akkor G is kommutatív.
(d) Végtelen rendű elem homomorf képe is végtelen rendű.
(e) Ha $\varphi\colon G\to H$ injektív homomorfizmus, akkor bármely $g\in G$ esetén $o(g)=o(g\varphi)$.
(f) Legyen $\varphi\colon G\to S_G$ a G csoport Cayley-féle ábrázolása, és legyen $g\in G$. Ha $g\varphi$-nek van fixpontja, akkor g az egységelem.
(g) Legyen $\varphi\colon G\to S_G$ a G csoport Cayley-féle ábrázolása, és legyen $g\in G$. Ha $g\varphi$ ciklus, akkor G ciklikus csoport.

96. feladat Adja meg az összes $\mathbb{Z}_m\to\mathbb{Z}_n$ homomorfizmust. Mi a szükséges és elegendő feltétele annak, hogy létezzen nemtriviális, injektív, illetve szürjektív $\mathbb{Z}_m\to\mathbb{Z}_n$ homomorfizmus?

97. feladat Határozza meg az összes $S_3\to S_4$ injektív homomorfizmust.

98. feladat Jelölje D_∞ az alábbi alakzat szimmetriacsoportját:

$$\cdots\ \mathrm{TTTTTTTTTTTTT}\ \cdots$$

Tetszőleges $n\ge 3$ egész esetén adjon meg szürjektív $D_\infty\to D_n$ homomorfizmust.

99. feladat Mutassa meg, hogy $D_\infty\cong L_\mathbb{Z}$, továbbá ez a csoport izomorf az $\begin{pmatrix}\varepsilon & k\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ alakú mátrixok csoportjával, ahol $\varepsilon\in\{1,-1\}$ és $k\in\mathbb{Z}$ (lásd a 22. és 98. feladatokat).

100. feladat Hogyan lehetne a fenti példához hasonlóan „mátrixosan" leírni a szabályos n-szög, illetve a kör szimmetriacsoportját?

101. feladat Adjon meg végtelen sok olyan $E_{p^\infty}\to E_{p^\infty}$ homomorfizmust, amely szürjektív, de nem injektív (lásd a 79. feladatot).

102. feladat Adjon meg két különböző n pozitív egészre olyan részcsoportot S_n-ben, amely izomorf D_4-gyel, és amelyben tetszőleges $k,l\in\{1,\dots,n\}$-hez van olyan permutáció, amely k-t l-be viszi.

103. feladat Döntse el, hogy izomorfak-e egymással az alábbi csoportok.

(a) $\mathbb{Q}^+$ és $(\mathbb{Z}[x];+)$ (b) $\mathbb{Q}$ és $\mathbb{Q}^+$

104. feladat Milyen $m,n\ge 3$ egészekre tartalmaz S_m a $\mathbb{Z}_n$ csoporttal izomorf részcsoportot?

105. feladat Adjon meg olyan részcsoportot a $\mathrm{GL}(\mathbb{R},2)$ csoportban, mely izomorf az alábbi csoporttal.

(a) $\mathbb{Z}_4$ (b) $\mathbb{Z}$ (c) S_3 (d) D_4 (e) $\mathbb{C}^*$