ALGEBRA ÉS SZÁMELMÉLET

szorgalmi feladatok (csoportok)

2019 őszi félév, BSc

45. feladat* Bizonyítsa be, hogy a $(\mathbb{Q}^+;\cdot)$ és $(\mathbb{Z}[x];+)$ csoportok izomorfak egymással.

46. feladat Hány eleme van a $\mathrm{GL}(\mathbb{Z}_p,2)$ csoportnak?

47. feladat Hány eleme van a kocka mozgás-, illetve szimmetriacsoportjának?

48. feladat A páronként idegen ciklusokra bontott alak segítségével adjon meg szükséges és elegendő feltételt arra, hogy egy permutáció előálljon valamely permutáció négyzeteként (azaz második hatványaként).

49. feladat* Milyen a ciklusszerkezete egy n hosszúságú ciklus k-adik hatványának?

50. feladat* Igazolja, hogy egy n hosszúságú ciklus nem írható fel $n-1$-nél kevesebb transzpozíció szorzataként.

51. feladat Igazolja, hogy ha egy csoportban az a és b véges rendű elemek felcserélhetőek, akkor $o(ab) \mid \mathrm{lkkt}(o(a),o(b))$.

52. feladat Tetszőleges R kommutatív egységelemes gyűrű esetén legyen $L_R = \{x \mapsto ax+b : a \in R^*, b \in R\}$ az R feletti bijektív „lineáris” függvények csoportja. Határozza meg az $L_\mathbb{R}$ csoport véges rendű elemeit.

53. feladat* Adjon meg olyan végtelen csoportot, amelynek minden eleme véges rendű, valamint olyan végtelen csoportot, melyben csak véges sok véges rendű elem van. Van-e olyan csoport, amelynek véges sok végtelen rendű eleme van?

54. feladat* Igazolja, hogy ha egy csoportban az egységelemtől különböző összes elem rendje ugyanaz, akkor az végtelen vagy prímszám.

55. feladat* Mutassa meg, hogy tetszőleges $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ esetén van olyan csoport és abban két olyan másodrendű elem, amelyek szorzatának rendje k.

56. feladat Igazolja, hogy S_n minden részcsoportjában vagy minden permutáció páros, vagy a permutációknak pontosan a fele páros.

57. feladat Mutassa meg, hogy tetszőleges p prímszám esetén a $\mathbb{C}^*$ csoportban részcsoportot alkot a következő halmaz: $E_{p^\infty} = \{\, u \in \mathbb{C}^* : \text{van olyan } k \in \mathbb{N}_0, \text{ amelyre } u^{p^k} = 1 \,\}$.

58. feladat* Bizonyítsa be, hogy az E_{p^∞} csoport minden valódi részcsoportja ciklikus (lásd az 57. feladatot).

59. feladat Jelölje D_∞ a $\cdots$ TTTTTTTTTTTTT $\cdots$ alakzat szimmetriacsoportját. Mutassa meg, hogy $D_\infty \cong L_\mathbb{Z}$, továbbá ez a csoport izomorf az $\begin{pmatrix} \varepsilon & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ alakú mátrixok csoportjával, ahol $\varepsilon \in \{1,-1\}$ és $k \in \mathbb{Z}$ (lásd az 52. feladatot).

60. feladat Igazolja, hogy egy csoport akkor és csak akkor véges, ha véges sok részcsoportja van.

61. feladat Igazolja, hogy az S_n csoportot generálják az $(1\ 2)$ és $(1\ 2\ \ldots\ n)$ permutációk.

62. feladat Igazolja, hogy az A_n csoportot generálják az összes 3 hosszúságú ciklusok.

63. feladat* Mutassa meg, hogy ha egy G csoport nem Abel-féle, de minden valódi részcsoportja Abel-féle, akkor G-nek van kételemű generátorrendszere.

64. feladat* Bizonyítsa be, hogy a $\mathbb{Q}$ csoport minden végesen generált részcsoportja ciklikus, és adjon meg olyan valódi részcsoportját, amely nem ciklikus.