ALGEBRA ÉS SZÁMELMÉLET

feladatok a gyakorlatra (polinomok)

2019 őszi félév, BSc

17. feladat Döntse el, hogy gyűrűt, integritástartományt, illetve testet alkotnak-e az alábbi számhalmazok a szokásos összeadás és szorzás műveletével.

(a) $\mathbb{Q}(i) = \{a + bi : a, b \in \mathbb{Q}\}$ (b) $\{a + bi : a, b \in \mathbb{Z}$ és a páros$\}$ (c) $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Z}\}$

(d) $\{a + bi : a, b \in \mathbb{Z}$ és a is és b is páros$\}$ (e) $\{a + bi : a, b \in \mathbb{Z}$ és b páros$\}$ (f) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$

18. feladat Gyűrűt, integritástartományt, illetve testet alkot-e a $\mathbb{Z}[\omega] = \{a + b\omega : a, b \in \mathbb{Z}\}$ halmaz (a szokásos összeadással és szorzással), ahol $\omega = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$?

19. feladat Határozza meg az alábbi gyűrűk egységcsoportját, és döntse el, hogy testet alkotnak-e. (Azt nem kell ellenőrizni, hogy ezek valóban gyűrűk.)

(a) $\mathbb{Z}_{24}$ a maradékosztályok szokásos összeadásával és szorzásával

(b) $\mathbb{R}^{2\times 2}$ a mátrixok szokásos összeadásával és szorzásával

(c) $\mathbb{R}^2$ a komponensenkénti összeadással és szorzással

(d) $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) = \{a + b\sqrt{3} : a, b \in \mathbb{Q}\}$ a szokásos összeadással és szorzással

(e) $U = \{a, b\}$ részhalmazai a szimmetrikus differencia (összeadás) és a metszés (szorzás) műveletével

20. feladat Jelölje $\mathcal{P}(U)$ az U halmaz hatványhalmazát, azaz U összes részhalmazainak halmazát. Gyűrűt, integritástartományt, illetve testet alkot-e a $\mathcal{P}(U)$ halmaz a szimmetrikus differencia és a metszés műveletével? (A válasz függ U elemszámától!)

21. feladat Határozza meg a $\mathbb{Z}[\omega]$ gyűrű egységeit (lásd a 18. feladatot).

22. feladat Bizonyítsa be, hogy az $\left(\begin{smallmatrix} a & -b \\ b & a \end{smallmatrix}\right)$ alakú valós mátrixok testet alkotnak a szokásos mátrixműveletekkel.

23. feladat Adjon meg olyan összeadást és szorzást a $T = \{0, 1, a, b\}$ halmazon, amellyel $(T; +, \cdot)$ test.

24. feladat Döntse el, hogy igazak-e az alábbi állítások. A választ minden esetben indokolni kell!

(a) Létezik olyan gyűrű, ami egységelemes, de nem kommutatív és nem zérusosztómentes.
(b) Létezik olyan integritástartomány, amelyben pontosan tizenhat egység van.
(c) Az egységek minden gyűrűben csoportot alkotnak az összeadás műveletével.
(d) Létezik olyan gyűrű, ami kommutatív és egységelemes, de nem integritástartomány.
(e) Létezik olyan integritástartomány, amelyben csak véges sok egység van.

25. feladat Számítsa ki az f és g polinomok legnagyobb közös osztóját.

(a) $f = x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 2x + 3,\ g = x^3 + x^2 + x - 3 \in \mathbb{R}[x]$

(b) $f = x^4 + x^3 + x,\ g = x^4 + x^2 + x \in \mathbb{Z}_2[x]$

(c) $f = x^4 + 2x^3 - x^2 - 4x - 2,\ g = x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 2 \in \mathbb{R}[x]$

(d) $f = x^4 + x^3 + 2x^2 + 3x - 3,\ g = x^4 + x^3 + x^2 + 3x - 6 \in \mathbb{Q}[x]$

(e) $f = x^4 + x^3 + x^2 + \overline{1},\ g = x^3 + \overline{1} \in \mathbb{Z}_2[x]$

26. feladat Határozza meg az $x^{100} - 1$ és $x^{44} - 1$ valós polinomok legnagyobb közös osztóját. (Hogyan lehetne általánosítani a feladatot?)

27. feladat Oldja meg az $fu + gv = \mathrm{lnko}(f, g)$ egyenletet.

