

# ALGEBRA ÉS SZÁMELMÉLET

szorgalmi feladatok (komplex számok)

2019 őszi félév, BSc

1. **feladat** Ábrázolja a komplex számsíkon a  $\{z \in \mathbb{C} : |iz - 1 - i| \leq 1\}$  halmazt.
2. **feladat\*** Ábrázolja a komplex számsíkon a  $\{z^2 : z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} z = 1\}$  halmazt.
3. **feladat\*** Ábrázolja a komplex számsíkon a  $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = \lambda$  egyenlőséget kielégítő  $z$  komplex számok halmazát.
4. **feladat** Bizonyítsa be, hogy  $\arctg 1 + \arctg 2 + \arctg 3 = \pi$ .
5. **feladat\*** Mutassa meg, hogy  $4 \arctg \frac{1}{5} - \arctg \frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}$ .
6. **feladat** Rajzoljunk egy négyzetet az  $ABC$  háromszög  $AC$  oldalára kifelé; ennek  $A$ -val szomszédos csúcsai legyenek  $C$  és  $D$ . Hasonlóképpen, a  $BC$  oldalra rajzolt négyzet  $B$ -vel szomszédos csúcsai  $C$  és  $E$ . Mutassa meg, hogy ha a háromszög  $C$  csúcsát mozgatjuk (de az  $AB$  oldal fix), akkor a  $DE$  szakasz felezőpontja helyben marad.
7. **feladat\*** Rajzoljunk szabályos háromszögeket egy tetszőleges háromszög oldalaira kifelé. Bizonyítsa be, hogy az ezen háromszögek középpontjai által meghatározott háromszög szabályos.
8. **feladat\*** Rajzoljunk négyzeteket egy tetszőleges négyszög oldalaira kifelé. Bizonyítsa be, hogy a szemközti oldalakra rajzolt négyzetek középpontjait összekötő szakaszok egyenlő hosszúak és egymásra merőlegesek.
9. **feladat\*** Bizonyítsa be, hogy nem létezik szabályos rácsháromszög.
10. **feladat\*** Igazolja, hogy az  $x, y, z \in \mathbb{C}$  komplex számok által meghatározott háromszög akkor és csak akkor szabályos, ha  $x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + zx$ .
11. **feladat\*** Adjon zárt formulát a  $\sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx$  összegre.
12. **feladat\*** Mutassa meg, hogy  $\binom{n}{1} - \binom{n}{3} + \binom{n}{5} - \binom{n}{7} + \dots = \sqrt{2}^n \sin \frac{n\pi}{4}$ .
13. **feladat** Hogyan bolyong a komplex számsíkon a  $z^n$  sorozat, amint  $n$  tart végtelenbe? (A válasz persze  $z$ -től függ.)
14. **feladat\*** Oldja meg az  $|z^3 + 2 - 2i| + z\bar{z}|z| = 2\sqrt{2}$  egyenletet a komplex számok halmazán.
15. **feladat** Mennyi az  $n$ -edik egységgyökök  $k$ -adik hatványainak összege?
16. **feladat** Határozza meg az  $n$ -edik egységgyökök szorzatát.