ALGEBRA ÉS SZÁMELMÉLET

szorgalmi feladatok (polinomok)

2019 őszi félév, BSc

17. feladat Legyen $\xi \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$ megoldása az $x^2 + px + q = 0$ egyenletnek, ahol p és q egész számok. Mutassa meg, hogy ekkor a $\mathbb{Z}[\xi] = \{a + b\xi : a, b \in \mathbb{Z}\}$ halmaz integritástartományt alkot a szokásos összeadással és szorzással.

18. feladat* Határozza meg a $8 + i$ és $4 - 2i$ Gauss-egészek legnagyobb közös osztóját.

19. feladat A *duális számokat* a komplex számokhoz hasonlóan definiáljuk, de itt a „képzetes egység” négyzete nem -1, hanem 0. Tehát $\mathbb{D} = \{a + b\varepsilon \colon a, b \in \mathbb{R}\}$, ahol ε olyan szimbólum, amelyre $\varepsilon^2 = 0$. (Mi lehet ennek az értelme? Miért pont ε-t használunk?) Mutassa meg, hogy a duális számok (a természetes módon definiált összeadással és szorzással) kommutatív egységelemes gyűrűt alkotnak. Határozza meg a $\mathbb{D}$ gyűrű zérusosztóit és egységeit.

20. feladat* Keressen egy ± 1-től különböző egységet a $\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$ gyűrűben, majd ennek segítségével konstruáljon meg végtelen sok egységet.

21. feladat* Határozza meg a véges tizedestörtek gyűrűjének egységeit.

22. feladat Definiáljunk egy újfajta összeadást és egy újfajta szorzást a valós számok halmazán: legyen $a \oplus b = a + b - 1$ és $a \odot b = a + b - ab$. Igazolja, hogy az $(\mathbb{R}; \oplus, \odot)$ struktúra test.

23. feladat* Definiáljunk egy újfajta „összeadást” a pozitív valós számok halmazán: legyen $a \oplus b = a \cdot b$. Adjon meg olyan $\odot$ „szorzást”, amelyre $(\mathbb{R}^+; \oplus, \odot)$ test.

24. feladat* Bizonyítsa be, hogy minden véges integritástartomány test.

25. feladat* Mennyi lehet egy véges test összes elemének összege?

26. feladat Számítsa ki az $\left(x - \overline{1}\right)\left(x - \overline{2}\right) \cdots \left(x - \overline{p-1}\right) \in \mathbb{Z}_p[x]$ polinomban x^{p-1}, x^{p-2}, x^{p-3} és x^0 együtthatóját, ahol $p \geq 5$ prímszám.

27. feladat Oldja meg az $\left(x^3 + x^2\right) u + \left(x^3 + x^2 + x\right) v + \left(x^3 + \overline{1}\right) w = \overline{1}$ egyenletet a $\mathbb{Z}_2[x]$ polinomgyűrűben.

28. feladat* Mely n pozitív egészekre osztható az $x^{2n} + x^n + 1$ polinom az $x^2 + x + 1$ polinommal? (Útmutatás: használjuk Bézout tételét.)

29. feladat Legyen f a $\left(k, (-1)^k\right)$, $k = 0, \ldots, 9$ pontokra illesztett interpolációs polinom. Mennyi $f(10)$ értéke?

30. feladat* Legyenek $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}$ az n-edik egységgyökök, és legyen $f \in \mathbb{C}[x]$ az $(\varepsilon_0, y_0), (\varepsilon_1, y_1), \ldots, (\varepsilon_{n-1}, y_{n-1})$ pontokra illesztett Lagrange-féle interpolációs polinom. Igazolja, hogy $f(0)$ éppen az $y_0, \ldots, y_{n-1}$ számok átlaga.