(a) $f = x^6 + \overline{6},\ g = x^4 + \overline{5}x + \overline{1} \in \mathbb{Z}_7[x]$

(b) $f = x^8 - 3x + 2,\ g = x^6 - x^5 + 3x - 2 \in \mathbb{R}[x]$

(c) $f = x^5 + x + \overline{2},\ g = x^4 + \overline{2}x^2 + \overline{2}x + \overline{1} \in \mathbb{Z}_3[x]$

(d) $f = x^4 + x^3 + x + \overline{1},\ g = x^3 + \overline{2}x^2 + \overline{2}x + \overline{1} \in \mathbb{Z}_5[x]$

(e) $f = x^5 + 3x^4 + 6x^3 + 6x^2 + 4x + 1,\ g = x^3 + 4x^2 + 4x + 3 \in \mathbb{R}[x]$

28. feladat Oldja meg az $f \cdot u \equiv \overline{1} \pmod{m}$ kongruenciát.

(a) $f = x^2 + \overline{3}x + \overline{1},\ m = x^3 + \overline{2}x^2 + \overline{4}x + \overline{2} \in \mathbb{Z}_5[x]$

(b) $f = x^2 + \overline{1},\ m = x^3 + x^2 + \overline{1} \in \mathbb{Z}_2[x]$

(c) $f = \overline{3}x^2 + \overline{2},\ m = x^3 + x + \overline{1} \in \mathbb{Z}_5[x]$

(d) $f = \overline{2}x^2 + \overline{4},\ m = x^3 + x^2 + x + \overline{1} \in \mathbb{Z}_5[x]$

(e) $f = x^2,\ m = x^3 + x^2 + \overline{1} \in \mathbb{Z}_2[x]$

29. feladat Mely p prímszámok esetén létezik multiplikatív inverze az $x-\overline{1} \in \mathbb{Z}_p[x]$ polinomnak modulo $x^3+x+\overline{1}$? Számítsa is ki a multiplikatív inverzet, amikor létezik.

30. feladat Bézout tételének segítségével vizsgálja meg, hogy teljesül-e a $g \mid f$ oszthatóság a $g = x^2-1$ és $f = x^{17}-x^{16}+x^{15}-x^{14}+x^7-x^3+x-1$ polinomokra a $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}_3$, illetve $\mathbb{Z}_7$ testek fölött.

31. feladat Milyen n pozitív egészek esetén osztható x^n+1 az x^2+1 polinommal a $\mathbb{C}[x]$ polinomgyűrűben?

32. feladat A Horner-módszer segítségével határozza meg az $f \in \mathbb{C}[x]$ polinom c gyökének multiplicitását.

(a) $f = x^3-4x^2+5x-2,\ c=1$

(b) $f = x^6+4x^5+7x^4+8x^3+7x^2+4x+1,\ c=-1$

(c) $f = x^5-5x^4+7x^3-2x^2+4x-8,\ c=2$

(d) $f = x^5+7x^4+16x^3+8x^2-16x-16,\ c=-2$

(e) $f = x^3+x^2+x+1,\ c=i$

33. feladat Az a valós paraméter mely értékeire lesz az 1 kétszeres gyöke az $x^5+3ax^4-4ax^3-5x+1 \in \mathbb{R}[x]$ polinomnak?

34. feladat Döntse el, hogy igazak-e az alábbi állítások. A választ minden esetben indokolni kell!

(a) Minden $f,g \in \mathbb{Z}_3[x]$ esetén, ha $f \mid g$ és $g \mid f$, akkor $f=g$.
(b) Létezik olyan $f \in \mathbb{Z}_2[x]$ polinom, amelynek végtelen sok osztója van.
(c) Minden $f,g \in \mathbb{Z}_2[x]$ esetén, ha $f \mid g$ és $g \mid f$, akkor $f=g$.
(d) Léteznek olyan $f \neq g \in \mathbb{Z}_3[x]$ polinomok, melyekre minden $c \in \mathbb{Z}_3$ esetén $f(c)=g(c)$.
(e) Létezik olyan $f \in \mathbb{R}[x]$ polinom, amelyre $\mathrm{lnko}(f, x^3-1) = x+1$.

35. feladat Határozza meg azt a legalacsonyabb fokszámú $f \in \mathbb{C}[x]$ polinomot, amely a megadott helyeken a megadott értékeket veszi fel.

