

ALGEBRA ÉS SZÁMELMÉLET

feladatok a gyakorlatra (komplex számok)

2019 őszi félév, BSc

1. feladat Számítsa ki az alábbi komplex számokat kanonikus alakban.

- (a) $\frac{2+3i}{1+4i}$ (b) $u\bar{v} + \bar{u}v$, ahol $u = 2 + 3i$ és $v = 1 + 2i$
(c) $\frac{\bar{u}}{v} + \frac{u}{\bar{v}}$, ahol $u = 2 - 3i$ és $v = 1 + i$ (d) $|uv|$, ahol $u = 3 + 5i$ és $v = 1 + 3i$
(e) $\left|\frac{u}{v}\right|$, ahol $u = 16 + 2i$ és $v = 7 + 4i$ (f) $\left(\frac{-1+i}{2+i}\right)^2 - \left(\frac{-1-i}{2-i}\right)^2$
(g) $(2+5i)^2 + (2+5i)^2$ (h) $(-6+9i+4-8i) \cdot i$

2. feladat Határozza meg az $5 + 12i$ komplex szám négyzetgyökeit kanonikus alakban.

3. feladat Oldja meg az $(1 - 2i)x^2 + (3 + i)x + i = 0$ egyenletet a komplex számok halmazán.

4. feladat Adja meg az alábbi komplex számokat trigonometrikus alakban.

- (a) $1 + i$ (b) $1 + \sqrt{3}i$ (c) $-1 - i$
(d) $3 + \sqrt{3}i$ (e) $i - \sqrt{3}$ (f) $\sqrt{3} - 3i$

5. feladat Számítsa ki trigonometrikus és kanonikus alakban is.

- (a) $\frac{(-1-i)(\sqrt{3}+i)}{(-1+i)(-\sqrt{3}+i)}$ (b) $(-1-i)(\sqrt{3}+i)$
(c) $(\sqrt{3}-i)(2+2\sqrt{3}i)$ (d) $\frac{1-i}{1+i}$

6. feladat Adja meg $\cos \frac{\pi}{12}$ és $\sin \frac{\pi}{12}$ pontos értékét. (Egy ötlet: számítsa ki az $\frac{1+\sqrt{3}i}{1+i}$ hányadost kanonikus és trigonometrikus alakban is, és hasonlítsa össze a két eredményt.)

7. feladat Ábrázolja a komplex számsíkon az alábbi számhalmazokat.

- (a) $\{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(\bar{z} - i) > 1\}$
(b) $\{z \in \mathbb{C} : |iz - i| = 1\}$
(c) $\{z \in \mathbb{C} : |\bar{z} + 2 - i| \leq 2\}$
(d) $\{z \in \mathbb{C} : |\bar{z} - i| = 1\}$
(e) $\{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \text{Re}(z + 3) < 1\}$
(f) $\{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \arg zi < \frac{\pi}{3}\}$
(g) $\{z \in \mathbb{C} : \arg(z + zi) = \pi\}$

8. feladat Mekkora szöveget zárnak be egymással az origót a $(2, 1)$ és az $(1, 3)$ ponttal összekötő szakaszok?

9. feladat Számítsa ki a hatványokat trigonometrikus alakban, majd adja meg a végeredményt kanonikus alakban is.

- (a) $(-1 + i)^{2422}$ (b) $(\sqrt{3} + i)^{1208}$
(c) $(2 + 2\sqrt{3}i)^{605}$ (d) $(1 + i)^{1222}$
(e) $(-3 - 3\sqrt{3}i)^{1526}$ (f) $\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{2019}$

10. feladat Fejezze ki $\cos(2019x)$ -et $\cos x$ és $\sin x$ segítségével.

11. feladat Számítsa ki a gyök összes értékét trigonometrikus alakban, majd adja meg a végeredményt kanonikus alakban is.

- (a) $\sqrt[3]{i}$ (b) $\sqrt[4]{-1 - \sqrt{3}i}$
(c) $\sqrt[5]{64}$ (d) $\sqrt[4]{-16}$
(e) $\sqrt[3]{-8}$ (f) $\sqrt[12]{1}$

12. feladat Oldja meg az $i\bar{z} = z^2$ egyenletet a komplex számok halmazán.

13. feladat Egységgyökök-e a következő komplex számok, és ha igen, akkor hányadik egységgyökök?

- (a) $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ (b) $-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ (c) $\text{cis} \frac{5\pi}{12}$ (d) $\text{cis} \frac{2}{3}$
(e) $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ (f) $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ (g) $-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ (h) $\text{cis} \frac{6\pi}{7}$

14. feladat Mikor lehet ε és $\varepsilon + 1$ is egységgyök?

15. feladat Határozza meg mindazokat a komplex számokat, amelyek hetvenhatodik és századik egységgyökök is.

16. feladat Döntse el, hogy igazak-e az alábbi állítások. A választ minden esetben indokolni kell!

- (a) Van olyan z komplex szám, amelyre $\text{Re} z = 1$ és $|z - i| = 3$.
(b) Tetszőleges $z \in \mathbb{C}$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén, ha $\sqrt[n]{z}$ értékei között van valós szám, akkor z is valós.
(c) Tetszőleges $z \in \mathbb{C}$ esetén, ha z^2 harmadik egységgyök, akkor z is harmadik egységgyök.
(d) Tetszőleges $z, w \in \mathbb{C}$ esetén $|z + w| = |z| + |w|$.
(e) Van olyan z komplex szám, amelyre $\text{Re} z = 2$ és $|z| = 1$.
(f) Minden nemnulla komplex szám egyértelműen előáll egy nemnulla valós szám és egy nemnulla tiszta képzetes szám összegeként.
(g) Egy komplex szám pontosan akkor valós, ha egyenlő az abszolút értékével.