31. feladat* A gyakorló feladatsor 36. feladatának általánosításaként bizonyítsa be, hogy a $(0, a_0), (1, a_1), \ldots, (n+1, a_{n+1})$ pontok akkor és csak akkor illeszkednek egy legfeljebb n-edfokú polinomfüggvény grafikonjára, ha

$$\binom{n+1}{0} a_0 - \binom{n+1}{1} a_1 + \binom{n+1}{2} a_2 + \cdots + (-1)^k \binom{n+1}{k} a_k + \cdots + (-1)^{n+1} \binom{n+1}{n+1} a_{n+1} = 0.$$

32. feladat* Mutassa meg, hogy egy $f \in \mathbb{R}[x]$ polinom akkor és csak akkor vesz fel egész értéket minden egész helyen, ha előáll $\binom{x}{k} = \frac{x(x-1)\cdots(x-(k-1))}{k!}$ alakú polinomok egész együtthatós lineáris kombinációjaként.

33. feladat* Adja meg az $x^p - x \in \mathbb{Z}_p[x]$ polinom irreducibilis felbontását tetszőleges p prímszám esetén.

34. feladat* Adja meg az $x^5 + x^3 + ax^2 + a \in T[x]$ polinom irreducibilis felbontását, ahol $T = \{0, 1, a, b\}$ a négyelemű test.

35. feladat Határozza meg az összes olyan p prímszámot, amelyre $x^2 + \overline{1} \mid x^{2008} - \overline{23}x^{1922} + \overline{13}x^{600} + \overline{8}$ teljesül a $\mathbb{Z}_p[x]$ polinomgyűrűben. (Útmutatás: használjuk Bézout tételét vagy magában a $\mathbb{Z}_p$ testben, vagy annak egy alkalmas bővítésében.)

36. feladat* Határozza meg az egységkörbe írt szabályos n-szög egy csúcsából kiinduló átlói hosszának szorzatát. (Itt most átlónak tekintjük az oldalakat is, tehát egy csúcsból $n - 1$ átló indul ki.)

37. feladat Adja meg az $x^p - 1 \in \mathbb{Q}[x]$ polinom irreducibilis felbontását, ahol p tetszőleges prímszám. (Útmutatás: térjünk át az $y = x - 1$ határozatlanra.)

38. feladat* Bizonyítsa be, hogy tetszőleges T test és tetszőleges $a_0, \ldots, a_n \in T$, $a_0, a_n \neq 0$ elemek esetén az $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in T[x]$ polinom akkor és csak akkor irreducibilis, ha $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ is az.

39. feladat* Mutassa meg, hogy a $\left\{a + b\sqrt[3]{2} \colon a, b \in \mathbb{Q}\right\}$ halmaz nem zárt a szorzásra.

40. feladat* Legyen $f \in \mathbb{Z}[x]$ olyan 101-edfokú polinom, amely legalább 101 egész számra ± 1 értéket vesz fel. Bizonyítsa be, hogy f irreducibilis $\mathbb{Q}$ felett. (Útmutatás: használjuk Kronecker módszerét.)

41. feladat* Bizonyítsa be, hogy az $f = x^n + ax + p$ polinom irreducibilis $\mathbb{Q}$ felett bármely $n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{Z}, p$ prímszám, $p > |a| + 1$ esetén. (Útmutatás: Először azt mutassuk meg, hogy f minden α gyökére $|\alpha| > 1$.)

42. feladat* Legyen $f \in \mathbb{Z}[x]$ olyan főpolinom, melynek konstans tagja nem nulla (azaz $f(0) \neq 0$). Tegyük fel, hogy f-nek egyetlen komplex gyöke van az egységkörön kívül, az összes többi gyöke pedig az egységkör belsejében helyezkedik el (a körvonalon nincs egy gyök se). Bizonyítsa be, hogy f irreducibilis $\mathbb{Q}$ felett.

43. feladat Mikor osztható egy polinom a saját deriváltjával?

44. feladat* Legyenek az $f \in \mathbb{C}[x]$ polinom komplex gyökei $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Tegyük fel, hogy a gyökök páronként különbözők, és egy konvex n-szöget alkotnak a komplex számsíkon. Bizonyítsa be, hogy f' gyökei csak ennek a sokszögnek a belsejében vagy a határán helyezkedhetnek el.