(a) $f(0)=1,\ f(1)=2,\ f(2)=4,\ f(3)=8$

(b) $f(-1)=6,\ f(0)=5,\ f(1)=0,\ f(2)=3,\ f(3)=2$

(c) $f(1)=2,\ f(i)=i$

(d) $f(1)=2,\ f(2)=1,\ f(3)=4,\ f(4)=3$

(e) $f(1)=0,\ f(2)=1,\ f(3)=3,\ f(4)=6$

36. feladat A $(0,a_0),(1,a_1),(2,a_2)$ pontokra akkor és csak akkor illeszthető egyenes, ha $a_0-2a_1+a_2=0$ (ugye?). Mutassa meg, hogy a $(0,a_0),(1,a_1),(2,a_2),(3,a_3)$ pontokra akkor és csak akkor illeszthető parabola (amely elfajuló esetben lehet egyenes is), ha $a_0-3a_1+3a_2-a_3=0$.

37. feladat Bontsa irreducibilis tényezők szorzatára a polinomokat a megadott polinomgyűrűkben.

(a) $x^6+\overline{3}x^4-x^3+\overline{2}x^2+x-\overline{1} \in \mathbb{Z}_5[x]$

(b) $x^5+x^4+\overline{2}x^3+x^2+\overline{1} \in \mathbb{Z}_3[x]$

(c) $x^5+x^4+\overline{2}x^3+\overline{2}x+\overline{1} \in \mathbb{Z}_3[x]$

(d) $x^5+x^4+\overline{2}x^3+\overline{1} \in \mathbb{Z}_5[x]$

(e) $x^5+x^3+\overline{4}x^2+\overline{4} \in \mathbb{Z}_5[x]$

38. feladat Adja meg az $x^5+\overline{6}x^4+x^3+\overline{6}x^2+\overline{2}x+\overline{5} \in \mathbb{Z}_7[x]$ polinom irreducibilis felbontását.

39. feladat Hány másodfokú irreducibilis polinom van $\mathbb{Z}_p[x]$-ben?

40. feladat Döntse el, hogy testek-e a megadott faktorgyűrűk, és határozza meg elemeik számát.

(a) $\mathbb{Z}_2[x]/\left(x^3+x^2+1\right)$

(b) $\mathbb{Z}_5[x]/\left(x^2+1\right)$

(c) $\mathbb{Z}_5[x]/\left(x^3+2\right)$

(d) $\mathbb{Z}_3[x]/\left(x^2+1\right)$

(e) $\mathbb{Z}_3[x]/\left(x^3+x^2+1\right)$

41. feladat Számítsa ki a véges testek megadott elemeit.

(a) $\mathbb{Z}_2[x]/\left(x^3+x+1\right)$-ben $\overline{x}^{-1}=?$, $\overline{x^2}^{-1}=?$

(b) $\mathbb{Z}_3[x]/\left(x^3-x+1\right)$-ben $\overline{2x^2+1}^{-1}=?$, $\overline{x}/\overline{x+1}=?$

(c) $\mathbb{Z}_5[x]/\left(x^3+x+2\right)$-ben $\overline{x^2+1}^{-1}=?$, $\overline{4x+3}/\overline{x^2}=?$

(d) $\mathbb{Z}_7[x]/\left(x^3+x+1\right)$-ben $\overline{2x}^{-1}=?$, $\overline{x}/\overline{2x+2}=?$

(e) $\mathbb{Z}_5[x]/\left(x^3+x^2+2\right)$-ben $\overline{x+1}^{-1}=?$, $\overline{x^2}/\overline{3x+4}=?$

42. feladat Határozza meg a 121-elemű test összes elemének összegét.

43. feladat Határozza meg az alábbi polinomok irreducibilis felbontását $\mathbb{C}$ és $\mathbb{R}$ felett.

(a) $x^6 - 27$

(b) $x^4 - x^2 + 1$

(c) $x^4 + 4$

(d) $x^7 + 7x^4 - 8x$

(e) $x^4 + x^2 - 30$

44. feladat Képzelje el (de ne írja fel!) az $x^{1973} - 1997$ polinom irreducibilis felbontását $\mathbb{R}$ felett. Hány tényezőt lát (a lelki szemeivel), és hányadfokúak ezek?

45. feladat Írja fel az $f = (x-1)\left(x^2-1\right)\left(x^3-1\right)\left(x^4-1\right)$ és $g = (x+1)\left(x^2+1\right)\left(x^3+1\right)\left(x^4+1\right)$ polinomok irreducibilis felbontását a kedvenc számteste felett, majd számítsa ki ennek segítségével f és g legnagyobb közös osztóját.

46. feladat Anélkül, hogy megkeresné a gyököket, határozza meg a $3x^5 + 6x^4 + 9x^3 + 2x^2 + 4x + 1 \in \mathbb{C}[x]$ polinom gyökeinek négyzetösszegét.

47. feladat Határozza meg a λ komplex paraméter értékét úgy, hogy az $x^3 - 7x + \lambda$ polinom egyik gyöke valamelyik másik gyök kétszerese legyen.

48. feladat Keresse meg az alábbi polinomok összes racionális gyökét.

(a) $2x^5 + 3x^4 - 7x^3 - 3x^2 + 8x - 12$

(b) $x^6 + x^5 + 2x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 4x - 8$

(c) $x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 11x - 6$

(d) $x^6 - x^5 - 2x^3 - 3x^2 - x - 2$

(e) $x^5 + x^4 - 6x^3 - 14x^2 - 11x - 3$

49. feladat Mely p prímszámok esetén van racionális gyöke az $x^4 + 2x^3 - 16x^2 + 2x + p$ polinomnak?

50. feladat Határozza meg az alábbi polinomok irreducibilis felbontását $\mathbb{Q}$ felett.

(a) $2x^7 + 5x^6 + 4x^5 + 13x^4 + 54x^3 + 84x^2 + 54x + 12$

(b) $3x^{100} - 10x^{50} + 100x - 50$

(c) $3x^6 + 2x^5 - 7x^4 + 2$

(d) $5x^8 - 5x^7 + 4x^2 - 2x - 2$

(e) $x^7 - 4x^6 + 4x^5 + 9x^4 - 36x^3 + 39x^2 - 12x + 12$

51. feladat Adjon meg végtelen sok olyan n egész számot, melyre az $x^2 + 100x + n$ polinom irreducibilis $\mathbb{Q}$ felett, és végtelen sok olyat is, amelyre nem irreducibilis.

52. feladat A derivált vizsgálatával határozza meg az alábbi $\mathbb{C}[x]$-beli polinomok többszörös gyökeit, majd az összes gyöküket a komplex számtestben (multiplicitással együtt). Az $\operatorname{lnko}(f, f')$ és $f/\operatorname{lnko}(f, f')$ polinomok kiszámításához használhat számítógépet.

(a) $x^5 + x^4 - 5x^3 - x^2 + 8x - 4$

(b) $3x^4 - 4x^3 + 1$

(c) $x^5 - 10x^3 - 20x^2 - 15x - 4$

(d) $x^7 - 3x^6 + 5x^5 - 7x^4 + 7x^3 - 5x^2 + 3x - 1$

(e) $x^6 - 15x^4 + 8x^3 + 51x^2 - 72x + 27$

53. feladat Határozza meg az a, b paraméterek értékét úgy, hogy legyen háromszoros gyöke a $3x^5 - 10x^3 + ax + b \in \mathbb{C}[x]$ polinomnak.

54. feladat Mutassa meg, hogy az $1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$ polinomnak nincs többszörös gyöke a komplex számok testében.

55. feladat Döntse el, hogy igazak-e az alábbi állítások. A választ minden esetben indokolni kell!

(a) Ha egy legalább elsőfokú polinom irreducibilis $T[x]$-ben, akkor nincsen gyöke T-ben (T tetszőleges test).

(b) Tetszőleges p prímszám esetén minden $f : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p$ leképezéshez létezik olyan $\mathbb{Z}_p[x]$-beli polinom, amelynek éppen f a polinomfüggvénye.

(c) Bármely $a, b, c \in \mathbb{R}$ számokra létezik olyan $f \in \mathbb{R}[x]$ másodfokú polinom, melyre $f(0) = a$, $f(1) = b$ és $f(2) = c$.

(d) Ha egy $\mathbb{C}$ feletti polinom irreducibilis, akkor van gyöke.

(e) Ha egy polinom relatív prím a deriváltjához, akkor nincsen többszörös gyöke.